Propriétés ergodiques des applications rationnelles

Vincent GUEDJ

10 janvier 2007

Résumé

Soit $f : X \to X$ une transformation rationnelle d'une variété projective complexe compacte. Nous étudions la dynamique d'une telle application d'un point de vue statistique, i.e. nous essayons de décrire le comportement asymptotique de l'orbite $O_f(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ d'un point générique. Nous construisons pour ce faire une mesure de probabilité invariante canonique dont nous étudions les principales propriétés ergodiques (mélange, hyperbolicité, entropie), et dont nous montrons – dans certains cas – qu'elle reflète une propriété d'équidistribution des points périodiques.

Préambule

Le texte qui suit porte sur l'étude statistique de la dynamique des transformations méromorphes des variétés kählériennes compactes. Il ne s'agit pas d'un système dynamique (f, X) au sens classique du terme : les transformations f que nous considérons ne sont, en général, pas bien définis sur un sous-ensemble analytique I_f de codimension ≥ 2 – l'ensemble des points d'indétermination. Même lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$, il est important de considérer la compactification du système – extension méromorphe à une compactification de $\mathbb{C}^k$ – qui fait, en général, apparaître des points d'indétermination à l'infini. C'est une source de grande difficulté dans l'analyse de la dynamique : contrôler la dynamique près des points d'indétermination est un enjeu majeur qui nécessite l'utilisation d'outils relativement sophistiqués de Géométrie Algébrique Complexe (problèmes de désingularisation dynamiques) et d'Analyse Complexe (construction, et intersection géométrique de courants positifs invariants).

La dynamique des applications de plusieurs variables complexes a connu de nombreux développements au cours des quinze dernières années, suite aux travaux fondateurs de E.Bedford, J.E.Fornaess, J.H.Hubbard, M.Lyubich, N.Sibony et J.Smillie. Ce mémoire se propose de faire le point sur une question particulière, celle de l'existence d'une mesure d'entropie maximale.

Nous renvoyons le lecteur à [CFS], [KH], [W] pour une présentation générale des Sytèmes Dynamiques et de la Théorie Ergodiques, et à [Ci], [De], [GH], [Laz] pour quelques éléments d'Analyse et de Géométrie Algébrique Complexes. On trouvera dans [BeM], [CG], [Mi 1] une introduction à la dynamique holomorphe en une variable, et dans [F], [M2], [MNTU], [S] une introduction à la dynamique holomorphe en plusieurs variables.

Remerciements. C'est un plaisir de remercier tous ceux qui m'ont aidé durant l'élaboration de ce texte, notamment mes co-auteurs, mes collègues toulousains, les membres de l'A.C.I. "Dynamique des applications polynomiales", sans oublier ma famille. Une mention spéciale pour mes frères spirituels, Charles Favre et Romain Dujardin, ainsi que pour Isabelle et mes parents, à qui je dédie ce travail.

Introduction

Soit X une variété complexe kählérienne (connexe) compacte et $f : X \to X$ une transformation méromorphe *dominante* (i.e. dont le jacobien ne s'annule pas identiquement). Nous souhaitons étudier la *dynamique* de l'application f, i.e. décrire statistiquement le comportement des orbites $O_f(x) := \{f^n(x) \,/\, n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$. Il s'agit de répondre aussi bien à des questions (en apparence) élémentaires,

– existe-t-il des points périodiques ? combien ? de quel type ?
– comment se répartissent-ils dans l'espace ?

qu'à des questions plus fines de Théorie Ergodique,

– quelle est la complexité (entropie topologique) du sytème (f, X) ?
– existe-t-il une (unique ?) mesure d'entropie maximale ?
– quelles sont ses propriétés ergodiques (mélange, hyperbolicité,...) ?

Lorsque X est une surface de Riemann, la réponse à ces questions dépend uniquement du degré topologique $\deg(f)$ de l'application f : lorsque $\deg(f) = 1$, la dynamique est pauvre et se calcule à la main. Lorsque $\deg(f) \geq 2$, on a le résultat suivant dû à H.Brolin [Bro] (cas des polynômes) et M.Lyubich [Ly] (voir également [FLM]) :

Théorème A. *Si* $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ *et* $\deg(f) \geq 2$, *alors il existe une mesure de probabilité invariante canonique* μ_f *qui vérifie*

1. μ_f *est l'unique mesure d'entropie maximale*

$$h_{top}(f) = h_{\mu_f}(f) = \log \deg(f) > 0;$$

2. μ_f *est mélangeante, d'exposant de Lyapunov*

$$\chi(\mu_f) \geq \frac{1}{2} \log \deg(f) > 0;$$

3. *Il y a* $(\deg(f))^n + 1$ *points périodiques d'ordre* n. *Tous –sauf un nombre fini– sont répulsifs et s'équidistribuent selon la mesure* μ_f.

Le but de ce mémoire est d'établir un résultat similaire au Théorème A lorsque X est de dimension $k \geq 2$: on cherche une condition numérique qui garantisse l'existence d'une mesure canonique dynamiquement intéressante.

A la fin du 20^e siècle, E.Bedford, J.E.Fornaess, J.H.Hubbard, M.Lyubich, N.Sibony et J.Smillie ont construit et étudié une telle mesure μ_f pour deux familles particulières (mais décisives) de transformations : les applications de Hénon complexes (i.e. les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ d'entropie positive), et les endomorphismes *holomorphes* de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. Les dynamiques correspondantes sont très différentes : dans le premier cas les points périodiques selles s'équidistribuent selon μ_f, alors que dans le deuxième cas, ce sont les points répulsifs qui jouent un rôle déterminant (un résultat plus récent de J.Y.Briend et J.Duval [BrD 1,2]).

Cette différence est en partie expliquée par les valeurs respectives des degrés dynamiques de ces applications.

Degrés dynamiques. Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ une transformation rationnelle de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. On définit, pour $0 \leq j \leq k$, le $j^{\text{ième}}$ degré dynamique de f,

$$\lambda_j(f) := \liminf_{n \to +\infty} \left[\deg f^{-n} L\right]^{1/n},$$

où L désigne un sous-espace linéaire générique de $\mathbb{P}^k$ de codimension j.

Observons que $\lambda_k(f)$ est le degré topologique de f et que $\lambda_0(f) = 1$. Lorsque f est un endomorphisme *holomorphe*, on vérifie que $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$, ainsi $\lambda_k(f)$ est le plus grand degré dynamique de f. A l'inverse, pour une application de Hénon complexe, on a $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) = 1$ ($k = 2$).

Nous rappelons la définition des degrés dynamiques d'une transformation méromorphe $f : X \to X$ d'une variété kählérienne compacte quelconque dans la section 2.1. Ce sont les rapports $\lambda_j(f)/\lambda_{j+1}(f)$ qui jouent un rôle crucial dans les phénomènes d'équidistribution : ceux-ci ont lieu lorsque $\lambda_j/\lambda_{j+1} \neq 1$. On dira que **f est cohomologiquement hyperbolique** lorsque cette condition est satisfaite pour tout $0 \leq j \leq k-1$. Il résulte des propriétés de concavité de la fonction $j \mapsto \log \lambda_j(f)$ (voir Théorème 2.4 de ce texte) que cette condition est équivalente à l'existence d'un entier $l \in [1, k]$ tel que $\lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques.

