

Une méthode basée sur la représentation d'interaction pour la résolution numérique de la GNSLE

Stéphane Balac
stephane.balac@univ-rennes1.fr

Laboratoire Foton, CNRS UMR 6082
ENSSAT - 6 rue de Kérampont, F-22300 Lannion

25/10/2013



ENSSAT
LANNION



Cadre de l'étude : le projet Green-Laser

- Développement de **lasers à fibre impulsionnels** ? dans le domaine spectral visible pour des applications liées à la production de cellules photovoltaïques.
 - Intérêt des lasers à fibre : moindre consommation d'énergie
 - Avantage de la gamme spectrale visible
 - faible réflexion du matériau à traiter (silicium)
 - meilleure efficacité du processus d'interaction matière-rayonnement

Cadre de l'étude : le projet Green-Laser

- Développement de **lasers à fibre impulsionsnels** ? dans le domaine spectral visible pour des applications liées à la production de cellules photovoltaïques.
 - Intérêt des lasers à fibre : moindre consommation d'énergie
 - Avantage de la gamme spectrale visible
 - faible réflexion du matériau à traiter (silicium)
 - meilleure efficacité du processus d'interaction matière-rayonnement
- Partenariat FOTON - QUANTEL soutenu par la Région Bretagne (T. Chartier)
- **Collaboration FOTON-IRMAR** pour l'étude de la méthode basée sur la représentation d'interaction pour résoudre la GNLSE
 - Fabrice Mahé, Florian Méhat, Rozenn Texier-Picard (Irmар)
 - Stéphane Balac, Arnaud Fernandez (Foton)

Plan

Introduction

La problématique physique

Objectifs de la tâche modélisation mathématique & simulation

Le modèle

La méthode de la représentation d'interaction

Une suite de problèmes emboîtés

Changement d'inconnue

Nouveau problème à résoudre

Résolution des problèmes linéaires et non linéaire

Comparaison à une approche Split-Step

Une stratégie de pas adaptatif peu onéreuse

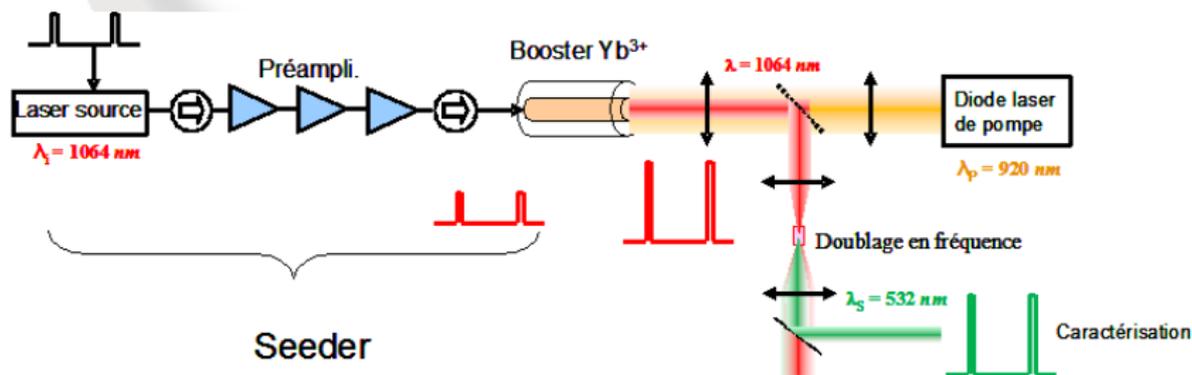
Objectifs

Schéma de Runge-Kutta emboîté RK4(3)

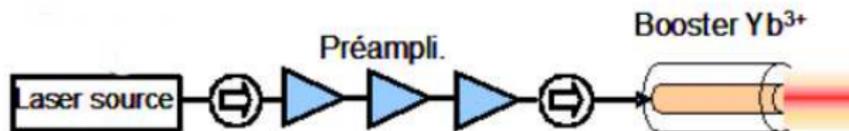
L'algorithme RK4(3)-IP

La problématique physique

- Étudier les **effets non-linéaires** dans un laser à fibre (effet Kerr, mélange à 4 ondes, effet Raman) en fonction des caractéristiques d'**incohérence** de la source du laser maître



Objectifs de la tâche modélisation mathématique & simulation numérique



- Prendre en compte le caractère incohérent de la source laser maître (dans notre cas modélisé par un **processus aléatoire complexe gaussien**)
- Propager le champ électrique dans la fibre en résolvant une EDP (une **équation non-linéaire de Schrödinger**)
- Analyser statistiquement les caractéristiques du champ électrique en sortie de fibre en fonction des caractéristiques de la source laser et des propriétés non linéaires de la fibre.

