Quelques corrigés d'exercices des feuilles 5 et 6

Calculer l'intégrale double $\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy$ **,** R **région triangulaire de sommets** $(0,0),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$**.**
On intègre par tranche. On peut le faire de deux façons :

$$\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi (\int_0^x x\cos(x+y)dy)dx$$

ou

$$\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi (\int_y^\pi x\cos(x+y)dx)dy$$

Si on prend la première expression on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\int_0^x x\cos(x+y)dy)dx &= \int_0^\pi [x\sin(x+y)]_{y=0}^{y=x}dx \\
&= \int_0^\pi (x\sin 2x) - x\sin(x))dx \\
&= [-x\cos(2x)/2]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(2x)/2dx - [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)dx \\
&= -\pi/2 + 0 - \pi + 0 \\
&= -3\pi/2
\end{aligned}$$

Avec la deuxième cela donne la même chose (et les calculs à faire sont à peu près les mêmes ; dans certains cas le calcul est beaucoup plus simple en intégrant dans un ordre que dans l'autre)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\int_y^\pi x\cos(x+y)dx)dy &= \int_0^\pi ([x\sin(x+y)]_{x=y}^{x=\pi} - \int_y^\pi \sin(x+y)dx)dy \\
&= \int_0^\pi (\pi\sin(\pi+y) - y\sin(2y))dy - \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_y^\pi dy \\
&= [-\pi\cos(\pi+y)]_0^\pi + [y\cos(2y)/2]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(2y)/2dy \\
&\qquad - \int_0^\pi [\cos(2y) - \cos(y+\pi)]dy \\
&= -2\pi + \pi/2 + 0 + 0 + 0 \\
&= -3\pi/2
\end{aligned}$$

Calculer l'intégrale double $\iint_R x^2\,dxdy$ **lorsque** $R = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$**.**
La forme du domaine incite à utiliser le système des coordonnées polaires. L'intégrale sur l'anneau est l'intégrale sur l'image de $]1,\sqrt{2}[\times]0,2\pi[$ par l'application F, C^1 bijective de $]1,\sqrt{2}[\times]0,2\pi[$ sur son image (l'anneau privé d'un segment), définie par

$$F\ :\ (\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)).$$

On a vu en cours (et dans un exercice ; il faut savoir le retrouver) que le jacobien de cette fonction est ρ. On a :

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2\,dxdy &= \iint_{F(]1,\sqrt{2}[\times]0,2\pi[)} x^2\,dxdy \\
&= \iint_{]1,\sqrt{2}[\times]0,2\pi[} \rho^2\cos^2(\theta)\,\rho d\rho d\theta \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho. \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
&= [\rho^4/4]_1^{\sqrt{2}}. \int_0^{2\pi} (1+\cos(2\theta))/2 d\theta \\
&= 3\pi/4
\end{aligned}$$

Calculer l'aire de la région du plan suivante $D = \{(x,y) \mid y \leqslant x \leqslant y^2\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.
Par définition cette aire est donnée par l'intégrale de la fonction constante égale à 1 sur le domaine D. On calcule ensuite par tranche l'intégrale obtenue :

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_1^2 (\int_y^{y^2} dx)dy \\
&= \int_1^2 (y^2-y)dy \\
&= [y^3/3 - y^2/2]_1^2 \\
&= 7/3 - 3/2 \\
&= 5/6
\end{aligned}$$

Calculer l'intégrale triple : $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.
Le domaine d'intégration est une boule centrée en 0. L'utilisation des coordonnées sphériques peut être intéressant dans ce cas. L'application

$$F\ :\ (\rho,\theta,\phi) \mapsto (\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi))$$

est une application C^1 bijective de $]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ sur son image. Cette image est la boule de centre R privé de son bord et de la partie de la boule appartenant au demi-plan $\{(x,z,0)\ /\ x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$. Ces parties manquantes de la boule sont de dimension 2 ; leur volume est nul. L'intégrale sur la boule est égale à l'intégrale sur l'image de $]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ par F.
Le jacobien de F est $\rho^2\sin(\phi)$. Il faut savoir faire ce calcul. Je l'ai fait en cours. Le théorème du changements de variables donne ici :

$$\begin{aligned}
\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz &= \iiint_{F(]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz \\
&= \iiint_{]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} \rho\ \rho^2\sin(\phi)\ d\rho\ d\theta\ d\phi
\end{aligned}$$

