Fonctions Optiques pour les Technologies de l'informatiON

Une analyse matricielle non perturbative de la constante de couplage entre guides d'onde monomodes planaires

Yann G. BOUCHER[(1)]

yann.boucher@enib.fr

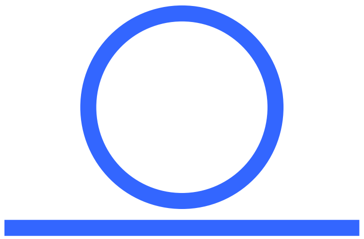
(1) Laboratoire FOTON (Équipe Systèmes Photoniques)

Plan de la présentation

1) Position du problème
2) Couplage d'ondes codirectionnel
   - Point de vue formel
   - Approche perturbative
   - Approche matricielle
   - Profil des modes
   - Constantes de couplage
3) Couplage pondéré
4) Conclusions et perspectives

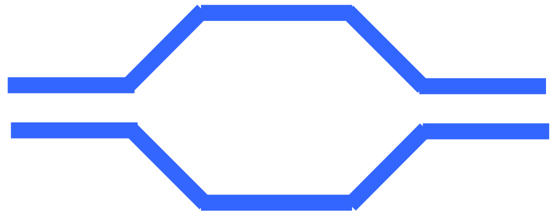
Coupleurs et couplage

Le couplage en optique intégrée



Résonateur

Répartiteur



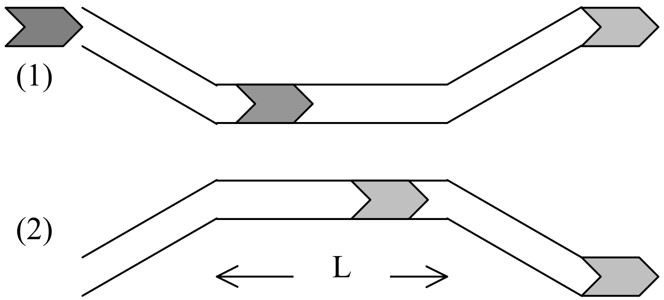
Interféromètre

Recouvrement par ondes évanescentes

Couplage d'ondes : approche formelle (1)

Opérateur d'évolution

Soit deux guides monomodes, de constantes de propagation (β_1, β_2).



$F(t)$ en $e^{+i\,\omega t}$

$$i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta+\Delta & \chi\\ \chi & \beta-\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$$

$$F_n(z)=A_n(z)\,e^{-i\,\beta z}$$

- *vecteur d'onde moyen :* $\beta=(\beta_1+\beta_2)/2$
- *désaccord de phase :* $\Delta=(\beta_1-\beta_2)/2$
- *constante de couplage :* χ (réel positif)

$$i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta & \chi\\ \chi & -\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\Rightarrow-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi^2+\Delta^2 & 0\\ 0 & \chi^2+\Delta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2}+\Gamma^2 A_n=0}\qquad(\Gamma^2=\chi^2+\Delta^2)$$

Couplage d'ondes : approche formelle (2)

Enveloppes lentement variables

Expression générale :

$$A_1(z) = a_1 \cos(\Gamma z) + b_1 \sin(\Gamma z)$$
$$A_2(z) = a_2 \cos(\Gamma z) + b_2 \sin(\Gamma z)$$

Conditions aux limites : en $z = 0$

$$A_1(0) = A_{10} = a_1, \qquad i\,(dA_1/dz)_{(z=0)} = i\,\Gamma b_1 = \Delta\, A_{10} + \chi\, A_{20}$$
$$A_2(0) = A_{20} = a_2, \qquad i\,(dA_2/dz)_{(z=0)} = i\,\Gamma b_2 = \chi\, A_{10} - \Delta\, A_{20}$$

Tout calcul fait, au bout d'une distance z :

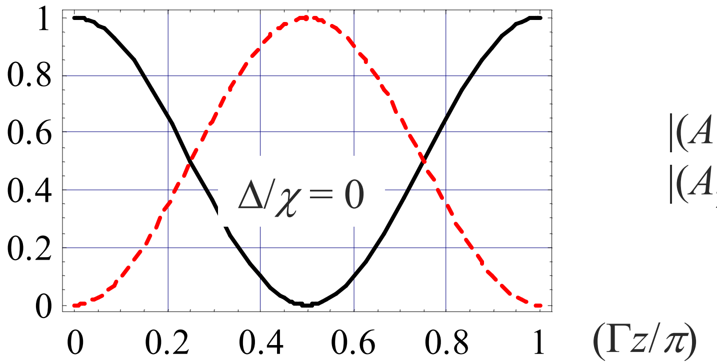
$$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma z) - i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma z) & -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma z) \\ -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma z) & \cos(\Gamma z) + i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix}$$

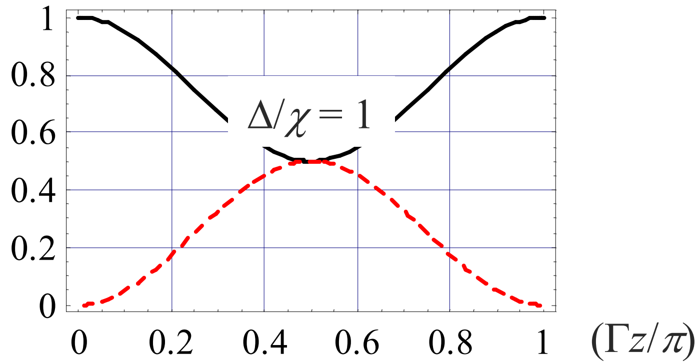
Couplage d’ondes : approche formelle (3)

