L'espace $\mathbb{R}^n$

0.1 Produit scalaire, norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 0.1. *Si $x = (x_1 \ldots x_n)$ et $y = (y_1 \ldots y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur* **produit scalaire** *par :*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Définition 0.2. *On appelle* **norme** *de x (ou longueur) $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ et la* **distance** *entre deux vecteurs $d(x\,,\,y) = \|x - y\|$.*

Proposition 0.3. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(4) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ *avec* $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

Théorème 0.4. *Le produit scalaire vérifie l'***inégalité de Cauchy-Schwarz** $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \, \|y\|^2$ *avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.*

Démonstration Je vais donner deux arguments aboutissant à l'inégalité de Cauchy-Schwarz [1].

Soient x et y deux vecteurs et λ un nombre réel. Le nombre $\langle \lambda x + y, \langle \lambda x + y \rangle$ est positif ou nul. On peut développer ce produit scalaire en appliquant les propriétés de linéarité. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle & = & \langle \lambda x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ & = & \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ & = & \lambda \langle x, \lambda x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle \\ & = & \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ & = & \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \end{array}$$

On obtient donc un polynôme de degré 2 en λ qui est positif ou nul pour tout λ. Cela signifie que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Autrement dit on a

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle.$$

Dire que ce discriminant est nul est équivalent à dire qu'il existe λ pour lequel le polynôme est nul ou encore qu'il existe λ pour lequel $\|\lambda x + y\|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $\lambda x + y = 0$.

1. ou inégalité de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz

Autrement dit l'égalité ne peut être vérifiée que dans les cas où x et y sont colinéaires. On vérifie facilement que l'égalité est satisfaite lorsque x et y sont colinéaires (on a donc l'équivalence). $\square$

La démonstration proposée ci-dessus a l'avantage de s'adapter à d'autres cadres. Par exemple, on peut montrer de cette façon que si f et g sont deux fonctions continues à valeurs réelles sur $[a,b]$ (a et b étant deux nombres réels tels que $a<b$) alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Voici une autre manière de voir les choses (certaines affirmations ne seront peut-être justifiées que dans quelques temps en AL2). On utilise l'écriture matricielle du produit scalaire. Prenons deux vecteurs x et y. Leur produit scalaire s'écrit $\langle x,y\rangle = {}^t xy$. Si on multiplie ces deux vecteurs par une matrice orthogonale A on a :

$$\langle Ax,Ay\rangle = {}^t(A)xAy = {}^t x {}^t A A y = {}^t xy = \langle x,y\rangle.$$

Autrement dit le produit scalaire n'est pas changé si on multiplie les deux vecteurs par une matrice orthogonale. Il existe une matrice orthogonale A qui envoie x sur $\|x\|e_1$ où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique. On a alors :

$$\langle x,y\rangle = \langle Ax,Ay\rangle = \langle \|x\|e_1, Ay\rangle = \|x\|\langle e_1, Ay\rangle.$$

La première coordonnée de Ay est inférieure à la norme de y. Pourquoi ? La somme des coordonnées de Ay au carré vaut la norme de Ay au carré c'est-à-dire $\|Ay\|^2 = \|y\|^2$. Mais la somme des carrés des coordonnées est supérieure au carré de la première d'entre elles. Finalement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ est une conséquence du fait qu'on peut construire une matrice orthogonale dont la première ligne est un vecteur de norme 1 arbitraire(ce qui revient à dire qu'on peut compléter une famille d'un vecteur de norme 1 en une base orthonormée). $\square$

Donnons une autre façon de voir les choses : l'identité de Lagrange

$$(\sum_{i=1}^n x_iy_i)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$$

s'écrit ici

$$\langle x,y\rangle^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$$

et donne donc une justification à notre énoncé (la somme $\sum_{1\leq i<j\leq n}^n (x_iy_j - x_jy_i)^2$ est

positive ou nulle). Établissons l'identité de Lagrange.

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i y_i x_j y_j + \sum_{1\leq j<i\leq n} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2] - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2
\end{aligned}$$

□

Théorème 0.5. *La norme définie précédemment s'appelle* **norme euclidienne** *et vérifie :*

(i) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

(ii) $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$

(iii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\ \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Démonstration Si $\|x\| = 0$ alors la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ vaut 0. Comme tous les carrés sont positifs ou nuls, pour que leur somme soit nulle il faut qu'il soient tous nuls, autrement dit que tous les x_i soient nuls ce qui signifie bien que $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $\|x\| = 0$. On a

$$\|\alpha\, x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha^2\ \|x\|^2.$$

En prenant la racine carrée on obtient

$$\|\alpha\, x\| = \sqrt{\|\alpha\, x\|^2} = \sqrt{\alpha^2\ \|x\|^2} = \sqrt{\alpha^2}\ \sqrt{\|x\|^2} = |\alpha|\ \|x\|.$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

L'inégalité de Cauchy Schwarz permet aussi de définir l'angle géométrique entre deux vecteurs : comme $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$, si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors le quotient $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ est un nombre compris entre -1 et 1.

Définition 0.6. *L'***angle** *entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0\,,\,\pi]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$.*

Définition 0.7. *x et y de $\mathbb{R}^n$ sont dits* **orthogonaux** *lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 0.8. *(plan dans $\mathbb{R}^3$)*
Soient $A = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $N = (a\,,\,b\,,\,c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{x \in \mathbb{R}^3/(x - A)\cdot N = 0\}$.