Dérivées des fonctions de plusieurs variables (suite)

1 Théorème des accroissements finis

Théorème 1.1. *Soient* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, $x = (x_1 , \ldots , x_n)$, $h = (h_1 , \ldots , h_n)$. *Alors il existe* $\theta \in]0 , 1[$ *tel que* $f(x+h) - f(x) = \nabla f(x + \theta h) \cdot h$.

Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et fonctions

2 Courbes dans le plan

2.1 Définition, exemples

On appelle courbe dans le plan une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Une telle courbe est définie par ses applications coordonnées dans le repère $((1,0),(0,1))$:

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Si on change de repère l'écriture de la courbe change. Nous n'étudierons pas les effets de tels changements de repère sur l'expression de la courbe.

Remarque : on appelle généralement courbe l'image de l'application plutôt que l'application elle-même.

2.2 Longueur de courbes

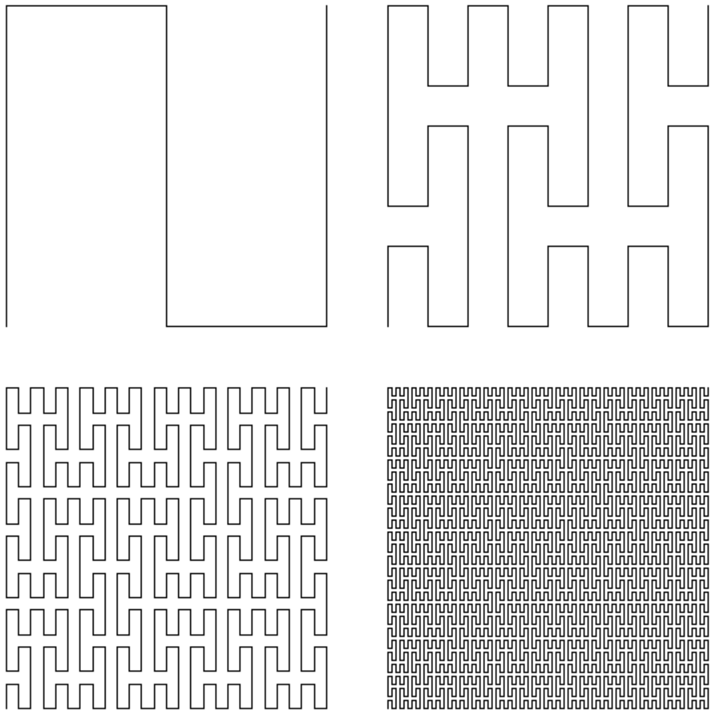
Supposons que les deux applications x et y soit C^1 et définie sur $[0,1]$. On appelle longueur de la courbe définie par x et y la quantité

$$l(\mathcal{C}) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

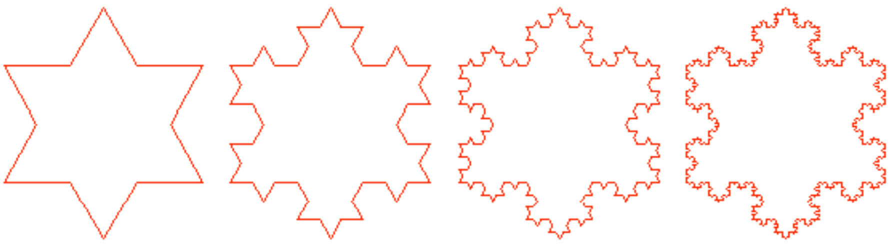
Lorsque les fonctions ne sont pas dérivables il n'est pas toujours possible de définir la longueur de la courbe. En d'autres termes la courbe peut être de longueur infinie.

2.3 La courbe de Peano, la courbe de Koch

Peano a ainsi montré que l'on peut très bien voir le carré unité comme une courbe. Il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$.