Transfert d’énergie

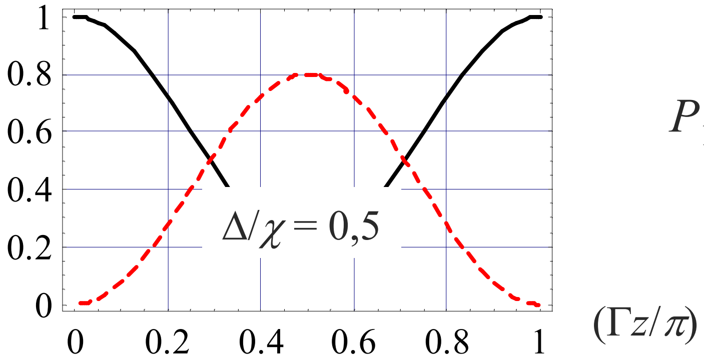
Conditions aux limites : $A_1(0) = A_{10}$, $A_2(0) = 0$; $\Gamma = [\chi^2+\Delta^2]^{1/2}$.

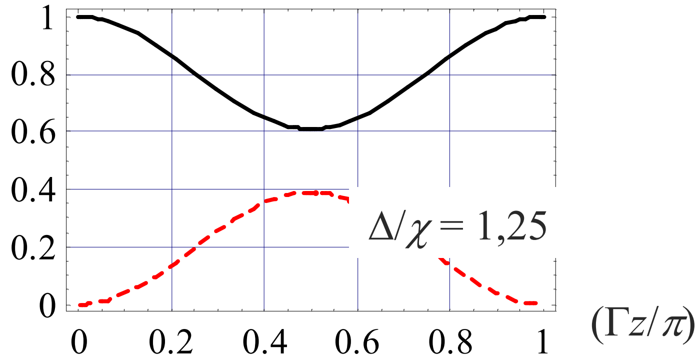
$$A_1(z) = A_{10} \times [\ \cos(\Gamma z) - i\ (\Delta/\Gamma)\sin(\Gamma z)\ ],$$
$$A_2(z) = A_{10} \times [\ - i\ (\chi/\Gamma)\sin(\Gamma z)\ ].$$





$|(A_1/A_{10})|^2$ (——),
$|(A_2/A_{10})|^2$ (– –)





$P_1 + P_2 = \text{cte}$

Couplage d'ondes : approche formelle (4)

Matrice de type Jones

Connecte les champs entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$:

- enveloppes lentement variables (A_n) :

$$\begin{pmatrix} A_{1L} \\ A_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma L) & -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma L) \\ -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix}$$

- avec les phases (F_n) :

$$\begin{pmatrix} F_{1L} \\ F_{2L} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-i\,\beta L} \begin{pmatrix} \cos(\Gamma L) - i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma L) & -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma L) \\ -i\dfrac{\chi}{\Gamma}\sin(\Gamma L) & \cos(\Gamma L) + i\dfrac{\Delta}{\Gamma}\sin(\Gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix}$$

Analogie atomique

Système à 2 niveaux :

$H_0\,|\varphi_1\rangle = E_1\,|\varphi_1\rangle$,
$H_0\,|\varphi_2\rangle = E_2\,|\varphi_2\rangle$,
$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$.

Hamiltonien non perturbé

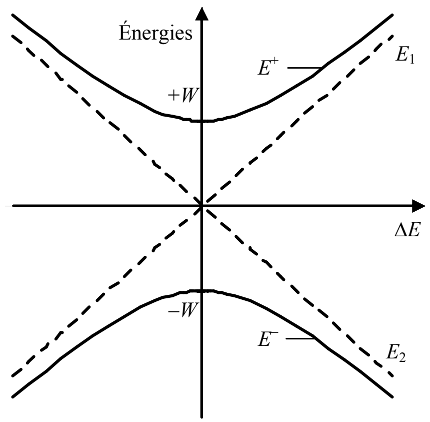
$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Hamiltonien perturbé

$$H = \begin{pmatrix} E_1' & W \\ W & E_2' \end{pmatrix}$$

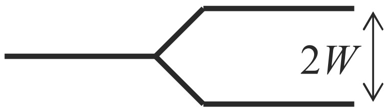
Énergie moyenne : $E = (E_1' + E_2')/2$,
Écart d'énergie : $\Delta E = (E_1' - E_2')/2$
Valeurs propres : $E^{\pm} = E \pm [\Delta E^2 + W^2]^{1/2}$.
Vecteurs propres : $|\varphi^+\rangle = +\cos(\theta/2)\,|\varphi_1\rangle + \sin(\theta/2)\,|\varphi_2\rangle$,
$|\varphi^-\rangle = -\sin(\theta/2)\,|\varphi_1\rangle + \cos(\theta/2)\,|\varphi_2\rangle$,
$\mathrm{tg}(\theta) = W/\Delta E$, avec $\theta \in [0, \pi[$.

E^+ et E^- en fonction de ΔE.



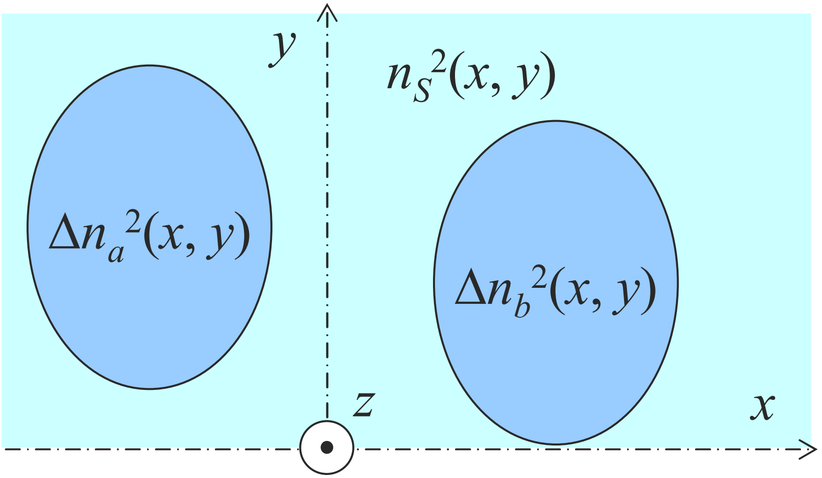
Sous l'effet du couplage non-diagonal, les niveaux perturbés « se repoussent » (formules de Rabi).

