2) Étude de g

On a immédiatement

$$\frac{g(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \to 0$$

g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

On a déduit pour f de l'existence de $\lim\limits_{0} f' = 0$ l'existence de $f'(0) = 0$.

L'exemple de g montre que la réciproque du théorème utilisé (conséquence immédiate, rappelons-le, du théorème des accroissements finis) est fausse.

En effet pour $x > 0 \quad g'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0.

III.202

Montrer que $f : x \mapsto \operatorname{Arctg} x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f^{(n)}(x)$.

Solution

On sait que f est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Nous allons utiliser les résultats concernant la dérivation des applications à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E (avec ici $E = \mathbb{C}$).

Nous écrivons :

$$f'(x) = \frac{1}{2\,i}\left[\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right]$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)\,!}{2\,i}\left[\frac{1}{(x - i)^n} - \frac{1}{(x + i)^n}\right].$$

La forme obtenue, concernant une fonction réelle, n'est évidemment pas satisfaisante en ce qu'elle fait apparaître les complexes i et $-i$. On écrit donc :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)\,!}{2\,i}\;\frac{(x + i)^n - (x - i)^n}{(x^2 + 1)^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)\,!}{2\,i}\;\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\, i^k\, x^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, i^k\, x^{n-k}}{(x^2 + 1)^n}. \end{aligned}$$

La réduction des deux $\sum$ ne laisse subsister que les termes de degré $n-k$ en x avec $k = 2p+1$ impair et l'on a finalement :

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n} \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^p C_n^{2p+1} x^{n-2p-1}}.$$

III.203 (indépendamment du précédent)

Montrer que $f : x \mapsto \operatorname{Arctg} x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

où P_n est un polynôme.

Partant de la relation $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$, déterminer une relation linéaire liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1} pour $n > 1$. En déduire pour $n \geqslant 1$ une relation linéaire liant P_n, P_n' et P_n'' et déterminer explicitement P_n à partir de cette dernière relation.

Solution

1) f' existe et on a bien

$$f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^2+1} \quad \text{avec} \quad P_1(x) = 1.$$

Soit n entier $\geqslant 1$. Supposant l'existence de $f^{(n)}$ avec $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$, on déduit aussitôt l'existence de $f^{(n+1)}$ avec $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$, où

$$(1) \qquad P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - 2nxP_n(x).$$

2) Partons de la relation $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ et égalons les dérivées $(n-1)$-ièmes des deux membres, en utilisant pour chacun des produits $(1+x^2)f''(x)$ et $2xf'(x)$ la formule de Leibniz, soit :

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2C_{n-1}^1 xf^{(n)}(x) + 2C_{n-1}^2 f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) + 2C_{n-1}^1 f^{(n-1)}(x) = 0$$

ou

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

ou encore en multipliant les deux membres par $(x^2+1)^n$

$$(2) \qquad \boxed{P_{n+1}(x) + 2nxP_n(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0}$$

qui est la première relation demandée.

3) Comparant (1) et (2) on obtient immédiatement :

$$P_n'(x) = -n(n-1)P_{n-1}(x)$$

d'où, en remplaçant n par $n+1$,

$$(3) \qquad P_{n+1}'(x) = -n(n+1)P_n(x).$$

D'autre part, en dérivant (1), il vient :

$$(x^2+1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) - 2nP_n(x) - P_{n+1}'(x) = 0$$

et, en utilisant (3),

$$(4) \qquad \boxed{(x^2+1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0}$$

qui est la deuxième relation demandée, valable, comme (1) et (3), pour $n \geqslant 1$.

4) A partir de (1) et de $P_1 = 1$, on établit d'abord aisément (soin en est laissé au lecteur) les résultats suivants :

i) P_n est de degré $n-1$,

ii) P_n est de même parité que $n-1$,

iii) le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n-1} n!$

On peut donc poser a priori

$$P_n(x) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} a_p x^{n-2p-1} \quad \text{avec} \quad a_0 = (-1)^n n!$$

Portant dans (4), il vient :

$$(x^2+1) \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-3}{2}} a_p(n-2p-1)(n-2p-2)x^{n-2p-3} - 2(n-1)x \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-2}{2}} a_p(n-2p-1)x^{n-2p-2} + n(n-1) \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} a_p x^{n-2p-1} = 0$$

ou

$$\sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-3}{2}} (n-2p-1)(n-2p-2)a_p x^{n-2p-3} + \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} [(n-2p-1)(n-2p-2) - 2(n-1)(n-2p-1) + n(n-1)] a_p x^{n-2p-1} = 0$$

(on a scindé le premier $\sum$ en deux $\sum$ dont le second a été regroupé avec les deux derniers $\sum$).