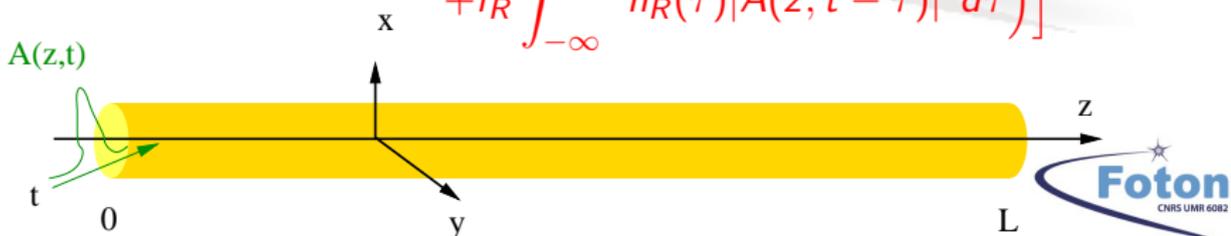
Le modèle

Le champ électrique est supposé de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) = A(z, t) F(x, y) e^{-i(\omega_0 \tau - kz)} \mathbf{e}_x$$

où $A(z, t)$ enveloppe lentement variable vérifie la GNLSE

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) = & -\frac{\alpha}{2} A(z, t) + \left(\sum_{n=2}^{n_{\max}} i^{n+1} \frac{\beta_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} A(z, t) \right) \\ & + i\gamma \left(\text{Id} + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[A(z, t) \left((1 - f_R) |A(z, t)|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + f_R \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(\tau) |A(z, t - \tau)|^2 d\tau \right) \right] \end{aligned}$$



Référence bibliographique

- A. Fernandez, S. Balac, A. Mugnier, F. Mahé, R. Texier-Picard, T. Chartier and D. Pureur.

Numerical simulation of incoherent optical wave propagation in nonlinear fibres.

A paraitre dans **European Physical Journal - Applied Physics**, 2013.

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797641/>

Introduction

La problématique physique

Objectifs de la tâche modélisation mathématique & simulation

Le modèle

La méthode de la représentation d'interaction

Une suite de problèmes emboîtés

Changement d'inconnue

Nouveau problème à résoudre

Résolution des problèmes linéaires et non linéaire

Comparaison à une approche Split-Step

Une stratégie de pas adaptatif peu onéreuse

Objectifs

Schéma de Runge-Kutta emboîté RK4(3)

L'algorithme RK4(3)-IP

On cherche à résoudre le problème : trouver A tel que

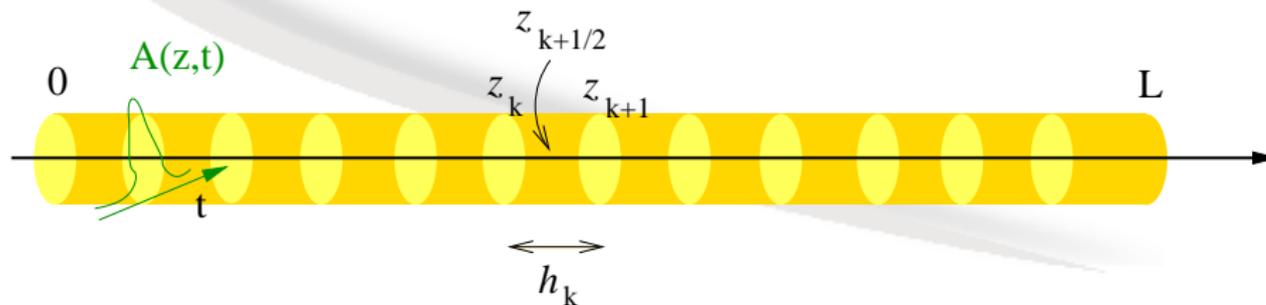
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) = \mathcal{D} A(z, t) + \mathcal{N}(A(z, t)) & \forall z \in [0, L] \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ A(0, t) = a_0(t) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où \mathcal{D} est un opérateur linéaire et \mathcal{N} est un opérateur non linéaire.