Si $E_1' = E_2'$, levée de dégénérescence :



Couplage d'ondes : approche perturbative (1)

D'après A. Yariv & P. Yeh, Optical Waves in Crystals, Wiley, 1984.



$$\mathbf{E} = A(z)\,\mathcal{E}_a(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\beta_a z} + B(z)\,\mathcal{E}_b(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\beta_b z}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial A}{\partial z} = \chi_{aa}\;A + \chi_{ab}\;B\,\mathrm{e}^{+i(\beta_a-\beta_b)z} \\ i\dfrac{\partial B}{\partial z} = \chi_{bb}\;B + \chi_{ba}\;A\,\mathrm{e}^{-i(\beta_a-\beta_b)z} \end{cases}$$

Constante de couplage (χ)

$$\begin{cases} \chi_{ab} = \dfrac{\omega\varepsilon_0}{4}\displaystyle\int \mathcal{E}_a{}^*.\Delta n_a^2(x,y)\,\mathcal{E}_b\,dx\,dy \\ \chi_{ba} = \dfrac{\omega\varepsilon_0}{4}\displaystyle\int \mathcal{E}_b{}^*.\Delta n_b^2(x,y)\,\mathcal{E}_a\,dx\,dy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_a & 0 \\ 0 & \beta_b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta_a' & \chi \\ \chi & \beta_b' \end{pmatrix}$$

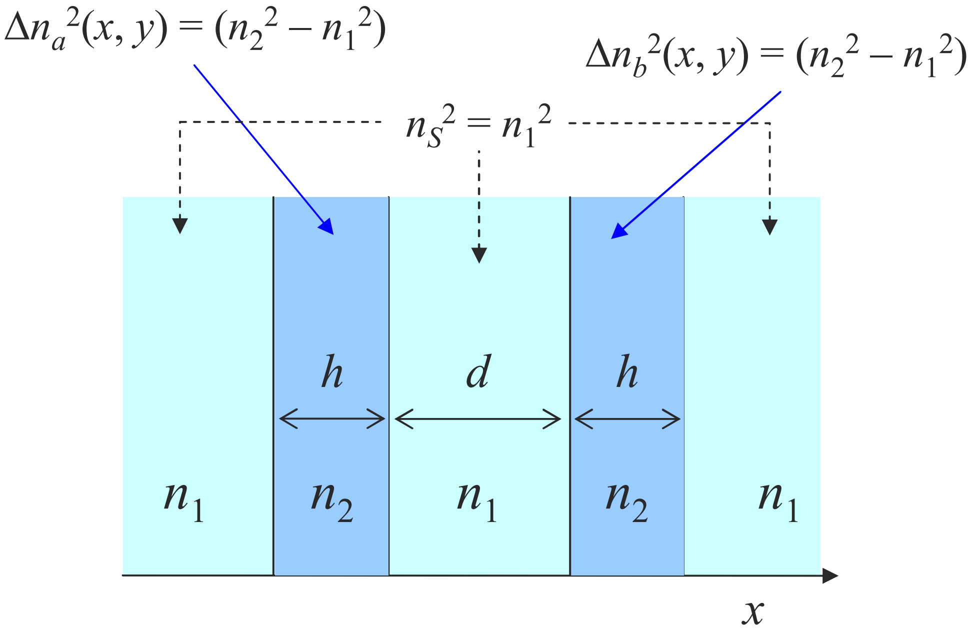
$$\begin{cases} \chi_{aa} = \dfrac{\omega\varepsilon_0}{4}\displaystyle\int \mathcal{E}_a{}^*.\Delta n_b^2(x,y)\,\mathcal{E}_a\,dx\,dy \\ \chi_{bb} = \dfrac{\omega\varepsilon_0}{4}\displaystyle\int \mathcal{E}_b{}^*.\Delta n_a^2(x,y)\,\mathcal{E}_b\,dx\,dy \end{cases}$$

Correctif diagonal ($\beta_u' - \beta_u$)

Couplage d'ondes : approche perturbative (2)

Dans le cas particulier des guides planaires, l'existence d'une solution analytique connue pour les modes guidés donne accès au calcul explicite des constantes de couplage

(Yariv & Yeh, *opus cité*, 1984)

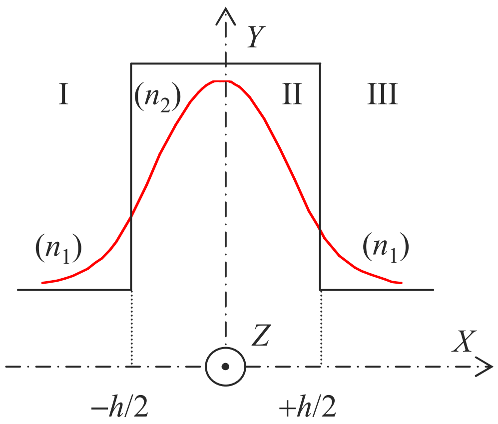


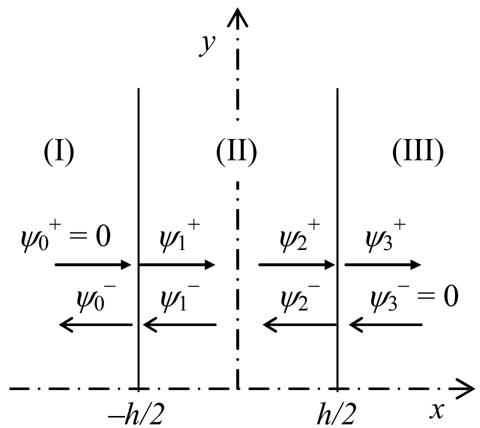
Le calcul perturbatif prédit une décroissance exponentielle de la constante de couplage χ en fonction de l'espacement *d*.