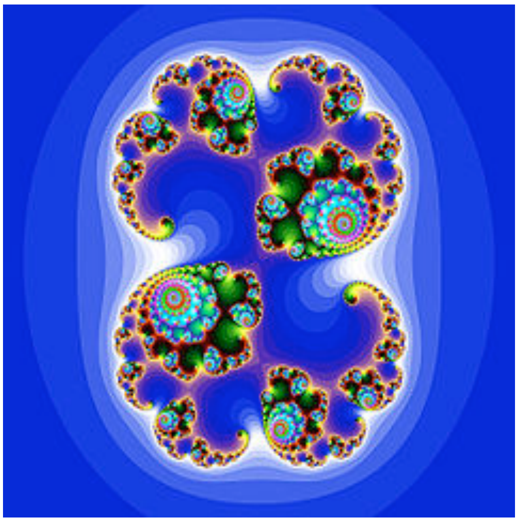


Mais il existe aussi des courbes de longueur infinie mais d'aire nulle. Les plus célèbres de ces courbes présentent des propriétés d'autosimilarité. Ce sont ce qu'on appelle des courbes fractales.



Ce type de courbe a été longtemps considéré comme des objets étranges et peu naturels. Ce n'est plus le cas aujourd'hui. Les trajectoires de ce qu'on appelle le mouvement brownien, par exemple, sont des courbes sans tangente, de longueur infinie.

Les objets fractales font l'objet de nombreuses recherches.



Remarquons que si la courbe est C^1 alors elle est négligeable dans le plan. Autrement dit son aire est nulle ou encore pour tout $\epsilon > 0$ on peut la recouvrir par une réunion finie de petits disques dont la somme des aires est inférieure à ϵ. Montrons-le. Donnons-nous une fonction C^1

$$f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Comme les dérivées x' et y' sont continues sur le segment $[0,1]$ elles sont toutes les deux bornées. Soit M tel que $|x'(t)|$ et $|y'(t)|$ soient toutes deux inférieures à M pour tout t dans $[0,1]$. Le théorème des accroissements finis assure alors que pour tous $t, t' \in [0,1]$ on a

$$|x(t) - x(t')| \leq M|t - t'|, \quad |y(t) - y(t')| \leq M|t - t'|.$$

La distance entre l'image de t et celle de t' est donc inférieure à $\sqrt{2}M|t - t'|$.

Soit $\epsilon > 0$.

Prenons $k = E(\sqrt{2}M)/\epsilon + 1$ points sur $[0,1]$ espacés de moins de $\epsilon/\sqrt{2}M$: $t_0, ..., t_k$. Alors pour tout t dans $[0,1]$ le point $f(t)$ appartient à la réunion des disques de rayons $M.\epsilon/\sqrt{2}M = \epsilon/\sqrt{2}$ centrés en les points t_i. Cette réunion a une aire inférieure à $k.\pi\epsilon^2/2 = (\sqrt{2}M/\epsilon + 1)\pi\epsilon^2/2 \leq \pi M\epsilon$.

L'exemple de la courbe de Peano montre que si f est supposée seulement continue ce résultat n'est plus vrai.

3 Courbes paramétrées

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s'appelle fonction vectorielle ou courbe paramétrée.*

On exprime $F(t)$ à l'aide des fonctions coordonnées $F(t) = (f_1(t)\,,\, \dots\,,\, f_n(t))$.

Exemples

(1) $F(t) = (x_0 + ta\,,\, y_0 + tb\,,\, z_0 + tc)$

(2) $F(t) = (R\cos t\,,\, R\sin t)$

Définition 3.2. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

(1) $\lim_{t\to p} F(t) = \left(\lim_{t\to p} f_1(t)\,,\, \dots\,,\, \lim_{t\to p} f_n(t)\right)$

(2) $F'(t) = (f_1'(t)\,,\, \dots\,,\, f_n'(t))$

(3) $\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\,,\, \dots\,,\, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

Théorème 3.3. *Si $F\,,\, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors :*

(i) $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(ii) $(uF)'(t) = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$