On cherche à résoudre le problème : trouver A tel que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) = \mathcal{D} A(z, t) + \mathcal{N}(A(z, t)) & \forall z \in [0, L] \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ A(0, t) = a_0(t) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où \mathcal{D} est un opérateur linéaire et \mathcal{N} est un opérateur non linéaire.



On introduit une subdivision $(z_k)_{k \in \{0, \dots, K\}}$ de l'intervalle $[0, L]$. On note $h_k = z_{k+1} - z_k$ et $z_{k+\frac{1}{2}} = z_k + \frac{1}{2}h_k$.

Une suite de problèmes emboîtés

Résoudre le problème (\mathcal{P}) équivaut à résoudre la succession de problèmes emboîtés (\mathcal{P}_k) , $k = 0, \dots, K - 1$ où

$$(\mathcal{P}_0) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_0(z) = \mathcal{D} A_0(z) + \mathcal{N}(A_0(z)) & \forall z \in [0, z_1] \\ A_0(0) = a_0 \end{cases}$$

et pour $k = 1, \dots, K - 1$

$$(\mathcal{P}_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k(z) = \mathcal{D} A_k(z) + \mathcal{N}(A_k(z)) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k(z_k) = A_{k-1}(z_k) \end{cases}$$

On a

$$A|_{[z_k, z_{k+1}]} = A_k.$$

Un changement d'inconnue

Pour $k \in \{0, \dots, K - 1\}$, on considère un des problèmes (\mathcal{P}_k) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k(z) = \mathcal{D} A_k(z) + \mathcal{N}(A_k)(z) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k(z_k) = a_k \end{cases}$$

Un changement d'inconnue

Pour $k \in \{0, \dots, K-1\}$, on considère un des problèmes (\mathcal{P}_k) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k(z) = \mathcal{D} A_k(z) + \mathcal{N}(A_k)(z) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k(z_k) = a_k \end{cases}$$

et on introduit le **changement d'inconnue**

$$A_k^{\text{ip}} : (z, t) \in [z_k, z_{k+1}] \times \mathbb{R} \longmapsto \exp(-(z - z_{k+\frac{1}{2}}) \mathcal{D}) A_k(z, t)$$

où le terme exponentiel doit être compris comme le semi-groupe associé à l'opérateur linéaire \mathcal{D} , i.e. pour $z \in [z_k, z_{k+1}]$ fixé,

$(\zeta, t) \in [z_k, z_{k+1}] \times \mathbb{R} \longmapsto \exp(-(\zeta - z_{k+\frac{1}{2}}) \mathcal{D}) A_k(z, t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \zeta} A(\zeta) = -\mathcal{D} A(\zeta) & \forall \zeta \in [z_k, z_{k+1}] \\ A(z_{k+\frac{1}{2}}) = A_k(z) \end{cases}$$

Nouveau problème à résoudre

On montre que A_k^{ip} est solution du problème

$$(Q_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^{\text{ip}}(z) = \mathcal{G}_k(z, A_k^{\text{ip}}(z)) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k^{\text{ip}}(z_k) = \exp(-(z_k - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) a_k \end{cases}$$

où

$$\mathcal{G}_k(z, \cdot) = \exp(-(z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) \circ \mathcal{N} \circ \exp((z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D})$$

Intérêt :

- la dérivation en temps n'intervient plus explicitement;
- on a une EDO (avec t comme paramètre) à résoudre.

Outre le fait de devoir calculer $\mathcal{G}_k(z, \cdot)$, il faut

- obtenir la condition initiale $\exp(-(z_k - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) a_k$
- effectuer le changement de variable inverse pour calculer $A_k(z_{k+1}) = \exp(-(z_{k+1} - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) A_k^{\text{ip}}(z_{k+1})$

Outre le fait de devoir calculer $\mathcal{G}_k(z, \cdot)$, il faut

- obtenir la condition initiale $\exp(-(z_k - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) a_k$
- effectuer le changement de variable inverse pour calculer $A_k(z_{k+1}) = \exp(-(z_{k+1} - z_{k+\frac{1}{2}})\mathcal{D}) A_k^{\text{ip}}(z_{k+1})$