En dimension $k = 1$, f est cohomologiquement hyperbolique si et seulement si $\lambda_1(f) > \lambda_0(f) = 1$, i.e. lorsque $\lambda_1(f) = \deg(f) \geq 2$. On retrouve la condition du Théorème A.

En dimension $k = 2$, la condition se résume à $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$. Il y a donc deux cas à considérer, selon que $\lambda_1(f) < \lambda_2(f)$ (grand degré topologique, e.g. les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$), ou $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ (petit degré topologique, e.g. les applications de Hénon).

Les travaux présentés dans ce mémoire s'articulent autour de la conjecture suivante –formulée dans [G 3,7]– et y apportent des réponses partielles.

Conjecture. *Soit X une variété kählérienne compacte et $f : X \to X$ une transformation méromorphe* **cohomologiquement hyperbolique**, *i.e. telle que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ pour un entier $l \in [1, k]$. Alors il existe une mesure de probabilité invariante canonique μ_f qui ne charge pas les hypersurfaces complexes et vérifie*

1. *μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale*
$$h_{\mu_f}(f) = h_{top}(f) = \log \lambda_l(f).$$
2. *μ_f est mélangeante et hyperbolique. Ses exposants de Lyapunov vérifient*
$$\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_l \geq \frac{1}{2} \log \left(\lambda_l(f)/\lambda_{l-1}(f)\right) > 0$$
et
$$0 > -\frac{1}{2} \log \left(\lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)\right) \geq \chi_{l+1} \geq \ldots \geq \chi_k.$$
3. *Il y a environ $\lambda_l(f)^n$ points périodiques selles de type $(k-l, l)$. Ceux-ci s'équidistribuent selon μ_f.*

Les résultats. La conjecture est motivée par les travaux de Bedford-Lyubich-Smillie [BLS 1,2] qui l'ont établie lorsque f est une application de Hénon complexe, ainsi que par ceux de Fornaess-Sibony [FS 2,3,4] et Briend-Duval [BrD 1,2] qui ont réglé le cas des endomorphismes holomorphes non linéaires de $\mathbb{P}^k$. Nous esquisserons la démonstration de ces résultats ainsi que certaines de leur généralisations :

Théorème B. *La conjecture est vraie lorsque $l = k$, i.e. lorsque le degré topologique domine strictement tous les autres degrés dynamiques.*

Ce résultat – qui contient le Théorème A et généralise [BrD 1,2] – est expliqué au Chapitre 3 (dans un souci pédagogique, nous détaillons la preuve du Théorème A au Chapitre 1). Notons que ces transformations méromorphes de grand degré topologique sont appelées *cohomologiquement dilatantes* dans le texte de S.Cantat [Ca 4].

Théorème C. *La conjecture est vraie lorsque $f : X \to X$ est une transformation birationnelle ($\lambda_2(f) = 1$) d'une surface projective ($k = \dim_{\mathbb{C}} X = 2$), moyennant une hypothèse technique.*

Nous précisons au Chapitre 4 cette hypothèse (Définition 4.21), qui porte sur le contrôle quantitatif de la dynamique près des *points d'indétermination* (voir rubrique suivante). Mentionnons simplement ici qu'elle est vérifiée lorsque f est une application de Hénon complexe [BLS 1,2], un automorphisme d'entropie positive [Ca 1], ou une application birationnelle "générique" de $\mathbb{P}^2$ [BDi 2], [Du 5].

Notons que tout endomorphisme polynomial cohomologiquement hyperbolique $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z, w), Q(z, w)) \in \mathbb{C}^2$ avec $\max(\deg P, \deg Q) \leq 2$ relève soit du Théorème B, soit du Théorème C et vérifie donc la conjecture [G 3]. De même, tout endomorphisme *holomorphe* cohomologiquement hyperbolique d'une surface projective vérifie la conjecture (Théorème 3.6).

Points d'indétermination. Les applications f que nous considérons ne sont, en général, pas partout bien définies. Il existe un sous-ensemble analytique I_f de codimension ≥ 2 constitué de points en lesquels f n'est pas même continue. Si $p \in I_f$, son image

$$f(p) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{f(B(p, \varepsilon) \setminus I_f)}$$

est un sous-ensemble analytique de dimension positive. On cherche à décrire la dynamique des points qui se situent hors de l'ensemble d'indétermination itéré

$$I_f^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_f).$$

En général cet ensemble peut contenir une hypersurface de X (bien que $codim_{\mathbb{C}} I_f \geq 2$). C'est pourquoi il est crucial, dans la conjecture énoncée plus haut, que la mesure μ_f ne charge pas les hypersurfaces de X. Par ailleurs les degrés dynamiques étant invariants par un changement birationnel de coordonnées π, on veut pouvoir transporter μ_f par π : il faut donc que μ_f ne charge pas une hypersurface qui pourrait être contractée par π.

Nous expliquons dans la section 3.3.1 qu'on ne peut pas se contenter d'étudier les endomorphismes holomorphes : ce sont des objets beaucoup trop rares. Dès lors, le contrôle de la dynamique près des points d'indétermination constitue une des difficultés majeures de cette étude.

La stratégie. La transformation $f : X \to X$ induit des actions linéaires f^*, f_* par image inverse et directe sur les espaces vectoriels de cohomologie de deRham $H^q(X, \mathbb{R})$. Comme X est kählérienne, on peut tirer profit de la décomposition de Hodge. L'hypothèse numérique $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ permet de montrer que les actions dominantes sont

$$f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{R}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{R}) \text{ et } f_* : H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{R}) \to H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{R}).$$

Cela se traduit par exemple dans la formule des points fixes de Lefschetz (voir paragraphe 2.3.1) qui montre que le taux asymptotique de croissance des points périodiques est contrôlé par $\lambda_l(f)$, ou encore dans la majoration de l'entropie topologique (voir paragraphe 2.2.1) qui donne ici

$$h_{top}(f) \leq \log \lambda_l(f).$$

Pour démontrer la conjecture il est naturel de vouloir utiliser le principe variationnel pour exhiber une mesure d'entropie maximale. La présence de points d'indétermination implique malheureusement qu'il n'y a pas toujours égalité dans le principe variationnel (cf [G 7]), du moins lorsque f n'est pas cohomologiquement hyperbolique. Notre stratégie consiste à construire une mesure invariante canonique en utilisant l'Analyse Spectrale des actions linéaires f^*, f_* et des propriétés fines d'Analyse Complexe (notamment la théorie des courants positifs), puis à étudier les propriétés ergodiques de cette mesure en entremêlant des outils classiques de Systèmes Dynamiques (théorie de Pesin) et de Géométrie Algébrique Complexe (notamment la théorie de Hodge). La première partie repose sur les observations suivantes :

• l'hypothèse $\lambda := \lambda_l(f) > \lambda_{l-1}(f)$ garantit des phénomènes d'équidistribution : si ω_l et ω'_l sont deux formes lisses fermées cohomologues de bidegré (l,l), alors $\lambda^{-n}(f^n)^*(\omega_l - \omega'_l) \to 0$. On espère qu'elles s'équidistribuent selon un courant positif fermé invariant T_l^+ de bidegré (l,l), i.e.