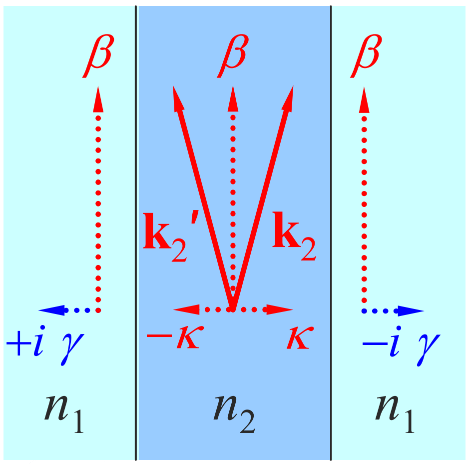
Mais une approche matricielle *non perturbative* est également accessible…

Couplage d'ondes : approche matricielle (1)

Le guide d'onde monomode isolé







Zone (1) : $\beta^2 - \gamma^2 = k_1^2 = \varepsilon_1\, \mu_1\, k_0^2$,

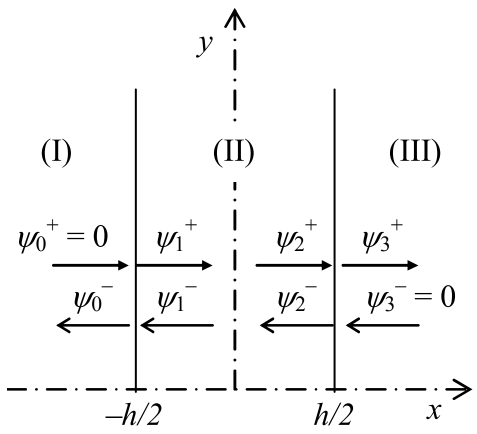
Zone (2) : $\beta^2 + \kappa^2 = k_2^2 = \varepsilon_2\, \mu_2\, k_0^2 > k_1^2$.

$$\forall\, p \in \{1, 2\},$$

$\psi_p^+ = A_p\, e^{-i\,\kappa x}$ et $\psi_p^- = B_p\, e^{+i\,\kappa x}$ si propagation,

$\psi_p^+ = A_p\, e^{-\gamma x}$ et $\psi_p^- = B_p\, e^{+\gamma x}$ si évanescence.

Matrice de transfert (TE/TM)



$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_3^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Résonance modale : } m_{11} = 0}$$

$$[\mathrm{m}] = \begin{pmatrix} \cos\kappa h - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\kappa h & -\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\kappa h \\ \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\kappa h & \cos\kappa h + \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\kappa h \end{pmatrix}$$

$$\rho_{TE} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\kappa}{\gamma} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\kappa h}{\gamma h}, \quad \rho_{TM} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\kappa}{\gamma} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\kappa h}{\gamma h}.$$

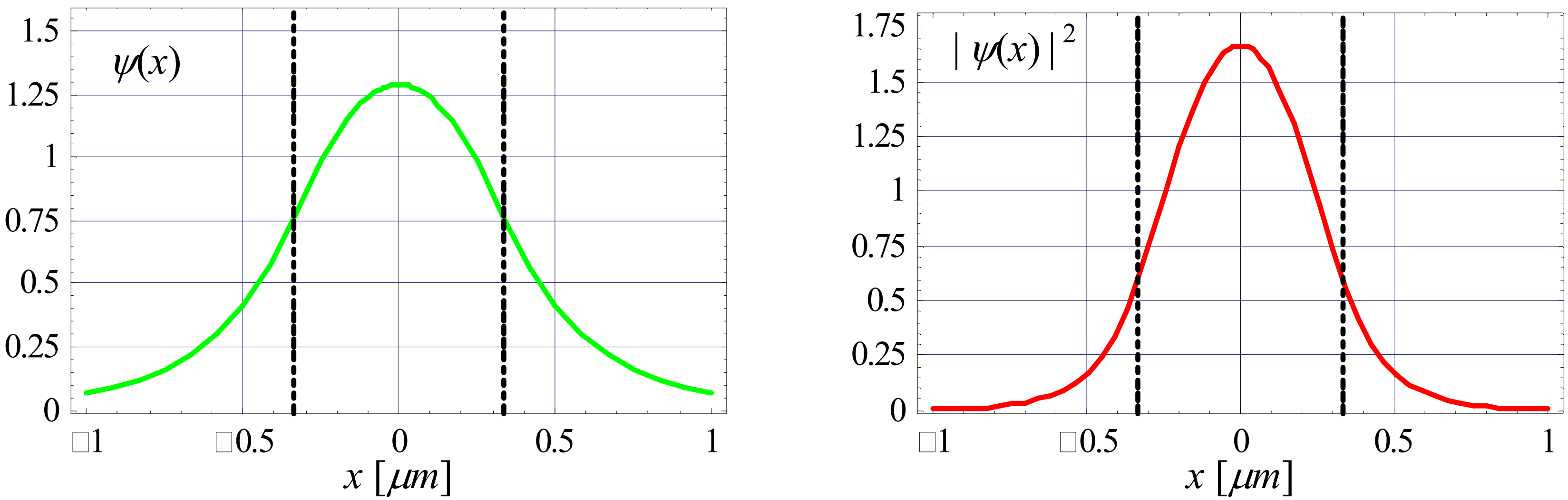
Profil du mode (TE)