L'étape k consiste donc à résoudre les 3 problèmes imbriqués :

$$(\mathcal{L}_k^+) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^+(z) = \mathcal{D} A_k^+(z) & \forall z \in [z_k, z_{k+\frac{1}{2}}] \\ A_k^+(z_k) = A_k(z_k) \end{cases}$$

$$(\mathcal{Q}_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^{\text{ip}}(z) = \mathcal{G}_k(z, A_k^{\text{ip}}(z)) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k^{\text{ip}}(z_k) = A_k^+(z_{k+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$$(\mathcal{L}_k^-) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^-(z) = \mathcal{D} A_k^-(z) & \forall z \in [z_{k+\frac{1}{2}}, z_{k+1}] \\ A_k^-(z_k) = A_k^{\text{ip}}(z_{k+1}) \end{cases}$$

$$\text{et } A_k(z_{k+1}) = A_k^-(z_{k+1})$$

Résolution des problèmes linéaires et du problème non linéaire

Les 2 problèmes linéaires (\mathcal{L}_k^+) et (\mathcal{L}_k^-) admettent une solution explicite calculable par TF.

La solution du problème (\mathcal{L}_k^+) au point $z_{k+\frac{1}{2}}$ est

$$A_k^+(z_{k+\frac{1}{2}}) = \mathcal{F}^{-1}[\nu \mapsto \widehat{A}_k(z_k, \nu) e^{\widehat{d}(\nu) \frac{h_k}{2}}]$$

où $\widehat{d} : \nu \mapsto -\frac{1}{2}\alpha + i \sum_{n=2}^{n_{\max}} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi\nu)^n$

La solution du problème (\mathcal{L}_k^-) au point z_{k+1} est

$$A_k^-(z_{k+1}) = \mathcal{F}^{-1}[\nu \mapsto \widehat{A}_k^{ip}(z_{k+1}, \nu) e^{\widehat{d}(\nu) \frac{h_k}{2}}].$$

Résolution des problèmes linéaires et du problème non linéaire

- Les 2 problèmes linéaires (\mathcal{L}_k^+) et (\mathcal{L}_k^-) admettent une solution explicite calculable par TF.

- La solution du problème (\mathcal{L}_k^+) au point $z_{k+\frac{1}{2}}$ est

$$A_k^+(z_{k+\frac{1}{2}}) = \mathcal{F}^{-1}[\nu \mapsto \hat{A}_k(z_k, \nu) e^{\hat{d}(\nu) \frac{h_k}{2}}]$$

où $\hat{d} : \nu \mapsto -\frac{1}{2}\alpha + i \sum_{n=2}^{n_{\max}} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi\nu)^n$

- La solution du problème (\mathcal{L}_k^-) au point z_{k+1} est

$$A_k^-(z_{k+1}) = \mathcal{F}^{-1}[\nu \mapsto \hat{A}_k^{\text{ip}}(z_{k+1}, \nu) e^{\hat{d}(\nu) \frac{h_k}{2}}].$$

- On résout le problème non linéaire (\mathcal{Q}_k) par un schéma numérique (RK).

Comparaison à une approche Split-Step (I)

Le problème (\mathcal{P}) peut également être résolu par un schéma de Split-Step Symétrique. On résout alors à l'étape k les 3 problèmes imbriqués :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^+(z) = \mathcal{D} A_k^+(z) & \forall z \in [z_k, z_{k+\frac{1}{2}}] \\ A_k^+(z_k) = A_k(z_k) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} B_k(z) = \mathcal{N}(B_k(z)) & \forall z \in [z_k, z_{k+1}] \\ A_k^{\text{ip}}(z_k) = A_k^+(z_{k+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} A_k^-(z) = \mathcal{D} A_k^-(z) & \forall z \in [z_{k+\frac{1}{2}}, z_{k+1}] \\ A_k^-(z_k) = B_k(z_{k+1}) \end{cases}$$

- C'est exactement la même chose, seul l'opérateur non linéaire est différent! ...