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega_l \longrightarrow T_l^+;$$

•l'hypothèse $\lambda = \lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$ se traduit par dualité en $\lambda_{k-l}(f_*) > \lambda_{k-l-1}(f_*)$, donnant de manière analogue des phénomènes d'équidistribution par image directe des formes lisses fermées ω_{k-l} de bidegré $(k-l, k-l)$. On espère de même que

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*\omega_{k-l} \longrightarrow T_{k-l}^-,$$

où T_{k-l}^- désigne un courant positif fermé de bidegré $(k-l, k-l)$;

• on tente alors de définir la mesure canonique

$$\mu_f := T_l^+ \wedge T_{k-l}^-.$$

La seconde partie consiste à donner du sens au slogan suivant : *les propriétés géométriques d'extrémalité des courants invariants reflètent les propriétés ergodiques de la mesure μ_f.*

Il est raisonnable de penser que cette stratégie va aboutir prochainement en dimension deux, notamment dans le cas des endomorphismes polynomiaux (voir Chapitre 4 et [FaJ 3], [DDG]). La dimension supérieure en est à ses premiers balbutiements. Nous indiquons au Chapitre 5 quelques unes des pistes explorées jusqu'à présent.

Le cas non hyperbolique. Nous nous intéressons dans ce texte uniquement aux transformations méromorphes cohomologiquement hyperboliques. Cela nous permet d'éviter le cas peu intéressant des produits directs dont un facteur est linéaire.

On s'attend plus généralement à ce que les transformations non cohomologiquement hyperboliques préservent une fibration : c'est le cas des transformations biméromorphes des surfaces tels que $\lambda_1(f) = \lambda_2(f) = 1$, comme l'ont montré J.Diller et C.Favre [DF].

Notons que certaines transformations méromorphes non cohomologiquement hyperboliques interviennent dans l'analyse spectrale des opérateurs différentiels (Laplace, Schrödinger) sur des structures modèles self-similaires, en tant qu'opérateurs de renormalisation (voir [Sa]).

Quelles variétés ? La conjecture sous-tend la question naturelle de savoir quelles sont les variétés X qui admettent des transformations méromorphes cohomologiquement hyperboliques. Lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ la réponse est bien connue : seules les courbes elliptiques et la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ admettent des endomorphismes holomorphes non inversibles. Ce sont les surfaces de Riemann X dont la dimension de Kodaira $kod(X)$ est négative ou nulle. Nous montrons dans la section 2.4 le

Théorème D. *Si* $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ *et* $f : X \to X$ *est tel que* $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$, *alors* $kod(X) \leq 0$. *Plus précisément,*

- *soit* $kod(X) = 0$,
- *soit* X *est rationnelle,*
- *soit* X *est une surface réglée au dessus d'une courbe elliptique ; dans ce cas* f *préserve la fibration rationnelle et* $\lambda_2(f) > \lambda_1(f)$.

On peut construire beaucoup d'exemples de transformations méromorphes $f : X \to X$ tels que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ (resp. $\lambda_1(f) < \lambda_2(f)$) lorsque X est rationnelle. La situation est beaucoup plus rigide lorsque $kod(X) = 0$ (et moins intéressante lorsque $X \simeq \mathbb{P}^1 \times E$, E courbe elliptique). Le cas le plus important –et le plus délicat à étudier– est donc celui d'une surface X rationnelle : il s'agit d'étudier la dynamique d'une application rationnelle dominante $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ à conjugaison birationnelle près. Il est cependant intéressant de considérer également le cas des surfaces de dimension de Kodaira nulle. La situation est plus riche qu'en dimension 1 – notamment sur les surfaces $K3$ – et certaines transformations ayant un groupe fini de symétries induisent des transformations sur une surface rationnelle (généralisant la construction de S.Lattès).

Nous conjecturons, en dimension supérieure, que seules les variétés de dimension de Kodaira ≤ 0 admettent des transformations méromorphes cohomologiquement hyperboliques.

Précisons à présent le contenu du mémoire. Nous esquissons dans la *première partie* la démonstration du Théorème de Brolin-Lyubich. Les éléments de preuve que nous indiquons sont en partie originaux et se généralisent en plusieurs variables.

Nous introduisons les degrés dynamiques $\lambda_j(f)$ dans la *deuxième partie*. Nous établissons quelques unes de leurs propriétés dans la *section 2.1*, leur lien avec l'entropie topologique dans la *section 2.2*, puis avec le nombre de points périodiques dans la *section 2.3*. Nous donnons dans la *section 2.4* quelques exemples de transformations cohomologiquement hyperboliques.

Nous étudions dans la *troisième partie* le cas des transformations de grand degré topologique. Nous démontrons la conjecture dans les *sections 3.1, 3.2* et donnons quelques exemples dans la *section 3.3*. Dans la *section 3.4* nous étudions plus avant certains invariants numériques (dimension de la mesure d'entropie maximale, minimalité des exposants de Lyapunov), puis nous nous intéressons dans la *section 3.5* à des généralisations de cette situation dynamique (applications d'allure polynomiale).

Dans la *quatrième partie* nous tentons de mettre en place notre stratégie pour démontrer la conjecture lorsque la variété X est de dimension deux. Il faut tout d'abord trouver un bon modèle X – quitte à effectuer un changement biméromorphe de coordonnées – sur lequel l'action linéaire induite en cohomologie est compatible avec la dynamique : nous abordons ce problème dans la *section 4.1*. Nous précisons l'Analyse Spectrale des opérateurs f^*, f_* dans la *section 4.2*. Nous construisons des courants invariants canoniques T^+, T^- dans la *section 4.3*, et étudions leurs propriétés géométriques d'extrémalité. La mesure canonique $\mu_f = T^+ \wedge T^-$ est construite dans la *section 4.4*, puis nous établissons certaines de ses propriétés ergodiques dans la *section 4.5*. Nous illustrons par des exemples (*section 4.6*) les difficultés rencontrées.

La *cinquième partie* aborde le cas des transformations de petit degré topologique en dimension supérieure ou égale à trois. Nous construisons une mesure canonique d'entropie maximale pour deux familles d'exemples, les automorphismes d'entropie positive (*section 5.2*) et certains automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ (*section 5.3*). Plusieurs exemples sont donnés dans la *section 5.4*.