$$V = k_0 h \, [\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1]^{1/2}$$

$$\lambda_0 = 1{,}5\ \mu\text{m} \; ; \; \varepsilon_1 = 1 \; ; \; \varepsilon_2 = 2{,}25 \; ; \; \mu_1 = \mu_2 = 1 \; ; \; h = 0{,}67\ \mu\text{m}$$

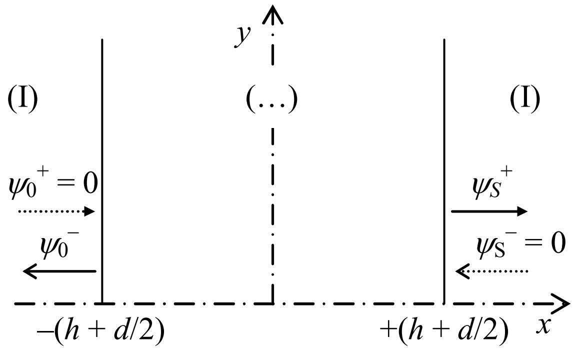
$$(V \approx \pi)$$

$$\int |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$



Couplage d'ondes : approche matricielle (4)

Le système symétrique couplé

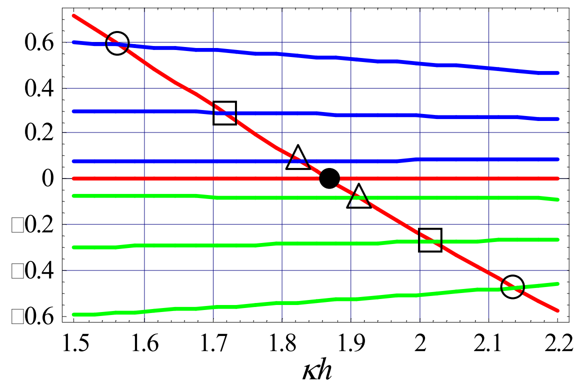


$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^- \end{pmatrix} = [\mathrm{M}] \begin{pmatrix} \psi_S^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{M}] = [\mathrm{m}] \begin{pmatrix} \exp(+\gamma d) & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma d) \end{pmatrix} [\mathrm{m}]$$

Résonance modale :

$$M_{11} = 0 \Leftrightarrow m_{11} = \pm m_{21}\, e^{-\gamma d}$$

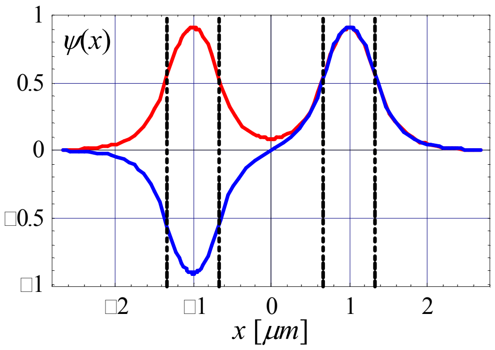


Représentation graphique pour diverses valeurs de d :
courbes m_{11}, $m_{21}\, e^{-\gamma d}$, $-m_{21}\, e^{-\gamma d}$ en fonction de κh ;
guide isolé [$m_{11} = 0$, ●],
$(d/h) = 1$ [△], $(d/h) = ½$ [□] et $(d/h) = ¼$ [○].

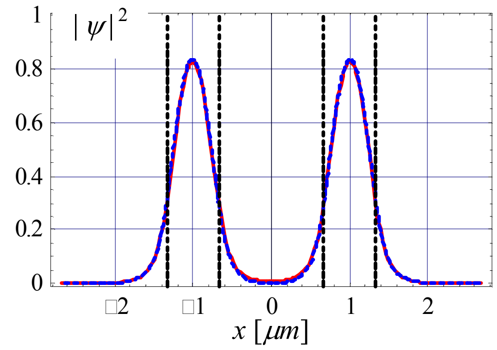
Puis $\kappa h \Rightarrow (\beta_e, \beta_o)$
$\Rightarrow \chi = (\beta_e - \beta_o)/2$

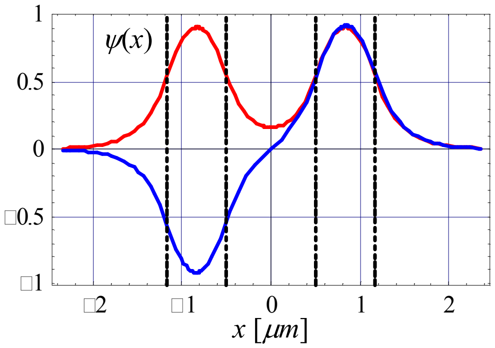
Couplage d’ondes : approche matricielle (5)

Profil des modes (1)