Comparaison à une approche Split-Step (II)

Mais

- le schéma de Split-Step est obtenu par une approximation (d'ordre 2 pour le SS Symétrique)
- alors que le schéma IP est exact (changement d'inconnue)

Par ailleurs,

Comparaison à une approche Split-Step (II)

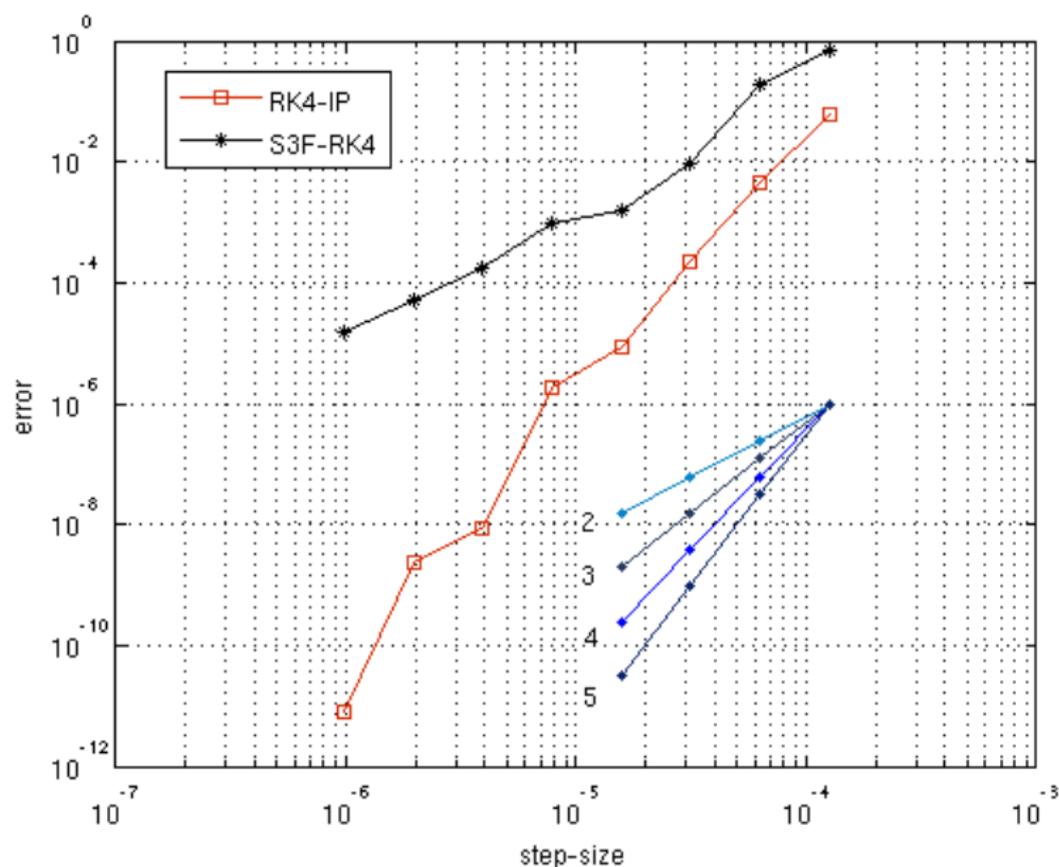
Mais

- le schéma de Split-Step est obtenu par une approximation (d'ordre 2 pour le SS Symétrique)
- alors que le schéma IP est exact (changement d'inconnue)

Par ailleurs,

- l'analogie indique que la méthode IP est simple à implémenter en modifiant très peu un code SS Symétrique
- l'utilisation du schéma RK d'ordre 4 pour résoudre le problème (Q_k) rend l'évaluation de l'opérateur \mathcal{G}_k pas plus coûteuse que celle de \mathcal{N} (dû aux symétries des coefficients RK4)

Comparaison à une approche Split-Step (III)



Historique de la méthode IP

- La méthode RK4-IP a été inventée au [Bose-Einstein condensate theory group](#), Jack Dodd Centre, University of Otago (Nouvelle-Zélande) dans les [années 90](#) pour résoudre numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii servant à décrire les condensats de Bose-Einstein.

Historique de la méthode IP

- La méthode RK4-IP a été inventée au [Bose-Einstein condensate theory group](#), Jack Dodd Centre, University of Otago (Nouvelle-Zélande) dans les [années 90](#) pour résoudre numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii servant à décrire les condensats de Bose-Einstein.
- Elle est décrite dans les 2 thèses suivantes :
 - B.M. Caradoc-Davies. *Vortex dynamics in Bose-Einstein condensate*. PhD thesis, University of Otago (NZ), 2000.
 - M.J. Davis. *Dynamics in Bose-Einstein condensate*. PhD thesis, University of Oxford (UK), 2001.