Table des matières

Chapitre 1

La dimension un revisitée

Nous présentons ici la démonstration du Théorème de Brolin-Lyubich. Nous supposons donc dans toute cette partie que X est une surface de Riemann compacte munie d'un endomorphisme holomorphe $f : X \to X$ de degré topologique $\lambda := \deg(f) \geq 2$. Notons que seules les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda$ et la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ admettent de tels endomorphismes : cela résulte par exemple de la formule de Hurwitz $f^*K_X + R_f = K_X$ que nous utiliserons également en dimension supérieure.

Nous allons donner une construction récente de la mesure d'entropie maximale μ_f inspirée du dd^c-lemma de la théorie de Hodge. Cette approche développée dans [G 1] a depuis été appliquée avec succès par plusieurs auteurs à des problèmes de dynamique à plusieurs variables (voir notamment [G 5], [DS 6,8]). Elle nous permet ici d'établir de façon élémentaire plusieurs propriétés ergodiques de μ_f (mélange, décroissance des corrélations,etc).

Nous donnons également une démonstration originale –en suivant [G2]– de l'équidistribution des préimages de points qui utilise des estimées de volume. Cette méthode permet, en plusieurs variables, d'obtenir des résultats d'équidistribution des préimages de diviseurs. Les autres aspects (équidistribution des points répulsifs, unicité de la mesure d'entropie maximale) suivent de près la preuve de M.Lyubich. Ils ne seront qu'esquissés.

1.1 La mesure invariante canonique

H.Brolin a donné dans [Bro] une construction simple de la fonction de Green d'un polynôme. Trente ans plus tard (soit une dizaine d'années après les travaux de M.Lyubich), J.H.Hubbard et P.Papadopol [HP 1] ont obtenu une construction élémentaire de la fonction de Green d'une fraction rationnelle f. Leur construction consiste à utiliser la structure complexe homogène de $\mathbb{P}^1$, en relevant l'application f en un endomorphisme polynomial homogène de $\mathbb{C}^2$. La technique revient ainsi à faire de la dynamique en deux variables, puis à utiliser l'homogénéité pour en déduire des informations unidimensionnelles. Cette construction a le mérite de donner des informations sur la régularité du potentiel de la mesure d'entropie maximale, ainsi que de se généraliser au cas des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. On peut également la généraliser à des endomorphismes d'autres variétés homogènes (voir [FaG] pour les cas des espaces multiprojectifs). Elle ne s'applique malheureusement pas au cas de variétés non-homogènes (qui interviennent fréquemment en dimension supérieure). Elle impose par ailleurs d'inconfortables va-et-vient entre la dimension 1 et la dimension 2 homogène. Nous proposons ici une approche plus canonique mise au point dans [G 1].

1.1.1 La construction

Soit ω une mesure de probabilité lisse sur X. Comme f est de degré topologique λ, $\lambda^{-1}f^*\omega$ est encore une mesure de probabilité lisse sur X. On peut donc trouver $\gamma : X \to \mathbb{R}$, une fonction lisse, telle que

$$\frac{1}{\lambda}f^*\omega = \omega + \Delta\gamma. \tag{1.1}$$

Nous supposons l'opérateur Δ normalisé de sorte qu'en coordonnées locales, $\Delta \log|z| = \varepsilon_0$ soit la masse de Dirac en 0. Observons que γ est uniquement déterminée à une constante additive près (principe du maximum). Lorsque ω est la mesure de Haar sur une courbe elliptique X, on obtient en fait $\lambda^{-1}f^*\omega = \omega$ et on peut prendre $\gamma = 0$. Lorsque ω est la forme de Fubini-Study sur $X = \mathbb{P}^1$, on peut prendre

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\lambda}\log[|P(z)|^2 + |Q(z)|^2] - \frac{1}{2}\log[1+|z|^2],$$

où z désigne la coordonnée d'une carte affine $\mathbb{C}$ dans laquelle $f = P/Q$ est donnée par le quotient de deux polynômes P, Q premiers entre eux, avec $\lambda = \max(\deg P, \deg Q)$.

Nous considérons à présent les images inverses de l'équation (1.1) par les itérés f^n. Une récurrence immédiate donne

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega = \omega + \Delta g_n, \text{ où } g_n := \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^j}\gamma\circ f^j.$$

La suite de fonctions (g_n) converge normalement sur X puisque les fonctions $\gamma \circ f^j$ sont de même norme uniforme, égale à celle de γ. Il s'ensuit que les mesures de probabilité du terme de gauche convergent, au sens faible des mesures, vers une mesure limite

$$\mu_f := \omega + \Delta g_f, \text{ où } g_f := \sum_{j\geq 0}\frac{1}{\lambda^j}\gamma\circ f^j.$$

1.1.2 Ensemble de Julia

Observons que la mesure μ_f ne dépend pas du choix de la forme ω : si $\tilde{\omega}$ est une autre mesure lisse de probabilité, alors $\tilde{\omega} = \omega + \Delta u$ pour une fonction u lisse donc bornée, d'où

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\tilde{\omega} = \frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega + \Delta\left(\frac{1}{\lambda^n}u \circ f^n\right) \to \mu_f.$$

En particulier, si la suite des itérés (f^n) est normale dans un ouvert U alors $\mu_f = 0$ dans U. En effet on peut supposer que les images $f^{n_i}(U)$, le long d'une sous-suite $n_i \to +\infty$, sont toutes incluses dans un petit ouvert $V \subset X$. Quitte à restreindre U et V, on peut supposer qu'il existe une mesure de probabilité lisse $\tilde{\omega}$ qui est nulle dans V. Il s'ensuit que

$$\mu_f = \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{\lambda^{n_i}}(f^{n_i})^*\tilde{\omega} = 0 \text{ dans } U.$$

Réciproquement supposons que la mesure μ_f s'annule dans un ouvert U. On obtient, dans cet ouvert,

$$|(f^n)'|^2\omega = (f^n)^*\omega = \lambda^n\left[\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega - \mu_f\right] = \Delta\psi_n,$$

où $\psi_n := \lambda^n[g_n - g_f]$ est uniformément bornée. Soit $\varphi \geq 0$ une fonction lisse à support compact dans U et qui vaut 1 sur un ouvert U' légèrement plus petit. Il vient

$$\int_{U'} |(f^n)'|^2\omega \leq \int_X \varphi(f^n)^*\omega = \int_X \psi_n dd^c\varphi \leq C_U,$$

pour une constante C_U indépendante de n qui tend vers 0 lorsque $\operatorname{diam} U \to 0$. La norme L^2 des dérivées des fonctions f^n est donc uniformément contrôlée dans tout ouvert relativement compact de U. Il s'ensuit que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normale dans U.

