Intégration (suite)

0.1 Intégration sur les régions bornées de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est non rectangulaire.
On considère un rectangle R tel que $D \subset R$ et on définit $\overline{f}$ sur R avec :

$$\overline{f}(x\,,\,y) = \begin{cases} f(x\,,\,y) & \text{si } (x\,,\,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x\,,\,y) \notin D \end{cases}$$

Avec les notations précédentes on pose, si cela a un sens :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_R \overline{f}(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

On peut se ramener à deux types de domaine D :

Type 1 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{array} \right\}$ où g_1 et g_2 sont continues.

Type 2 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \end{array} \right\}$.

Théorème 0.1. *(Fubini)*

a) Si f est continue sur D de type 1, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x\,,\,y)\,dy \right) dx$$

b) Si f est continue sur D de type 2, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemples

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$: D est la région entre les deux paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ sur le triangle $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{array} \right\}$.

Définition 0.2. *Si D est un domaine borné, on appelle* **aire de** D *: aire$(D) = \displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$.*

0.2 Intégrale double et changement de variables

Rappel à une variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

où g est bijection de $[c\,,\,d]$ sur $[a\,,\,b]$.
Démonstration : Soit F une primitive de f.

On a d'une part

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt,$$

d'autre part

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (F \circ g)'(s)ds = \int_a^b F'(g(s))g'(s)ds = \int_a^b f(g(s))g'(s)ds.$$

□

Théorème 0.3. *Si $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$:*

$$\iint_{G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_S f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))\;|\det Jac(G(u\,,\,v))|\;du\,dv$$

avec $Jac(G(u\,,\,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$

Une idée de démonstration de ce théorème est donnée en annexe.

Cas des coordonnées polaires
$x = x(r\,,\,\theta) = r\cos\theta$
$y = y(r\,,\,\theta) = r\sin\theta$

$$J(G) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où $\displaystyle\iint_{R=G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_S f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

Exemples

(1) Calcul de l'aire d'un disque.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{(-\,x^2-y^2)}\,dx\,dy$ où D est le disque unité.

(3) $\displaystyle\int_{-\,\infty}^{+\,\infty} e^{-\,x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$

(4) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/y+x}\,dx\,dy$ où $R = \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array} \right.$ avec $x + y \leqslant 2$.

0.3 Intégrales triples

$\iiint_R f(x\,,\,y\,,\,z)\,dx\,dy\,dz$

Exemples

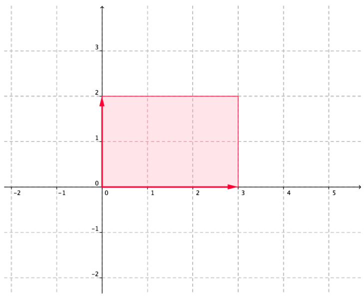
Changement de variables Connaître et savoir retrouver le jacobien du passage en coordonnées sphériques : si $\psi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi))$ et ψ est une bijection de D sur son image, on a

$$\iiint_{\psi(D)} f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_D f(\psi(\rho,\theta,\phi))\rho^2\sin(\phi)\ d\rho d\theta d\phi.$$

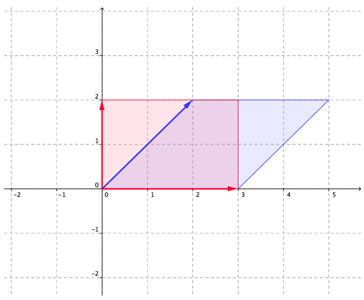
1 Annexe : Une démonstration de la formule de changement de variables

1.1 Le déterminant est (presque) un volume

Cas de la dimension 2. L'aire d'un rectangle est donné par le produit des longueurs de ses côtés.



Si on déforme le rectangle rouge en un parallélogramme bleu en ajoutant au vecteur vertical un multiple du vecteur horizontal l'aire n'est pas modifié.



Les vecteurs définissant les côtés du rectangle dans le premier exemple sont

$$(3,0) \text{ et } (0,2).$$

L'aire du rectangle est 3×2 qui est aussi égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

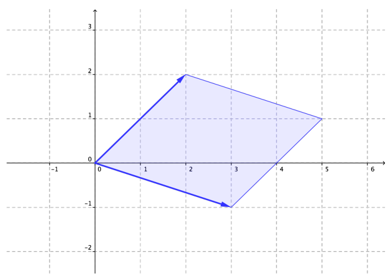
Les vecteurs définissant les côtés du parallélogramme dans le deuxième exemple sont

$$(3,0) \text{ et } (2,2).$$

L'aire du rectangle est 3×2 qui est aussi égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Cela n'est pas très surprenant puisque le déterminant est défini de telle sorte qu'il n'est pas modifié si on ajoute à l'un des vecteurs un produit du deuxième (ici on a ajouté au deuxième vecteur $2/3$ du premier). Si on change un vecteur en son opposé le déterminant est changé en son opposé alors que l'aire n'est pas modifiée, de même si on échange les deux vecteurs. On obtient ainsi une formule pour l'aire d'un parallélogramme dont l'un des sommets est $(0,0)$ et qui est construit à partir de deux vecteurs : c'est la valeur absolue du déterminant de la matrice 2×2 formée des deux vecteurs. Dans l'exemple suivant



l'aire du parallélogramme est

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Cette propriété est encore vraie en toute dimension à condition de remplacer les parallélogrammes par des figures de dimension plus grande (des parallélépipèdes en dimension 3). Le volume d'un parallélépipède dont l'un des sommets est $(0,0,0)$ et qui est construit à partir de trois vecteurs est la valeur absolue du déterminant de la matrice 3×3 formée des trois vecteurs.