On intègre ensuite par tranche. C'est particulièrement simple ici car le domaine est un pavé et la fonction à intégrer un produit de fonctions dépendant de chaque coordonnée. On obtient :

$$\begin{aligned}
\iiint_{]0,R[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} \rho\ \rho^2 \sin(\phi)\ d\rho\ d\theta\ d\phi &= \int_0^R \rho^3 d\rho . \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{\pi} \sin(\phi) d\phi \\
&= [\rho^4/4]_0^R .2\pi.[-\cos(\phi)]_0^{\pi} \\
&= R^4/4.2\pi.2 = \pi R^4
\end{aligned}$$

Calculer le volume du corps limité par le plan xOy, le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
La partie dont le volume est demandée est appelée "temple de Viviani" (ou plus exactement la moitié du temple de Viviani car on ne prend que les points de troisième coordonnée positive). Le calcul est expliqué ci-dessous dans le cas $a = 1$ (pour obtenir le cas général il suffit de multiplier par a^3).

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq x . \end{cases} \quad z \geq 0$$

En coordonnées cylindriques ces contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \rho^2+z^2 \leq 1 \\ \rho^2 \leq \rho \cos\theta \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \rho^2+z^2 \leq 1 \\ \rho \leq \cos\theta \\ z \geq 0 \end{cases}$$

* ρ varie de 0 à 1
* quand ρ est fixé : θ varie de $-\text{Arccos}\,\rho$ à $\text{Arccos}\,\rho$.
  z varie de 0 à $\sqrt{1-\rho^2}$

Le volume du domaine a donc l'expression intégrale

$$\int_0^1 \left[\int_{-\text{Arccos}\,\rho}^{\text{Arccos}\,\rho} \left(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, dz \right) d\theta \right] d\rho$$

$$= \int_0^1 2\rho \sqrt{1-\rho^2} \, \text{Arccos}\,\rho \, d\rho .$$

$$= \left[\frac{2}{3} \left[-(1-\rho^2)^{3/2} \right] \text{Arccos}\,\rho \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho .$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \int_0^1 (1-\rho^2) d\rho = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right]$$

Utiliser le théorème de Green-Riemann pour trouver l'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Il faut comprendre l'énoncé comme : trouver l'aire de la partie compact délimitée par l'ellipse. Considérons le champ F dont les coordonnées sont $(-y/2, x/2)$. Ce champs est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. L'ellipse est une courbe simple fermée qu'on peut paramétrée par

$$t \mapsto (a\cos(t), a\sin(t)).$$

Appelons D l'intérieur de l'ellipse, γ son bord. Le théorème de Green-Riemann donne l'égalité :

$$\int_\gamma F d\gamma = \iint_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dxdy.$$

Ici $F_2 = x/2$ et $F_1 = -y/2$ donc $(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = 1$ et le deuxième terme de l'égalité est l'intégrale définissant l'aire de D. Calculons le premier terme au moyen du paramétrage donné plus haut :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F d\gamma &= \int_0^{2\pi} \langle F(a\cos(t), b\sin(t)), (-a\sin(t), b\cos(t))\rangle dt \\
&= 1/2 \int_0^{2\pi} \langle (-b\sin(t), a\cos(t))), (-a\sin(t), b\cos(t))\rangle dt \\
&= 1/2 \int_0^{2\pi} \langle ab(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

L'aire de D est donc πab.

Calculer l'aire de $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geqslant 0\}$ en utilisant la représentation paramétrée $f(u, v) = (a\ \cos u\ \cos v\ ,\ a\ \sin u\ \cos v\ ,\ a\ \sin v)$.

Ce calcul a été fait pour la sphère entière en cours. Le voici avec le paramétrage sphérique proposé dans l'énoncé :

$$f : [0, 2\pi[\times [0, \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto (a\cos u \cos v,\ a \sin u \cos v,\ a \sin v)$$

définit un paramétrage régulier bijectif de la demi-sphère privée du point $(0,0,a)$.

La formule donnant l'aire d'une nappe paramétrée donne.

$$\text{Aire}(S_+) = \iint_{[0,2\pi[\times[0,\frac{\pi}{2}[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| \, du\, dv.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} -a\sin u \cos v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -a\cos u \sin v \\ -a \sin u \sin v \\ a\cos v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} a^2 \cos u \cos^2 v \\ a^2 \sin u \cos^2 v \\ a^2 \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|^2 = a^4 \cos^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v = a^4 \cos^2 v$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| = a^2 \cos v$$

$$\text{Aire}(S_+) = a^2 \left(\int_0^{2\pi} du \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right) = 2\pi a^2$$