Rappelons que l'*ensemble de Fatou* de f est le plus grand ouvert de X dans lequel la suite des itérés est normale. L'*ensemble de Julia* est le complémentaire de l'ensemble de Fatou. Nous venons donc de montrer la

Proposition 1.1 *Le support de μ_f coïncide avec l'ensemble de Julia de f.*

1.1.3 Régularité du potentiel

La régularité du *potentiel* g_f de la mesure μ_f ne dépend pas de la forme ω : si $\tilde{\omega} = \omega + \Delta u$ est une autre mesure de probabilité lisse, il vient

$$\mu_f = \tilde{\omega} + \Delta\tilde{g}_f \text{ avec } \tilde{g}_f = g_f - u.$$

Lorsque f est un polynôme de degré $\lambda \geq 2$ et ω est la forme volume de Fubini-Study sur $X = \mathbb{P}^1$, le lien entre la fonction d'échappement G_f de f (introduite par H.Brolin [Bro]) et le potentiel g_f est donné, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$G_f(z) = \frac{1}{2}\log[1 + |z|^2] + g_f(z).$$

Nous reviendrons sur le cas des polynômes dans la section 1.5. N.Sibony a démontré (cf [CG]) que G_f est une fonction Höldérienne Nous en donnons ci-dessous une preuve élémentaire qui s'applique également aux fractions rationnelles et illustre l'avantage de travailler directement sur X.

Proposition 1.2 *La fonction g_f est Höldérienne d'exposant $\alpha > 0$, pour*

$$\alpha < \frac{\log\lambda}{\chi_{top}(f)}, \text{ où } \chi_{top}(f) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{x\in X}||D_x f^n||$$

désigne l'exposant de Lyapunov topologique de f.

Preuve. Soit d une distance sur X et $M = \sup_{x\in X}||D_x f||$. Une récurrence immédiate donne pour tous $(x, y) \in X^2$ et $j \in \mathbb{N}$,

$$d(f^j x, f^j y) \leq M^j d(x, y).$$

Comme γ est lisse, elle est en particulier Höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ pour tout $\alpha \leq 1$. Fixons $\alpha < \log\lambda/\log M$. Alors

$$|g_f(x) - g_f(y)| \leq \sum_{j\geq 0}\frac{1}{\lambda^j}|\gamma\circ f^j(x) - \gamma\circ f^j(y)| \leq C_\alpha d(x, y)^\alpha,$$

où $C_\alpha = \sum_{j\geq 0} M^{\alpha j}/\lambda^j < +\infty$. On peut raffiner l'argument précédent pour faire intervenir le taux de croissance asymptotique des dérivées en lieu et place de M qui n'est dynamiquement pas significatif. $\square$

Remarques 1.3 *Le caractère Höldérien de g_f a été établi pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$ par J.-Y.Briend et M.Kosek, puis généralisé par de nombreux auteurs (voir [S], [DS 1,6], [DG], [CL]).*

Lorsque $f = f_t$ dépend holomorphiquement d'un paramètre t, il suffit de modifier légèrement la preuve ci-dessus pour montrer que la dépendance $(x, t) \mapsto g_{f_t}(x)$ est höldérienne.

Une conséquence intéressante est que μ_f ne charge pas les ensembles de dimension de Hausdorff plus petite que $\log\lambda/\chi_{top}(f)$:

Corollaire 1.4 *Soit $B(p, r)$ un disque centré en $p \in X$ de rayon $r > 0$. Alors*

$$\mu_f(B(p, r)) \lesssim r^\alpha.$$

Preuve. Soit $0 \leq \chi \leq 1$ une fonction test telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{B}(p,r)$ et à support dans $B(p,2r)$. Observons que l'on ne change pas la mesure μ_f si on retranche une constante à son potentiel g_f. On peut donc supposer que $g_f(p) = 0$. Il résulte alors du théorème de Stokes que,

$$\mu_f(B(p,r)) \leq \int \chi d\mu_f = \int \chi\omega + \int g_f \Delta\chi \lesssim r^2 + \sup_{B(p,2r)} |g_f| \lesssim r^\alpha,$$

en observant que l'explosion en r^{-2} des dérivées secondes de χ est compensée par l'aire de $B(p,r)$. $\square$

Un résultat plus fin de A.Manning [Ma] et F.Przytycki [P] stipule que la dimension de la mesure μ_f est égal à $\log \lambda / \chi(\mu_f)$, où $\chi(\mu_f)$ désigne l'exposant de Lyapunov de μ_f (voir section 1.3).

1.2 Equidistribution des préimages

La mesure de probabilité limite μ_f possède des propriétés ergodiques remarquables. Il résulte de sa définition que $f^*\mu_f = \lambda\mu_f$. Il s'ensuit que μ_f est invariante ($f_*\mu_f = \mu_f$) et d'entropie maximale

$$h_{top}(f) = h_{\mu_f}(f) = \log \lambda,$$

car de jacobien constant. Nous reviendrons plus loin sur ces questions d'entropie (voir section 2.2). Nous nous intéressons ici au comportement de la suite $\nu_n = \lambda^{-n}(f^n)^*\nu$, lorsque ν est une mesure de probabilité quelconque.

1.2.1 Décroissance des corrélations

Lorsque ν a un potentiel continu, le comportement de ν_n est facile à étudier. Nous illustrons cette observation en donnant une preuve élémentaire de la décroissance exponentielle des corrélations.

Théorème 1.5 *La mesure μ_f est mélangeante. Plus précisément il existe $C > 0$ telle que pour toutes fonctions test φ, ψ,*

$$\left| \int_X \psi \cdot \varphi \circ f^n d\mu_f - \int_X \varphi d\mu_f \int_X \psi d\mu_f \right| \leq C ||\psi||_{\mathcal{C}^2} ||\varphi||_{L^\infty} \lambda^{-n}.$$

Preuve. Posons $c_\varphi := \int_X \varphi d\mu_f$ et $c_\psi = \int_X \psi d\mu_f$. Quitte à translater et dilater φ, on peut supposer $\varphi \geq 0$ et $c_\varphi = 1$. Comme μ_f a un potentiel continu, il en va de même de $\varphi\mu_f$. Ces mesures positives ont même masse, donc

$$\varphi\mu_f = \mu_f + \Delta u_\varphi,$$

où $u_\varphi \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ est uniquement déterminée si on impose $\sup_X u_\varphi = 0$. Il résulte de l'ellipticité du Laplacien que la norme $\mathcal{C}^0$ de u_φ est contrôlée par celle de φ : $||u_\varphi||_{L^\infty} \leq C||\varphi||_{L^\infty}$. En observant que $\varphi\circ f^n\mu_f = \lambda^{-n}(f^n)^*(\varphi\mu_f)$, il vient donc

$$\begin{aligned}\left|\int_X \psi\cdot\varphi\circ f^n d\mu_f - c_\varphi c_\psi\right| &= \left|\langle\psi, \lambda^{-n}(f^n)^*(\varphi\mu_f) - c_\varphi\mu_f\rangle\right| \\ &= \left|\langle\psi, \lambda^{-n}(f^n)^*(\varphi\mu_f - c_\varphi\mu_f)\rangle\right| = \left|\langle\Delta\psi, \lambda^{-n}u_\varphi\circ f^n\rangle\right| \\ &\leq \frac{C'}{\lambda^n}||\psi||_{\mathcal{C}^2}||\varphi||_{L^\infty}.\end{aligned}$$

□

Remarque 1.6 *La vitesse de mélange pour les endomorphismes de la sphère de Riemann a été estimée dans [FS 4].*

1.2.2 Estimées de volume

Nous nous intéressons à présent au cas plus difficile où $\nu = \varepsilon_a$ est une masse de Dirac en un point $x \in X$. Nous utilisons pour ce faire des estimées de volume. Notre outil principal est l'estimation suivante qui assure que le volume d'un borélien quelconque ne décroît pas trop vite sous itération.