(iii) $(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$

(iv) $(F \wedge G)'(t) = F'(t) \wedge G(t) + F(t) \wedge G'(t)$ *si $n = 3$*

(v) $F(u(t))' = F'(u(t)) \cdot u'(t)$

Corollaire 3.4. *Si une courbe paramétrée $F(t)$ est dérivable et si $\|F(t)\|$ est constante alors $F(t) \cdot F'(t) = 0$. (Autrement dit, si la courbe $F(t)$ est sur une sphère centrée en 0, alors $F(t)$ et $F'(t)$ sont orthogonaux).*

Exemple

$F(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$

Définition 3.5. *Si $F(t) = (x_1(t)\,,\, \dots\,,\, x_n(t))$ est dérivable et $F'(t) \neq 0$, on voit que* $F'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Définition 3.6. *Soit C la courbe tracée par F. Si $F'(t_0) \neq 0$ alors*
la droite passant par $F(t_0)$ de vecteur directeur $F'(t_0)$ est appelée **droite tangente** *à $F'(t_0)$ est un vecteur tangent à C en $F(t_0)$.*

Nous allons maintenant définir la longueur d'un arc de courbe régulière ; donner une justification de la formule donnée plus haut pour les courbes planes.

Soit F une fonction C^1 définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On cherche à approcher l'arc par une ligne brisée comportant de plus en plus de segments. Soit n un entier naturel. Pour k variant de 0 à n posons : $t_i = a + k(b - a)/n$, $x_i = F(t_i)$.

Calculons la longueur de la courbe brisée dont les sommets sont les points x_i. Grâce à la définition de la dérivée on a :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= F(t_i + (b-a)/n) - F(t_i) \\ &= F'(t_i)(b-a)/n + \epsilon(1/n)/n \end{aligned}$$

La longueur du segment $[x_i, x_{i+1}]$ est donc très proche de $\|F'(t_i)(b-a)/n\|$:

$$|\|x_{i+1} - x_i\| - \|F'(t_i)(b-a)/n\|| \leq \|\epsilon(1/n)\|/n.$$

On obtient donc une estimation de la longueur de la courbe brisée :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| - \sum_{i=0}^{n-1} \|F'(t_i)(b-a)/n\|| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\|x_{i+1} - x_i\| - \|F'(t_i)(b-a)/n\|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\epsilon(1/n)\|/n \\ &\leq \|\epsilon(1/n)\|. \end{aligned}$$

La différence entre la longueur de la courbe brisée et la somme $\sum_{i=0}^{n-1} \|F'(t_i)(b-a)/n\||$ tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini. Mais lorsque n tend vers l'infini la somme $\sum_{i=0}^{n-1} \|F'(t_i)(b-a)/n\||$ converge vers l'intégrale $\int_a^b \|F'(t)\||dt$. C'est donc cette quantité qu'on appelle longueur de l'arc de courbe défini par F.

Définition 3.7. *La* **longueur de l'arc** *de la courbe $F(t)$ entre $t = a$ et $t = b$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|\, dt$.*

La longueur ainsi définie ne dépend pas du paramétrage choisi. Montrons-le.

Cas $n = 3$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.

On suppose que les dérivées $\gamma^{(n)}$ existent pour tout n et que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t.

On dit que γ est **régulière**.

Alors :

(i) $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t.

(ii) $\dfrac{dS}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$

De ce qui précède découle :

Définition 3.8. *$t \to s(t)$ admet une fonction réciproque $s \to t(s)$ avec $t'(s) = \dfrac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$. On note $\Gamma(s)$ la fonction $\Gamma(s) = \gamma(t(s))$ et on l'appelle* **paramétrisation unitaire** *de γ car on a $\|\Gamma'(s)\| = 1$.*

Définition 3.9. *La courbure de* $\Gamma(s)$ *est donnée par* $\rho(s) = \|\Gamma''(s)\|$.

Proposition 3.10. *Si* γ *n'est pas une paramétrisation unitaire alors la* **courbure** *est donnée par* $\rho(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

3.2 Quelques exemples

Nous n'avons malheureusement pas le temps à consacrer à l'étude des courbes paramétrées. Quelques exemples :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Clothoïde
http://fr.wikipedia.org/wiki/Cycloïde
http://www.mathcurve.com