Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et fonctions (suite)

1 Nappes paramétrées

Si f une fonction de deux variables, son graphe est une surface incluse dans $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une telle surface s'appelle une nappe paramétrée (par f).

Si f est une fonction partout dérivable alors son graphe admet en chaque point un plan tangent. Pour trouver des vecteurs appartenant au plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ traçons deux courbes sur la surface dans des directions données par les coordonnées :

$$t \mapsto (x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0)) \quad t \mapsto (x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t))$$

et calculons les coordonnées de leurs vecteurs tangents à l'instant $t = 0$. On obtient

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) \quad (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Ce sont deux vecteurs indépendants tangents à deux courbes tracées sur la nappe. Le plan tangent à la nappe paramétrée est le plan passant par (x_0, y_0) de direction engendrée par ces deux vecteurs. pour obtenir une équation de ce plan on peut utiliser le produit vectoriel. Un vecteur normal au plan est donné par

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) \wedge (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1)$$

L'équation du plan tangent est donnée par :

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Plus généralement une nappe paramétrée est un ensemble décrit par deux paramètres

$$\{(f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t)) \ / \ (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Les vecteurs

$$(\frac{\partial f_1}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial f_2}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial f_3}{\partial s}(s_0, t_0)) \quad (\frac{\partial f_1}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial f_2}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial f_3}{\partial t}(s_0, t_0))$$

sont des vecteurs tangents à la surface au point image de (s_0, t_0). S'ils sont indépendants le paramétrage définit une surface en (s_0, t_0) et un vecteur normal à la surface est donné par le produit vectoriel des vecteurs précédents

$$(\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_3}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}, \frac{\partial f_3}{\partial s}\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_3}{\partial t}, \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial f_1}{\partial t})(s_0, t_0)$$

Si on note (a, b, c) les coordonnées de ce vecteur l'équation du plan tangent à la nappe paramétrée au point image de (s_0, t_0) est

$$a(x - f_1(s_0, t_0)) + b(y - f_2(s_0, t_0)) + c(z - f_3(s_0, t_0)) = 0.$$

(C'est simplement écrire que les vecteurs AM et (a, b, c) sont orthogonaux lorsque M a pour coordonnées (x, y, z) et A est le point image de (s_0, t_0), $(f_1(s_0, t_0), f_2(s_0, t_0), f_3(s_0, t_0))$.

2 Courbes, surfaces, hypersurfaces de niveau

Donnons-une fonction de deux variables f. Que dire des ensembles $\{(x, y) \ / \ f(x, y) = c\}$? On les appelle les courbes de niveaux de la fonction f. C'est dire qu'on s'attend à ce que ces ensembles soient des courbes.

Ce n'est toutefois pas toujours le cas. Si par exemple f est constante égale à 0, alors les courbes de niveau sont toutes vides sauf la courbe de niveau 0 qui est égale à $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Si f est différentiable et son gradient n'est pas nul en (x_0, y_0) alors la courbe de niveau $f(x_0, y_0)$ définit bien une courbe au voisinage de (x_0, y_0). Cette courbe est régulière et l'équation de sa tangente est donnée par le gradient de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Par exemple, la tangente en $(1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$ à la courbe de niveau 1 de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est la droite d'équation :

$$2/\sqrt{3}(x - 1/\sqrt{3}) + 2\sqrt{2/3}(y - \sqrt{2/3}) = 0.$$

On a de la même façon les équations des plans tangents aux surfaces de niveaux de fonctions de trois variables dérivables au voisinage de points en lesquels le gradient n'est pas nul.

Par exemple le plan tangent à la surface $xyz = 1$ au point $(1/2, 1, 2)$ a pour équation :

$$2(x - 1/2) + (y - 1) + 1/2(z - 2) = 0.$$

Ce qui précède doit être établi plus rigoureusement. Pour ce faire nous disposons du théorème des fonctions implicites conséquences du théorème d'inversion local. Ce sont deux théorèmes très importants du calcul différentiel. Nous donnons une démonstration du théorème d'inversion locale en annexe. Nous ne donnons celle du théorème des fonctions implicites seulement en dimension 2.

3 Fonctions implicites – Inversion locale

3.1 Inversion locale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $V = F(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 3.1. *F est* **inversible** *sur U s'il existe une application G de V dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G \circ F = \mathbf{1}_U$ et $F \circ G = \mathbf{1}_V$.*

Exemples

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$

(3) Si $A \in \mathbb{R}^n$, soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $F(X) = X + A$.

(4) $U = \{(r\,,\,\theta)\ /\ r > 0\,,\ 0 < \theta < \pi\}$
$F(r\,,\,\theta) = r\,\cos\theta\,,\ r\,\sin\theta$

Définition 3.2. *F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est* **localement inversible** *en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des ouverts U et V avec $X \in U$ et $F(X) \in V$ et $F(U) = V$ tel que F est inversible sur U.*

Théorème 3.3. *(d'inversion locale)*
Soient f définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et x_0 un point intérieur à D. Alors si $f'(x_0)$ est inversible (en tant qu'application linéaire) f est localement inversible en x_0. Si g désigne son inverse locale, g est aussi de classe C^1 et en $y = f(x)$ on a $g'(y) = f'(x)^{-1}$ (l'exposant désigne ici l'opération d'inversion d'une matrice).