Théorème 1.7 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset X$,*

$$Vol(f^j\Omega) \geq \exp\left(-\frac{C}{Vol(\Omega)}\lambda^j\right).$$

Les volumes sont calculés ici par rapport à une forme volume ω fixée.

Preuve. On commence par observer que si Ω est un borélien, alors $f_*\mathbf{1}_\Omega \leq \lambda\mathbf{1}_{f(\Omega)}$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1}_{f^j(\Omega)} \geq \lambda^{-j}(f^j)_*\mathbf{1}_\Omega$. Il s'ensuit

$$\mathrm{Vol}(f^j\Omega) \geq \frac{1}{\lambda^j}\int_\Omega (f^j)^*\omega = \frac{1}{\lambda^j}\int_\Omega |(f^j)'|^2_\omega\,\omega,$$

où $|f'|^2_\omega$ désigne le jacobien (réel) de f par rapport à la forme volume ω. La concavité du logarithme implique alors

$$\mathrm{Vol}(f^j\Omega) \geq \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\lambda^j}\exp\left[\frac{2}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\int_\Omega \log|(f^j)'|_\omega\,\omega\right].$$

Pour minorer cette dernière intégrale, on observe que $\log|f'|_\omega$ est une différence de fonctions quasisousharmoniques, en particulier

$$\log|f'|_\omega \geq u, \quad \text{avec } u \leq 0 \ \text{ et } \ dd^c u \geq -C_1\omega,$$

pour une constante C_1 suffisamment grande. Comme $(f^j)' = \Pi_{l=0}^{j-1} f'\circ f^l$, on obtient

$$\int_\Omega \log|(f^j)'|_\omega\,\omega \geq \sum_{l=0}^{j-1}\lambda^l\left[\int_X \frac{1}{\lambda^l}u\circ f^l\omega\right].$$

Or la suite de fonctions $(\lambda^{-l} u \circ f^l)$ est relativement compacte dans $L^1(X)$. En effet $u_l := C_1 g_l + \lambda^{-l} u \circ f^l$ est une suite uniformément majorée de fonctions $C_1\omega$-sousharmoniques telles que

$$\int_X u_l d\mu_f = \sum_{p=0}^{l-1} \frac{1}{\lambda^p} \int_X \gamma d\mu_f + \frac{1}{\lambda^l} \int_X u d\mu_f \geq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \int_X \gamma d\mu_f + \int_X u d\mu_f > -\infty.$$

On en déduit qu'il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\mathrm{Vol}(f^j \Omega) \geq \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\lambda^j} \exp\left(-\frac{C_2}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \lambda^j\right).$$

L'estimée annoncée résulte enfin d'inégalités élémentaires. □

Observons que lorsque f est (localement) conjugé à z^λ près de 0, alors $f^j \sim z^{\lambda^j}$ et le volume de petits disques D centrés à l'origine de rayon $r > 0$, décroît sous itération comme $r^{2\lambda^j} = \exp(-2[-\log r]\lambda^j)$. L'estimation du Théorème 1.7 est donc essentiellement optimale.

Remarque 1.8 *Les premières estimées de volume ont été mises au point dans le cadre des applications birationnelles de $\mathbb{C}^2$ pour construire et caractériser les courants invariants par la dynamique [BS 1], [FS 1], [Dil 1], [FaG]. Ces applications sont presque inversibles. J.E.Fornaess et N.Sibony ont établi dans [FS 4] des estimées de volume pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$, dont les ramifications sont plus importantes. C.Favre et M.Jonsson ont mené à bien une étude systématique de ces estimées [FaJ 1].*

L'estimation du Théorème 1.7 est tirée de [G 2,4], où l'auteur développe des estimées moins fines, mais valables dans un contexte plus général. Elles sont suffisantes pour un certain nombre d'applications. Nous l'illustrons ici en démontrant l'équidistribution des préimages de points non-exceptionnels.

Soit ν une mesure de probabilité sur X. Nous cherchons à savoir sous quelle condition la suite de mesures de probabilité $\nu_n = \lambda^{-n}(f^n)^*\nu$ converge vers μ_f. Soit $u \in L^1(X)$ un potentiel de ν, i.e.

$$\nu = \omega + \Delta u.$$

La fonction u est une fonction *quasisousharmonique*, i.e. localement différence d'une fonction lisse et d'une fonction sousharmonique. En particulier u est semi-continue supérieurement (s.c.c.) donc majorée sur X : quitte à retrancher une constante, on supposera dans la suite $u \leq 0$. Il résulte du Théorème de représentation de Riesz que $e^{-\alpha u} \in L^1(X)$, pour $\alpha > 0$ suffisamment petit : il faut choisir $\alpha < 2[\sup_{x \in X} \nu(\{x\})]^{-1}$. Notons en particulier que $e^{-\alpha u} \in L^1(X)$ pour tout $\alpha > 0$, lorsque ν *n'a pas d'atome*. Observons que

$$\nu_n := \frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\nu = \frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega + \Delta u_n, \text{ où } u_n := \frac{1}{\lambda^n} u \circ f^n.$$

Montrer que ν_n converge vers μ_f revient ainsi à montrer que u_n converge vers 0 dans $L^1(X)$. Il résulte du caratère quasisousharmonique de u que la suite (u_n) est relativement compacte dans $L^1(X)$ (voir [GZ 1] pour des critères de compacité des fonctions qpsh). Considérons, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\Omega_n^\varepsilon := \{x \in X \,/\, u_n < -\varepsilon\}\,.$$

Il suffit de savoir montrer que $\mathrm{Vol}(\Omega_n^\varepsilon) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ pour conclure à $u_n \to 0$. On observe que

$$f^n(\Omega_n^\varepsilon) = \{x \in X \;\, u(x) < -\varepsilon\lambda^n\}\,.$$

Or le volume de l'ensemble de gauche ne décroît pas trop vite grâce aux estimées de volume (Théorème 1.7), et celui du membre de droite décroît exponentiellement vite : comme $e^{-\alpha u} \in L^1(X)$, il résulte de l'inégalité de Chebyshev que pour tout $A < 2[\sup_{x\in X} \nu(\{x\})]^{-1}$, il existe $C_A > 0$ tel que

$$\mathrm{Vol}(u < -\varepsilon\lambda^n) \leq C_A \exp(-A\varepsilon\lambda^n).$$

