Exercice
Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,1)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \exp(x).\ln(1+x^2+y^2).$$

Réponse
Il faut calculer les valeurs en (0,1) de la fonction, de son gradient et de sa hessienne.
Valeur de la fonction en $(0,1)$

$$f(0,1) = \ln(2).$$

Valeur du gradient en $(0,1)$

$$Gradf(x,y) = \left(\exp(x)\left[\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2x}{1+x^2+y^2}\right], \exp(x)\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right),$$

donc

$$Gradf(0,1) = (\ln(2), 1).$$

Valeur de la hessienne en $(0,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \exp(x)\left[\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2x}{1+x^2+y^2}\right] + \exp(x)\left[\frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{2(1+x^2+y^2)-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \exp(x)\left[\frac{2y}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \exp(x)\frac{2(1+x^2+y^2)-4y^2}{(1+x^2+y^2)^2},$$

d'où

$$Hessf(0,1) = \begin{pmatrix} \ln(2)+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le développement de Taylor de f en (0,1) est :

$$f(s, 1+t) = \ln(2) + \ln(2)s + t + \frac{\ln(2)+1}{2}s^2 + st + (s^2+t^2)\epsilon(s,t),$$

avec $\epsilon(s,t)$ tendant vers 0 quand s et t tendent vers 0.