Soient après réduction :

$$\sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-3}{2}} (n-2p-1)(n-2p-2)a_p x^{n-2p-3} + \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} 2p(2p+1)a_p x^{n-2p-1} = 0.$$

On effectue alors dans le premier $\sum$ le changement d'indice $p \mapsto p+1$, soit

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} (n-2p)(n-2p+1)\,a_{p-1}\,x^{n-2p-1} + \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} 2p(2p+1)\,a_p\,x^{n-2p-1} = 0$$

ou

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}} [(n-2p)(n-2p+1)\,a_{p-1} + 2p(2p+1)\,a_p]\,x^{n-2p-1} = 0$$

d'où l'on déduit pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant \dfrac{n-1}{2}$

$$2p(2p+1)\,a_p = -(n-2p)(n-2p+1)\,a_{p-1}\,.$$

Partant de $a_0 = (-1)^n\,n\,!$ on détermine par récurrence

$$a_p = (-1)^p \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-2p+1)(n-2p)}{2 \times 3 \times \cdots \times (2p)(2p+1)} (-1)^{n-1}\,n\,!$$

$$= (-1)^{n+p-1}(n-1)\,!\,\frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)(n-2p)}{1 \times 2 \times \cdots \times (2p) \times (2p+1)}$$

$$\boxed{a_p = (-1)^{n+p-1}\,(n-1)\,!\,C_n^{2p+1}}$$

c'est bien le même résultat que dans III.202.

La méthode de cet exercice paraîtra sans doute plus compliquée que celle de l'exercice précédent. Elle a cependant l'avantage de s'appliquer à d'autres applications que l'arc tangente par exemple à $f : x \mapsto e^{x^2}$.

III.204 (suite des deux exercices précédents)

Montrer que pour tout $n > 1$, P_n admet $n-1$ racines réelles distinctes, les racines de P_n étant, pour tout $n > 2$, « séparées » par celles de P_{n-1}.

On donnera deux démonstrations, l'une à partir de III.202, l'autre à partir de III.203.

Solution

1) Première démonstration : On a (pour $n > 1$)

$$P_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)\,!}{2\,i}\,[(x+i)^n - (x-i)^n]\,.$$

donc :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^n - (x-i)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow (i \text{ et } -i \text{ n'étant pas racines}) \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-i}{x+i} = \exp\left(\frac{2\,ik\pi}{n}\right) \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}\,.$$

Expliquons la limitation sur k. Il suffit, on le sait, pour obtenir toutes les racines de l'unité une fois et une seule, de donner à k n valeurs entières consécutives par exemple $0, 1, \dots, n-1$; d'autre part $k = 0$ conduit à l'équation impossible $\dfrac{x-i}{x+i} = 1$.

On tire alors :

$$x = i\,\frac{1 + \exp\left(\frac{2\,ik\pi}{n}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\,ik\pi}{n}\right)} = i\,\frac{\exp\left(-i\frac{k\pi}{n}\right) + \exp\left(i\frac{k\pi}{n}\right)}{\exp\left(-i\frac{k\pi}{n}\right) - \exp\left(i\frac{k\pi}{n}\right)}$$

soit

$$\boxed{x = -\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n} \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}}\,.$$

Vu la stricte décroissance de la cotangente sur $]0, \pi[$, on obtient bien $n-1$ racines (réelles) distinctes. On remarquera de plus que la suite

$$k \mapsto -\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}$$

est strictement croissante. D'autre part si $n = 2p+1$ est impair, les racines sont en nombre pair, toutes différentes de 0, les racines correspondant à

$$k = 1, \dots, p$$

étant respectivement opposées de celles correspondant à $k = 2p, \dots, p+1$; si $n = 2p$ est pair les racines sont en nombre impair, celle correspondant à $k = p$ étant nulle, les autres racines étant toutes non nulles, celles correspondant à $k = 1, \dots, p-1$ étant respectivement opposées de celles correspondant à

$$k = 2p-1, \dots, p+1\,.$$

Ces résultats bien entendu recoupent les remarques de parité faites précédemment sur P_n.