Changer les notations ; noms de variables au départ et à l'arrivée ? ? ? ?.
Démonstration Je reprends essentiellement la démonstration de la page 27 et suivantes du livre "Calcul différentiel" d'André Avez.
Étape 1 : On se ramène au cas où $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ et la différentielle de f en 0 est l'identité.
Soit x_0 un point de $D \subset \mathbb{R}^n$ en lequel $f'(x_0)$ est inversible. Considérons alors l'application g définie par :

$$g(x) = f'(x_0)^{-1}(f(x + x_0) - f(x_0)).$$

On a $f(0) = 0$ et $g'(0) = f'(x_0)^{-1}f'(x_0) = Id$. Supposons que l'on sache montrer que g est localement inversible en 0 d'inverse C^1. Notons ϕ son inverse. Alors comme

$$f(x) = f'(x_0)g(x - x_0) + f(x_0)$$

f est localement inversible d'inverse

$$\psi(x) = \phi(f'(x_0)^{-1}(x - f(x_0))) + x_0,$$

et évidemment, si ϕ est C^1 ψ l'est aussi.
Il suffit donc de montrer e théorème dans le cas où $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ et la différentielle de f en 0 est l'identité.
Étape 2 : On montre que f est injective sur une petite boule de centre 0 : $B(0, r)$.
Soit $r > 0$ suffisamment petit pour que la norme de $f'(x) - f'(0)$ soit inférieure à $\delta < 1$ sur $B(0, 2r)$. Pour x et y dans $B(0, r)$, on a

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\| &= \|f(x + y - x) - f(x)\| \\
&= \| \int_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x)dt\| \\
&= \| \int_0^1 (f'(x + t(y - x)) - Id)(y - x)dt + (y - x)\| \\
&\geq \|y - x\| - \int_0^1 \|(f'(x + t(y - x)) - Id)(y - x)\|dt \\
&\geq \|y - x\| - \int_0^1 \|(f'(x + t(y - x)) - Id)\|\|(y - x)\|dt \\
&\geq \|y - x\|(1 - \delta)
\end{aligned}$$

On en déduit que si x et y sont différents alors $f(x)$ et $f(y)$ aussi. C'est bien dire que f est injective sur $B(0, r)$. Du calcul précédent on déduite que si $\|x\| = r$ alors $\|f(x)\| \geq (1-\delta)r$.

Étape 3 : Si $\|y\| < (1 - \delta)r/4$ le minimum de $x \mapsto \|f(x) - y\|$ sur le compact $\bar{B}(0, r)$ n'est pas atteint sur le bord. En effet sur le bord on a $\|f(x) - y\| \geq (1 - \delta)r - (1 - \delta)r/4 = 3/4.(1 - \delta)r$ donc $\|f(x) - y\|(1 - \delta)r/4 \geq \|f(0) - y\|$. Le minimum est donc atteint à l'intérieur de la boule.
Étape 4 : Cela signifie que le gradient de la fonction $x \mapsto \|f(x) - y\|^2$ s'annule en un point x_0 de $B(0, r)$. Mais les coordonnées de ce gradient sont

$$2\langle f'(x_0)e_i, f(x_0) - y\rangle,$$

où les e_i désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comme $f'(x_0)$ est inversible (pourquoi ?) les vecteurs $f'(x_0)e_i$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Cela signifie donc que le vecteur $f(x_0) - y$ est orthogonal à tous les éléments d'une base. On en déduit que c'est le vecteur nul soit que $f(x_0) = y$. Posons $r' = (1-\delta)r/4$. On vient de montrer que l'image de la restriction de f à $B(0, r)$ contient $B(0, r')$. L'ensemble $B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r'))$ est donc un ouvert contenant 0 dont l'image contient $B(0, r')$ sur lequel f est injective. Elle est donc bijective de cet ensemble $B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r'))$ sur son image. Notons ϕ l'application réciproque.
Étape 5 : On montre que l'application réciproque définie sur $f(B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r')))$ est continue.
D'après le calcul mené plus haut si x et y sont dans $B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r'))$ alors

$$\|y - x\|(1 - \delta) \leq \|f(y) - f(x)\|,$$

alors, pour s et t dans $f(B(0, r) \cap f^{-1}(B(0, r')))$, on a

$$\|\phi(s) - \phi(t)\|(1 - \delta) \leq \|s - t\|.$$

Étape 6 : On montre que l'inverse de f est C^1.
Partons de l'égalité $f(\phi(x)) = x$ et écrivons que f est différentiable en x_0. On obtient