Soit à calculer le volume d'un parallélépipède. La formule géométrique est : aire d'une base multipliée par la hauteur correspondante. Il est possible de modifier le parallélépipède en ajoutant une combinaison des vecteurs de la base pour obtenir un troisième vecteur orthogonal à la base. Cette opération ne modifie pas la base ni la hauteur : le volume est préservé. On sait que cette opération ne modifie pas non plus le déterminant de la matrice des trois vecteurs. Il est ensuite possible de modifier l'un des vecteurs de la base en lui ajoutant un multiple de l'autre de façon à obtenir deux vecteurs orthogonaux (une base rectangulaire). Ce faisant on a conservé l'aire de la base et, évidemment, la hauteur du parallélépipède. On a ainsi obtenu un pavé de même volume que le parallélépipède de départ. Les trois vecteurs orthogonaux le définissant forment une matrice obtenue à partir de la première matrice par ajout à certains vecteurs de combinaisons linéaires des autres. Ces opérations laissent le déterminant inchangé. Le déterminant de cette matrice est donc celui de la première matrice. Le volume d'un pavé est le produit des longueurs de ses côtés. Pour montrer ce que nous voulons il nous reste donc à montrer que le déterminant d'une matrice formée de trois vecteurs orthogonaux deux à deux est égal, au signe près, au produit des normes de ces vecteurs. Soit A une matrice formée de trois vecteurs (V_1, V_2, V_3) orthogonaux. Cette matrice s'écrit comme le produit :

$$A = \begin{pmatrix} \|V_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|V_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|V_3\| \end{pmatrix} .(\frac{V_1}{\|V_1\|}, \frac{V_2}{\|V_2\|}, \frac{V_3}{\|V_3\|}).$$

La deuxième matrice (une matrice 3×3 formée de trois vecteurs colonne) a ses colonnes orthogonales et de normes 1. C'est donc une matrice orthogonale, c'est-à-dire une matrice dont l'inverse est la transposée. Appelons B cette matrice. De l'égalité $B.{}^tB = Id$ on déduit $det(B)^2 = det(Id) = 1$. Autrement dit on a $det(B) = \pm 1$. Cela signifie que l'on a

$$det(A) = \pm \|V_1\| \|V_2\| \|V_3\|$$

ce qu'on voulait démontrer.

1.2 Volume de l'image d'un compact par une application linéaire

Le cas d'une application linéaire de déterminant nul.

Le cas de l'image d'un cube, d'une réunion de cubes.

Le cas d'un compact intégrable (que l'on peut coincer entre des réunions de cubes de volumes aussi proche que l'on veut).

1.3 Démonstration de la formule

x_i est le centre du cube C_i. Le cube est de côté $1/n$. Il y a un nombre de tels cubes borné par n^d. La formule du changement de variable se déduit de la suite d'approximations suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(D)} f(x)dx &= \sum_i \int_{\phi(D)\cap\phi(C_i)} f(x)dx \\
&= \sum_i \int_{\phi(D\cap C_i)} f(x)dx \\
&\simeq \sum_i \int_{\phi_i(D\cap C_i)} f(x)dx \\
&\simeq \sum_i f(\phi(x_i)).vol(\phi_i(D\cap C_i)) \\
&\simeq \sum_i f(\phi(x_i)).|det(\phi'(x_i)|vol(D\cap C_i)) \\
&\simeq \int_D f(\phi(x)).|det(\phi'(x)|dx.
\end{aligned}$$

Justifions rapidement chacune des égalités ou presque égalités apparaissant ci-dessus.
La première est un simple découpage de l'ensemble d'intégration.
La deuxième provient de l'égalité $\phi(D)\cap\phi(C_i) = \phi(D\cap C_i)$ vraie car ϕ est injective.
La fonction ϕ_i est définie par

$$\phi_i(x) = \phi(x_i) + \phi'(x_i)(x - x_i).$$

Comme ϕ est C^2 la différence entre $\phi(x)$ et $\phi_i(x)$ est majorée par une constante fois $1/n^2$.
La différence entre les intégrales

$$\int_{\phi(D\cap C_i)} f(x)dx \text{ et } \int_{\phi_i(D\cap C_i)} f(x)dx$$

est donc de l'ordre $1/n^2 * (1/n)^d = 1/n^{d+1}$. On somme donc n^d fois une quantité d'ordre $1/n^{d+1}$. Lorsque n est grand la différence est bien négligeable.