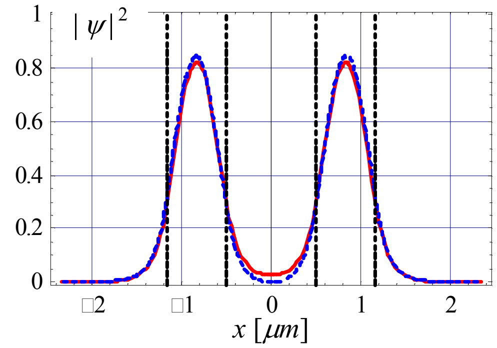


$d = 2h$



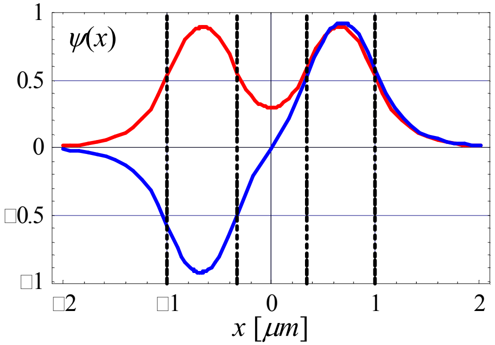


$d = 3h/2$

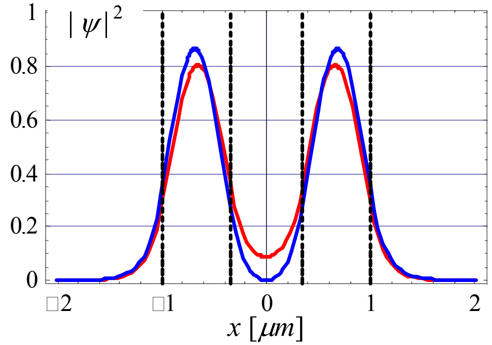


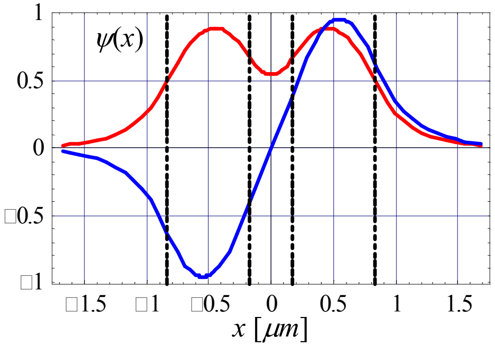
Couplage d’ondes : approche matricielle (5)

Profil des modes (2)

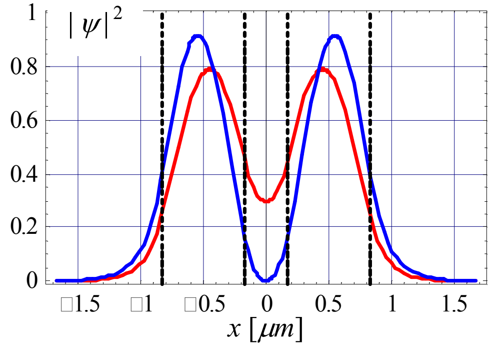


$d = h$

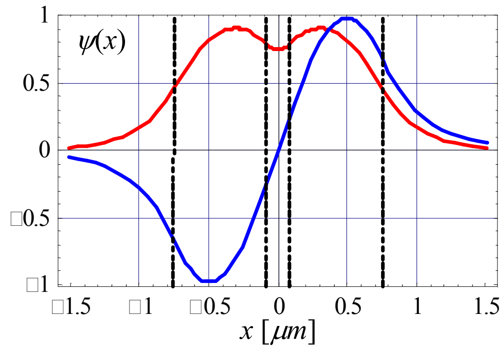




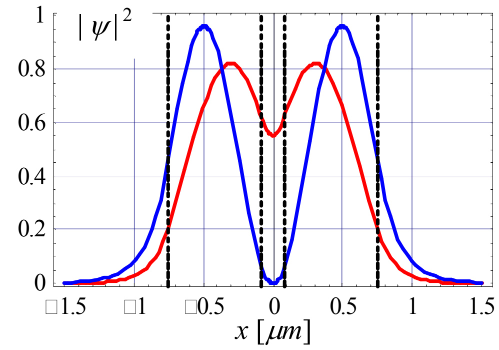
$d = h/2$

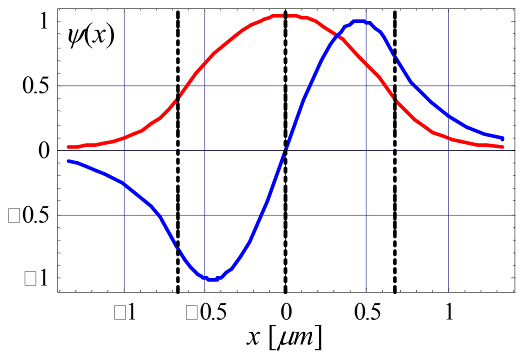


Profil des modes (3)