Enfin pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ (si $n > 2$), on a la double inégalité :

$$\frac{k}{n} < \frac{k}{n-1} < \frac{k+1}{n}$$

(la première inégalité est triviale, la seconde équivaut à $kn < (k+1)(n-1)$ ou $k < n-1$, ce qui est). Utilisant à nouveau la stricte décroissance de la cotangente sur $]0, \pi[$, on en déduit bien que les racines de P_n sont « séparées » par celles de P_{n-1}.

2) Seconde démonstration : $P_2(x) = -2x$ admet une racine réelle (0). Soit $n > 2$ et supposons que P_{n-1} admet $n-2$ racines réelles $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-2}$. Utilisant $f^{(n-1)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^{n-1}}$, on voit que ces racines annulent $f^{(n-1)}$; de plus le degré de P_{n-1} (soit $n-2$) étant strictement inférieur à celui de $(x^2+1)^{n-1}$ (soit $2n-2$) on a $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$. On applique alors à $f^{(n-1)}$ le théorème de Rolle sur les $n-3$ intervalles $[\beta_k, \beta_{k+1}]$, $k \in \{1, \dots, n-3\}$ et le théorème de Rolle généralisé sur $]-\infty, \beta_1]$ et sur $[\beta_{n-2}, +\infty[$, ce qui met en évidence $n-1$ réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$ tels que pour

$$k \in \{1, \dots, n-3\} \quad \beta_k < \alpha_k < \beta_{k+1}$$

et que $\alpha_1 < \beta_1$ et $\alpha_{n-1} > \beta_{n-2}$, ces $n-1$ réels annulant $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$. Utilisant $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$, on en conclut que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont **des** (et par suite **les**) racines de P_n, que ces racines sont distinctes et qu'elles sont séparées par celles de P_{n-1}.

III.205

Montrer que tout homomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même est dérivable. Déterminer explicitement tous ces homomorphismes. En déduire tous les homomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Solution

1) Soit f un homomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même. Alors :

(1) $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Fixons x, les deux membres de (1) sont alors des fonctions continues de y sur $\mathbb{R}$, elles sont donc intégrables sur tout intervalle compact et on peut écrire :

$$\int_0^y f(x+t)\,dt = yf(x) + \int_0^y f(t)\,dt.$$

Effectuons dans la première intégrale le changement de variable $x + t = u$. Il vient :

$$\int_x^{x+y} f(u)\,du = yf(x) + \int_0^y f(t)\,dt.$$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (une telle primitive existe puisque f est continue). Ayant fixé y à une valeur y_0 **non nulle,** on peut écrire pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1}{y_0}\left[F(x+y_0) - F(x) - \int_0^{y_0} f(t)\,dt\right]$$

$\left(f \text{ étant } \textbf{continue} \text{ on a en effet } \displaystyle\int_x^{x+y_0} f(t)\,dt = F(x+y_0) - F(x)\right)$.

Sous la forme (2) il apparaît bien que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) (1) implique par dérivation par rapport à x, y étant fixé, puis par dérivation par rapport à y, x étant fixé :

$$f'(x+y) = f'(x) \quad \text{et} \quad f'(x+y) = f'(y)$$

d'où l'on déduit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f'(x) = f'(y).$$

En particulier (faisant $y = 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(0)$$

f' est donc constante et par suite f est affine

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

mais comme $f(0) = 0$ (faire dans (1) $x = y = 0$), $\beta = 0$ et f est donc linéaire. Réciproquement toute application linéaire étant en particulier additive,

$$f(x) = \alpha x \quad \text{vérifie (1)}.$$

En résumé les seuls homomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Soit g un homomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. On a :

(3) $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) = g(x)\,g(y)$$

$g(x)$, $g(y)$, $g(x+y)$ étant tous trois strictement positifs, (3) équivaut à :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \operatorname{Log} g(x+y) = \operatorname{Log} g(x) + \operatorname{Log} g(y)$$

c'est-à-dire au fait que $f = \operatorname{Log} g$ est un homomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même. Donc

$$\operatorname{Log} g(x) = \alpha x \Leftrightarrow g(x) = e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}_+^* \text{ (en posant } a = e^{\alpha}\text{)}.$$

En résumé les seuls homomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont les fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ (y compris l'exponentielle triviale correspondant à $a = 1$).