En mettant bout à bout ces inégalités, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{Vol}(\Omega_n^\varepsilon) \leq \frac{1}{A\varepsilon}.$$

Lorsque ν n'a pas d'atome, on peut prendre A arbitrairement grand et conclure à $\nu_n \to \mu_f$. En remplaçant u par u_{n_0} dans le raisonnement précédent, on obtient la version plus précise :

$$\nu_n \to \mu_f \;\;\text{ssi}\;\; \sup_{x\in X} \nu_n(\{x\}) \to 0.$$

Il reste donc à analyser la partie atomique de la suite ν_n. Elle est contrôlée par le degré topologique local $d(f^n, x)$ de f^n au point x via la relation

$$\nu_n(\{x\}) = \frac{d(f^n,x)\nu(\{f^n x\})}{\lambda^n}.$$

Il faut donc contrôler le comportement asymptotique de la suite $(d(f^n, x))$ par rapport à λ^n. C'est l'objectif du lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme/Définition 1.9 *On définit l'ensemble des points exceptionnels par*

$$\mathcal{E}_f := \{x \in X \,/\, d(f,x) = d(f, f(x)) = d(f, f^2x) = \lambda\}.$$

Alors Card($\mathcal{E}_f$) ≤ 2. Plus précisément,

- *soit $\mathcal{E}_f$ est vide ;*
- *soit $\mathcal{E}_f$ est constitué d'un point ; dans ce cas $X = \mathbb{P}^1$ et f est conjugué à un polynôme par une homographie qui envoie $\mathcal{E}_f$ sur $\{\infty\}$;*

– *soit $\mathcal{E}_f$ est consitué de deux points ; dans ce cas $X = \mathbb{P}^1$ et f est conjugué à z^λ ou $z^{-\lambda}$ par une homographie qui envoie $\mathcal{E}_f$ sur $\{0, \infty\}$.*

Il s'avère que $\mathcal{E}_f$ est le plus grand ensemble fini totalement invariant, $f^{-1}(\mathcal{E}_f) = \mathcal{E}_f$ (voir [BeM], [CG], [Mi 1] pour ce point de vue plus traditionnel). Il résulte de ce qui précède qu'on a le résultat d'équidistribution suivant :

Théorème 1.10 *Soit ν une mesure de probabilité sur X. Alors*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\nu \to \mu_f \ \ \text{ssi} \ \ \nu(\mathcal{E}_f) = 0.$$

En particulier $\lambda^{-n}(f^n)^*\varepsilon_a \to \mu_f$ ssi a n'est pas un point exceptionnel.

Preuve. L'ensemble $\mathcal{E}_f$ est totalement invariant : les préimages d'une mesure qui a un atome dans $\mathcal{E}_f$ ne peuvent donc pas s'équidistribuer selon μ_f.

Supposons réciproquement qu'une mesure de probabilité ν n'a pas d'atome dans $\mathcal{E}_f$. Le degré topologique local $d(f^n, x) = \Pi_{j=0}^{n-1} d(f, f^j x)$ de f^n en un point x en lequel ν a un atome est donc majoré par γ^n, avec $\gamma < \lambda$. Il s'ensuit que $\sup_{x \in X} \nu_n(\{x\}) \to 0$, donc $\nu_n \to \mu_f$ d'après la discussion qui précède le Lemme 1.9. $\square$

1.3 Exposant de Lyapunov

Nous avons construit ci-dessus une mesure μ_f ergodique dont les potentiels sont continus. En particulier $\log^+ ||Df|| \in L^1(\mu_f)$. Il résulte du Théorème ergodique de Birkhoff que pour μ_f-presque tout x, la suite $n \mapsto n^{-1} \log ||Df_x^n||$ converge vers un nombre $\chi(\mu_f)$ indépendant de x : c'est l'exposant de Lyapunov de μ_f. Comme μ_f est d'entropie $\log \lambda$, l'inégalité de Margulis-Ruelle assure [R] que

$$\chi(\mu_f) \geq \frac{1}{2} \log \lambda > 0.$$

Nous indiquons un peu plus loin une preuve élémentaire et "complexe" de cette inégalité due à M.Lyubich. Nous cherchons à savoir pour l'instant s'il est possible d'améliorer cette inégalité.

Lorsque $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique, f est un revêtement étale dont on montre aisément qu'il est induit par une application affine $z \mapsto az+b$ qui préserve le réseau Λ. Il s'ensuit que $f^*dz = adz$ et la mesure de Lebesgue $\mu = \frac{i}{2} dz \wedge \overline{dz}$ est de jacobien constant, $f^*\mu = |a|^2\mu$, avec $|a|^2 = \lambda$: on a donc $\mu = \mu_f$. Observons également que f est de différentielle constante, $D_x f = aId$, donc

$$\chi(\mu_f) = \frac{1}{2} \log \lambda$$

dans ce cas. Comme f commute avec l'involution $\sigma : x \mapsto -x$, elle induit un endomorphisme de degré λ sur le quotient $X/\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{P}^1$. Un tel endomorphisme de la sphère de Riemann est un *exemple de Lattès* (voir le texte de S.Cantat [Ca 4] pour une présentation synthétique de ces exemples).

Les endomorphismes de la sphère de Riemann $X = \mathbb{P}^1$ sont les fractions rationnelles $f = P/Q$ où P, Q sont des polynômes sans facteur commun dont les degrés vérifient $\max(\deg P, \deg Q) = \lambda$. Lorsque f est un exemple de Lattès, la mesure μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on obtient $\chi(\mu_f) = \frac{1}{2} \log \lambda$. On ne peut donc pas, en général, améliorer la minoration de l'exposant de Lyapunov de μ_f. Il résulte cependant des travaux de F.Ledrappier [L] et A.Zdunik [Z] que cette égalité ne se produit que lorsque f est un exemple de Lattès. Il est donc naturel d'étudier comment $\chi(\mu_f)$ varie lorsque l'on fait bouger f dans l'espace des paramètres.

Soit $(f_t)_{t \in M}$ une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ de degré $\lambda \geq 2$, où M désigne une variété complexe. Rappelons que la fonction de Green dynamique de f_t est

$$g_t(x) := \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\lambda^j} \gamma_t \circ f_t^j(x),$$

où $\gamma_t \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ est déterminé de façon unique par

$$\frac{1}{\lambda} f_t^* \omega = \omega + \Delta \gamma_t \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{P}^1} \gamma_t \omega = 0.$$

Notons que $(x, t) \mapsto g_t(x)$ est une fonction Höldérienne (voir Remarques 1.3). On note $\mu_t = \omega + \Delta g_t$ la mesure d'entropie maximale de f_t, et

$$\chi(t) = \int_{\mathbb{P}^1} \log |f_t'| d\mu_t$$

l'exposant de Lyapunov de (f_t, μ_t).

Le point de vue potentialiste permet de donner une preuve élémentaire du résultat suivant –qui améliore le Théorème B de R.Manẽ [Mn].