Historique de la méthode IP

- La méthode RK4-IP a été inventée au [Bose-Einstein condensate theory group](#), [Jack Dodd Centre](#), [University of Otago](#) (Nouvelle-Zélande) dans les [années 90](#) pour résoudre numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii servant à décrire les condensats de Bose-Einstein.
- Elle est décrite dans les 2 thèses suivantes :
 - B.M. Caradoc-Davies. *Vortex dynamics in Bose-Einstein condensate*. PhD thesis, University of Otago (NZ), 2000.
 - M.J. Davis. *Dynamics in Bose-Einstein condensate*. PhD thesis, University of Oxford (UK), 2001.
- Puis en [2007](#) a été utilisée pour la [GNLSE](#)
 - J. Hult. *A fourth-order Runge–Kutta in the Interaction Picture method for simulating supercontinuum generation in optical fibers*. *J. Lightwave Technol.*, 25(12):3770–3775, 2007.

Référence bibliographique

- S. Balac, A. Fernandez, F. Mahé, F. Méhat and R. Texier-Picard.

The Interaction Picture method for solving the Generalized nonlinear Schrödinger equation in optics.

Soumis à **SIAM Journal of Numerical Analysis**, 2013.

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00850518/>

Introduction

La problématique physique

Objectifs de la tâche modélisation mathématique & simulation

Le modèle

La méthode de la représentation d'interaction

Une suite de problèmes emboîtés

Changement d'inconnue

Nouveau problème à résoudre

Résolution des problèmes linéaires et non linéaire

Comparaison à une approche Split-Step

Une stratégie de pas adaptatif peu onéreuse

Objectifs

Schéma de Runge-Kutta emboîté RK4(3)

L'algorithme RK4(3)-IP

Objectifs

- Le schéma de **Runge-Kutta d'ordre 4 classique** est bien adapté à la résolution de la GNLSE par la méthode IP car la valeur des noeuds de quadrature $(0, 1/2, 1/2, 1)$ induit des simplifications au niveau de l'algorithme.

Objectifs

- Le schéma de **Runge-Kutta d'ordre 4 classique** est bien adapté à la résolution de la GNLSE par la méthode IP car la valeur des noeuds de quadrature (0, 1/2, 1/2, 1) induit des simplifications au niveau de l'algorithme.
- On souhaite : **estimer l'erreur locale pour mettre en œuvre une stratégie de pas adaptatif** :
 - peu onéreuse (comparé au "step-doubling")
 - qui préserve les simplifications induites par la valeur des noeuds de quadrature RK4.

Objectifs

- Le schéma de **Runge-Kutta d'ordre 4 classique** est bien adapté à la résolution de la GNLSE par la méthode IP car la valeur des noeuds de quadrature (0, 1/2, 1/2, 1) induit des simplifications au niveau de l'algorithme.
- On souhaite : **estimer l'erreur locale pour mettre en œuvre une stratégie de pas adaptatif** :
 - peu onéreuse (comparé au "step-doubling")
 - qui préserve les simplifications induites par la valeur des noeuds de quadrature RK4.
- **Recherche d'un schéma de Runge-Kutta emboîté...**
 - i.e. 2 schémas de RK d'ordre 3 et 4,
 - ayant en commun la plus grande partie des étapes de calcul.

Schéma de Runge-Kutta emboité RK4(3)

- Un peu de travail conduit au schéma ERK4(3) suivant :

0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
1	0	0	1		
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{6} - \lambda)$	λ

- Qui s'avère être le schéma de Runge-Kutta 4(3) T de Dormand et Prince (la valeur $\lambda = \frac{1}{10}$ est suggérée).