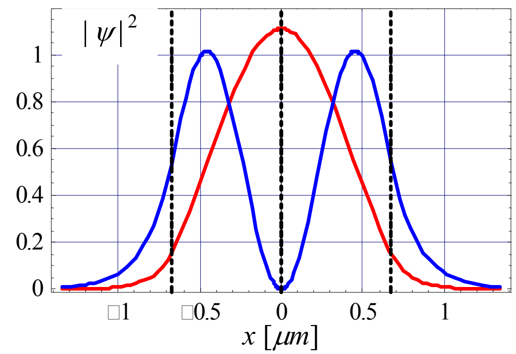


$d = h/4$





$d = 0$

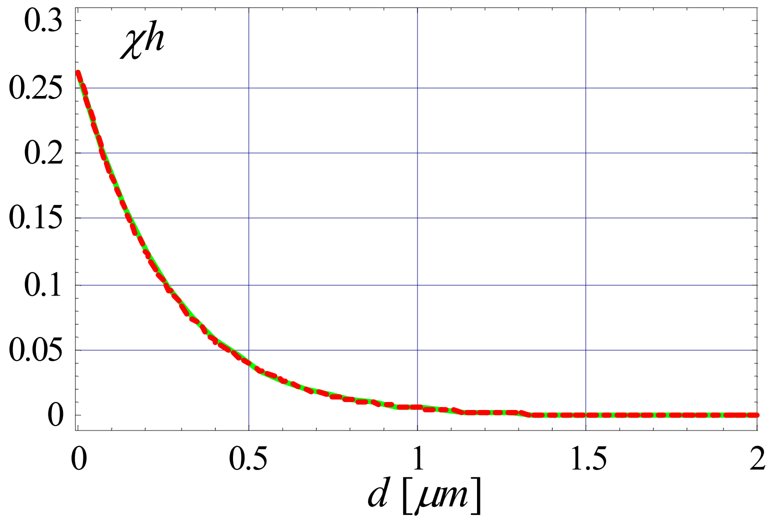


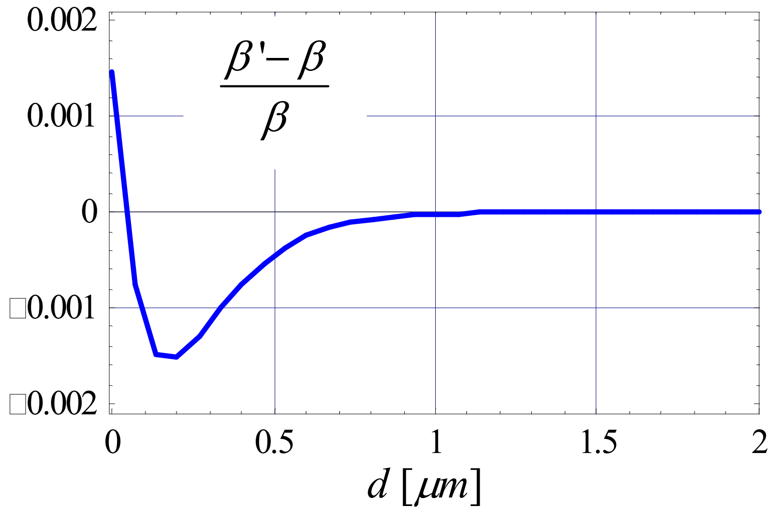
Couplage d'ondes : approche matricielle (7)

Constante de couplage et « correctif diagonal »

$$\chi = \frac{\beta_e - \beta_o}{2}$$

$$\beta' = \frac{\beta_e + \beta_o}{2}$$





La constante de couplage décroît avec d en

$\chi h = (\chi_0 h)\ \mathrm{e}^{-\gamma d}$.

Le correctif ne suit pas la tendance prévue par le calcul perturbatif.

Conclusions provisoires

1) La constante de couplage normalisée χh est nécessairement *bornée* par une valeur limite supérieure $\chi_0 h$, obtenue pour $d \to 0$.
2) Fondamentalement, tout guide d'onde planaire *bimode* est formellement assimilable à un système de deux guides d'ondes *monomodes* couplés.
3) Plus généralement, pour un état de polarisation donné, tout guide planaire *multimode* à N modes peut s'interpréter comme un système de N guides *monomodes* identiques couplés.
4) Avec un excellent degré d'approximation, la constante de couplage varie selon $\chi h = (\chi_0 h)\, e^{-\gamma d}$, confirmant l'approche perturbative, et ouvrant ainsi la voie à l'étude du couplage non uniforme selon Oz.
5) La contribution *diagonale* du couplage ressort également de l'analyse ; non intuitive, elle devient négligeable dès lors que l'écart interguide d est de l'ordre de la largeur h d'un guide.

Couplage non-uniforme (1)

« Constante » de couplage *non uniforme*

$$\chi \equiv \chi(z)$$

Considérons le cas de guides d'onde symétriques.

Si les enveloppes lentement variables (A_1, A_2) vérifient :

$$i\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \chi(z) \\ \chi(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

et sous réserve que les variations de χ restent lentes,

alors (A_1, A_2) sont toutes deux solutions de l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial z} + \chi^2 F = 0}$$

Pour certains profils de la constante de couplage, l'équation de propagation admet des solutions exactes.

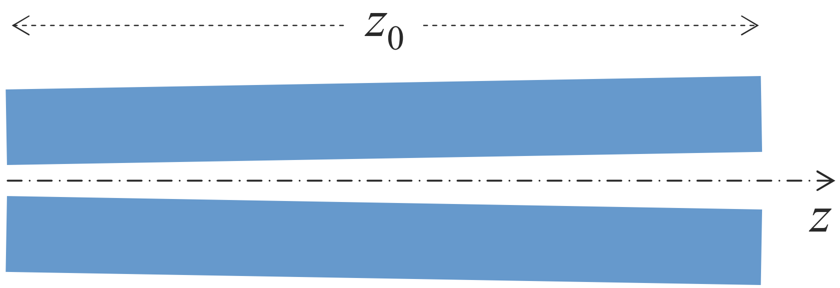
Cf. "Weighted coupling" in Th. Tamir (Ed.), *Guided-Wave Optoelectronics*, Springer-Verlag, 1990.