$$\begin{aligned} f(\phi(x_0) + (\phi(x) - \phi(x_0))) &= x \\ f(\phi(x_0)) + f'(\phi(x_0))((\phi(x) - \phi(x_0))) + \epsilon(\phi(x) - \phi(x_0))\|\phi(x) - \phi(x_0)\| &= x \\ x_0 + f'(\phi(x_0))((\phi(x) - \phi(x_0))) + \epsilon(\phi(x) - \phi(x_0))\|\phi(x) - \phi(x_0)\| &= x \\ f'(\phi(x_0))^{-1}(x - x_0) + \|\phi(x) - \phi(x_0)\| f'(\phi(x_0))^{-1}\epsilon(\phi(x) - \phi(x_0)) &= \phi(x) - \phi(x_0). \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $\|\phi(x) - \phi(x_0)\| \leq \|x - x_0\|/(1-\delta)$ et $f'(\phi(x_0))^{-1}$ est bornée sur $f(B(0,r) \cap f^{-1}(B(0,r')))$. On en déduit que $\|\phi(x) - \phi(x_0)\| f'(\phi(x_0))^{-1}\epsilon(\phi(x) - \phi(x_0))$ s'écrit $\|x - x_0\|\epsilon'(x - x_0)$ avec ϵ' tendant vers 0 en 0. L'égalité

$$\phi(x) = \phi(x_0) + f'(\phi(x_0))^{-1}(x - x_0) + \|x - x_0\|\epsilon'(x - x_0)$$

montre que ϕ est dérivable en x_0 de dérivée $f'(\phi(x_0))^{-1}$. Comme l'inversion de matrice est une application C^∞, que par hypothèse f' est continue et qu'on vu que ϕ est continue, l'application $x_0 \mapsto f'(\phi(x_0))^{-1}$ est continue. Autrement dit ϕ est C^1. $\square$

3.2 Fonctions implicites : cas $f(x\,,\,y) = 0$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère la courbe de niveau $\{f(x\,,\,y) = 0\} = L_0\,$.

Définition 3.4. *On dit que la fonction* $y = \varphi(x)$ *est* **définie implicitement par** $f(x\,,\,y) = 0$ *si* $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$*, c'est-à-dire si* $(x\,,\,\varphi(x)) \in L_0\,$.
Alors on dit que $y = \varphi(x)$ *est une* **fonction implicite** *de* $f(x\,,\,y) = 0$.

Exemple
$f(x\,,\,y) = \ln(xy) - \sin x \quad$ avec $xy > 0$
$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 1$

Dessins. Le cas du cercle. ? ? ? ?

Théorème 3.5. *(des fonctions implicites)*
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $(x_0\,,\,y_0)$ *un point tel que* $f(x_0\,,\,y_0) = 0$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) \neq 0$ *alors :*

(i) Il existe une fonction implicite $y = \varphi(x)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*, définie sur l'intervalle ouvert* $B(x_0\,,\,\varepsilon)$*, tel que* $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$ *et* $y_0 = \varphi(x_0)$.

(ii) La dérivée de φ *est donnée par* $\varphi'(x) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x))}$ *en tout point où* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x)) \neq 0$.

Démonstration C'est une conséquence du théorème d'inversion locale. Soit f une fonction C^1 de deux variables et (x_0, y_0) tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Considérons la fonction F définie par

$$F(x, y) = (x, f(x, y).$$

La matrice jacobienne de F est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas en (x_0, y_0). La matrice $F'(x_0, y_0)$ est donc inversible et d'après le théorème d'inversion locale, F est localement inversible en (x_0, y_0) : il existe $r > 0$ tel que F soit une bijection de la boule $B = B((x_0, y_0), r)$ sur son image et l'application inverse, appelons la G est C^1 sur l'ouvert $F(B)$. Écrivons $G(s, t) = (G_1(s, t), G_2(s, t))$ les coordonnées de G. Comme G est l'inverse de F on a, pour tout (s, t) dans $F(B)$ (en utilisant la définition de F) :

$$(s, t) = F(G_1(s, t), G_2(s, t)) = (G_1(s, t), f(G_1(s, t), G_2(s, t))).$$

On a donc les égalités : $G_1(s, t) = s$ et $f(s, G_2(s, t)) = t$. Les points (x, y) de B pour lesquels $f(x, y) = 0$ sont les points dont l'image par F est de la forme $(x, 0)$. Ce sont donc les points $G(x, 0)$ pour $(x, 0)$ dans $F(B)$, soit encore, d'après la forme de l'application G, les points $(x, G_2(x, 0))$ pour $(x, 0)$ dans $F(B)$. Or $F(B)$ est un ouvert contenant $(x_0, 0)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $(x, y) \in B$, l'équation $f(x, y) = 0$ équivaut à $y = G_2(x, 0)$. Il suffit d'écrire $\phi(x) = G_2(x, 0)$ pour voir qu'on a bien établi le résultat souhaité. $\square$

Exemple : étude au point $(1\,,\,1)$ de $f(x\,,\,y) = x^2\,y + 3y^3\,x^4 - 4$

3.3 Fonctions implicites : cas $f(x_1\,\ldots\,x_n) = 0$

Théorème 3.6. *Si $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \neq 0$ alors :*

(i) La fonction implicite $x_n = \varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1})$ existe sur une boule ouverte $B((x_{1,0}\,\ldots\,x_{n-1,0})\,,\,\varepsilon)$ et on a : $f(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1})) = 0$.

(ii) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}$$