L'algorithme RK4(3)-IP

A l'étape k , les solutions approchées $u_{k+1}^{[4]}$ (RK4) et $u_{k+1}^{[3]}$ (RK3) au point z_{k+1} sont obtenues ainsi (dépendance en t omise)

$$u_k^{\text{ip}} = \exp\left(\frac{h_k}{2}\mathcal{D}\right) u_k^{[4]} \quad (\text{changement d'inconnue})$$

$$\alpha_1 = \exp\left(\frac{h_k}{2}\mathcal{D}\right) \alpha'_{5,k} \quad \alpha_2 = \mathcal{N}(u_k^{\text{ip}}(z_k, t) + \frac{h_k}{2}\alpha_1)$$

$$\alpha_3 = \mathcal{N}(u_k^{\text{ip}}(z_k, t) + \frac{h_k}{2}\alpha_2) \quad \alpha'_4 = \mathcal{N}\left(\exp\left(\frac{h_k}{2}\mathcal{D}\right)[u_k^{\text{ip}}(z_k, t) + h_k\alpha_3]\right)$$

$$r = \exp\left(\frac{h_k}{2}\mathcal{D}\right) \left[u_k^{\text{ip}} + \frac{h_k}{6}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)\right]$$

$$u_{k+1}^{[4]} = r + \frac{h_k}{6}\alpha'_4$$

$$\alpha'_{5,k+1} = \mathcal{N}(u_{k+1}^{[4]}) \quad (\text{FSAL})$$

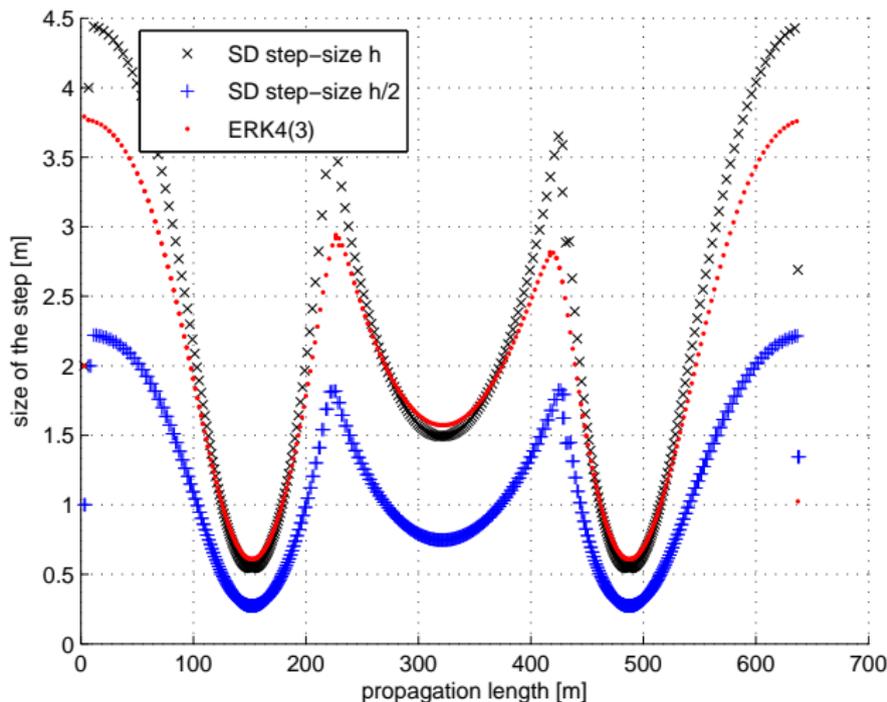
$$u_{k+1}^{[3]} = r + \frac{h_k}{30}(2\alpha'_4 + 3\alpha'_{5,k+1}) \quad (\text{surcoût} = 2+ \text{ et } 3\times)$$

$$\text{erreur}_{\text{locale}} = \|u_{k+1}^{[4]} - u_{k+1}^{[3]}\|$$

Comparaison au "Step-doubling"

Évolution du pas lors de la propagation d'un soliton d'ordre 3
($tol = 10^{-6}$).

CPU time · RK4(3) = 69 s / SD = 148 s



Référence bibliographique

● S. Balac and F. Mahé.

Embedded Runge-Kutta scheme for step-size control in the Interaction Picture method.

Computer Physics Communications, 184(4): 1211-1219, 2013

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797190/>

Conclusion

- Une alternative intéressante à la méthode S3F pour résoudre la GNSLE (pas d'approx. liée à un schéma de split-step).
- Facile à mettre en œuvre à partir d'un code S3F.
- Stratégie de pas adaptatif sans surcoût.
- Peut-être utilisée pour la résolution de toute EDP où s'applique la méthode de Split-Step Symétrique.