Variation lente à profil *linéaire*

$$d(z) = d_0 \left(1 + z/z_0\right)$$

$$e^{-\gamma d} = e^{-\gamma d_0}\, e^{-\gamma d_0 z/z_0}$$

$$\chi(z) \equiv \chi_i\, e^{-\alpha z} = \chi_i\, e^{-z/a}$$



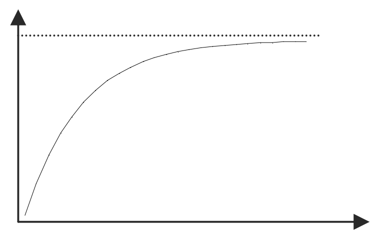
$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial F}{\partial z} + \chi_i^2\, e^{-2\alpha z}\, F = 0}$$

$$F(z) = k_a \cos\left[\chi_i a\, e^{-z/a}\right] + k_b \sin\left[\chi_i a\, e^{-z/a}\right]$$

$$a = \left(\frac{z_0}{\gamma d_0}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\Phi(z)] & -i\ \sin[\Phi(z)] \\ -i\ \sin[\Phi(z)] & \cos[\Phi(z)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(z) = \chi_i\, a \left(1 - e^{-z/a}\right)$$

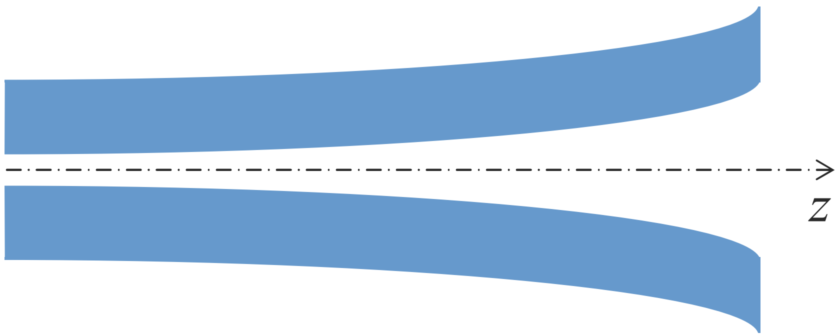


Couplage effectif (max) : $\boxed{(\chi L)_{eff} = \chi_i\, a = \frac{\chi_i z_0}{\gamma d_0}}$

Couplage non-uniforme (3)

Variation lente à profil *parabolique*

$$d(z) = d_0 \left(1 + \frac{z^2}{2 z_0^2} \right)$$



$$\chi(z) \equiv \chi_i \, \mathrm{e}^{-(z/a)^2}$$

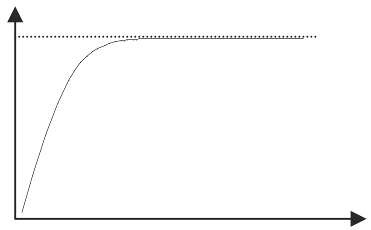
$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{2z}{a^2} \frac{\partial F}{\partial z} + \chi_i^2 \, \mathrm{e}^{-2(z/a)^2} \; F = 0}$$

$$F(z) = k_a \cos\left[\frac{\chi_i \, a \sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Erf}\left(\frac{z}{a} \right) \right] + k_b \sin\left[\frac{\chi_i \, a \sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Erf}\left(\frac{z}{a} \right) \right]$$

$$a^2 = 2 \frac{z_0^2}{\gamma \, d_0}$$

$$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\Phi(z)] & -i \sin[\Phi(z)] \\ -i \sin[\Phi(z)] & \cos[\Phi(z)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{pmatrix}$$

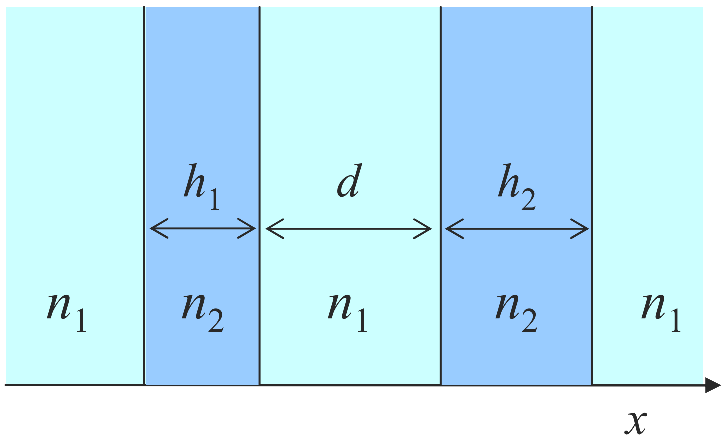
$$\Phi(z) = \frac{\chi_i \, a \sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Erf}\left(\frac{z}{a} \right)$$



Couplage effectif (max) : $\boxed{(\chi L)_{eff} = \frac{\chi_i \, a \sqrt{\pi}}{2}}$

Guides non symétriques

Même principe de calcul, mais…



$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta' & \chi \\ \chi & -\Delta' \end{pmatrix}$$

Le calcul matriciel donne accès aux constantes de propagation (β_a, β_b) des supermodes, donc à :

$$\beta' = \frac{\beta_a + \beta_b}{2}, \quad \Gamma = \frac{\beta_a - \beta_b}{2}.$$

Le désaccord de phase initial $\Delta = (\beta_1 - \beta_2)/2$, parfaitement déterminé par la relation de dispersion modale de chaque guide isolé, a été transformé en Δ', quantité inconnue.

La seule connaissance de $\Gamma^2 = \chi^2 + \Delta'^2$ et de β' permet-elle de remonter séparément à la constante de couplage χ et au désaccord de phase Δ' ?

Conclusions

1) L'approche matricielle exacte confirme l'approche perturbative, tout en l'affinant.
2) La théorie du couplage de modes reste donc valide même en régime non perturbatif ($d \to 0$).
3) D'un point de vue fondamental, tout guide multimode est assimilable à un système de guides monomodes couplés.
4) Pour certains coupleurs non uniformes à variation lente, les équations admettent des solutions exactes, qui prennent parfois une forme étonnamment familière, et d'interprétation physique immédiate.
5) L'extension à des guides monomodes *dissymétriques* est à l'étude : le problème reste ouvert.