Proposition 1.11 *L'exposant $\chi(t)$ est une fonction plurisousharmonique et höldérienne de t.*

Notons que la régularité höldérienne de l'exposant de Lyapunov peut être également vue comme une conséquence d'une formule explicite de G.Bassanelli et F.Berteloot [BaBe], valable en toute dimension. Le caractère psh est démontré dans un cadre plus général par T.C.Dinh et N.Sibony (voir Proposition 3.8.3 dans [DS 1]), en suivant l'approche de E.Bedford et J.Smillie (voir Théorème 5.5 dans [BS 2]).

Preuve. On intègre par parties pour obtenir

$$\chi(t) = \int \log|f_t'|\omega + \sum_{f_t'(c_t)=0} g_t(c_t),$$

où les c_t désignent les points critiques de f_t. La première somme est une fonction lisse de t. Comme $(x,t) \mapsto g_t(x)$ est höldérienne, et comme la seconde somme est une fonction symétrique des points critiques, racines de l'équation algébrique $f_t'(x) = 0$, on obtient la continuité annoncée.

La plurisousharmonicité provient de ce que χ est limite uniforme de la suite de fonctions psh

$$\chi_n(t) = \int_{\mathbb{P}^1} \log|f_t'| \frac{1}{\lambda^n}(f_t^n)^*\omega = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{P}^1} (f_t^n)_*(\log|f_t'|)\cdot\omega.$$

La convergence résulte de ce que $\Delta \log|f_t'|$ peut s'exprimer comme une différence de deux mesures de Radon positives, ainsi

$$|\chi(t) - \chi_n(t)| = \left| \int_{\mathbb{P}^1} \Delta \log|f_t'| \cdot (g_t - g_{n,t}) \right| \leq C ||g_t - g_{n,t}||_{L^\infty(\mathbb{P}^1)}.$$

$\square$

Il est intéressant d'étudier les propriétés des courants positifs $(dd^c\chi)^j$, $1 \leq j \leq \dim_{\mathbb{C}} M$. Le fait que $t \mapsto \chi(t)$ soit plurisousharmonique et atteigne un minimum aux valeurs de t pour lesquelles f_t est un exemple de Lattès montre que ceux-ci jouent un rôle spécial dans l'espace des paramètres. Nous renvoyons le lecteur à [DeM], [BaBe], [DuF] pour quelques résultats dans cette direction.

1.4 L'approche de Lyubich

M.Lyubich a le premier donné une construction de la mesure d'entropie maximale pour les endomorphismes rationnels f de $\mathbb{P}^1$ ([Ly], voir également [FLM]). Son approche consiste à étudier les branches inverses de f^n pour en déduire des propriétés de l'opérateur de Ruelle

$$\begin{array}{rcl} R_f : \mathcal{C}^0(\mathbb{P}^1) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{P}^1) \\ \varphi & \mapsto & \frac{1}{\lambda} f_*\varphi. \end{array}$$

Etudier le comportement de la suite d'opérateurs $\lambda^{-n}(f^n)^*(\cdot)$ sur les mesures revient en effet, par dualité, à itérer l'opérateur R_f. Bien que la construction de μ_f due à M.Lyubich soit techniquement plus compliquée que celle donnée plus haut, son étude des branches inverses lui permet de montrer que

- $\chi(\mu_f) \geq \frac{1}{2}\log\lambda > 0$;
- les points répulsifs s'équidistribuent selon μ_f ;

– μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale.
Nous allons esquisser les preuves de ces résultats qui reposent toutes sur le lemme suivant :

Lemme 1.12 *Soit $\mathcal{C}_f$ l'ensemble critique de f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $l = l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq l$ et pour tout disque D qui évite $\cup_{j=1}^{l} f^j(\mathcal{C}_f)$, on peut construire $(1-\varepsilon)\lambda^n$ branches inverses f_i^{-n} de f^n sur D avec*

$$diam(f_i^{-n} D) \leq C_\varepsilon \lambda^{-n/2}.$$

Nous démontrons le lemme un peu plus loin et commençons par en tirer les conséquences annoncées.

Exposant de Lyapunov. Soit $x \in X \setminus \cup_{j\geq 0} f^j(\mathcal{C}_f)$. C'est un point générique pour μ_f. On peut considérer des branches inverses f_i^{-n} de f^n sur un petit disque $D(x,\varepsilon)$. Comme le diamètre de $f_i^{-n} D(x,\varepsilon)$ décroît en $\lambda^{-n/2}$, il résulte des inégalités de Cauchy que

$$|(f^n)'(x^{-n})| = \left| \frac{1}{(f^{-n})'(x)} \right| \geq \frac{1}{C_\varepsilon} \lambda^{n/2},$$

où x^{-n} désigne l'une des préimages de x. Notons $x^{-1}, \ldots, x^{-n}$ une préhistoire générique de x choisie parmi les $(1-\varepsilon)\lambda^n$ préimages construites dans le Lemme 1.12. Il résulte du Théorème de Birkhoff que

$$\chi(\mu_f) = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x^{-i})| = \lim \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x^{-n})| \geq \frac{1}{2} \log \lambda.$$

Points répulsifs. Rappelons qu'il y a $\lambda^n + 1$ points périodiques d'ordre $\leq n$, comptés avec multiplicité. Cela résulte de la formule des points fixes de Lefschetz (voir section 2.3). On peut également s'en convaincre ici par un calcul élémentaire : si par exemple $f = P/Q$ est un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$, on peut supposer que l'infini n'est pas un point fixe –quitte à conjuguer par une transformation de Moebius– pour une carte affine $\mathbb{C}$. Cela revient à dire que le polynôme Q est de degré λ. Les points périodiques d'ordre $\leq n$ sont alors les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation polynomiale $f^n(z) = z$ qui est de degré $\lambda^n + 1$. On montre (voir [CG]) que tous les points périodiques –sauf un nombre fini d'entre eux– sont de type répulsif. Considérons

$$\nu_n := \frac{1}{\lambda^n} \sum_{f^n x = x,\ x \text{ répulsif}} \varepsilon_x,$$

et soit ν une valeur d'adhérence de ν. Alors ν est une mesure de probabilité sur X dont nous allons montrer qu'elle coïncide avec μ_f. Il suffit de montrer que $\mu_f(D) \leq \nu(D)$, pour tout petit disque $D = D(x,r)$.

Soit D un tel disque. Comme μ_f ne charge pas l'ensemble postcritique $\cup_{j\geq 0} f^j(\mathcal{C}_f)$, on peut supposer que D ne rencontre pas $\cup_{j=1}^l f^j(\mathcal{C}_f)$ et appliquer le Lemme 1.12. On note D_i^{-n} les petits disques images de D par les branches inverses de f^n. Soit D' un disque légèrement plus petit que D. Comme μ_f est mélangeante, on obtient pour n assez grand,

$$\mu_f(D)^2 \simeq \mu_f(D)\mu_f(D') \simeq \mu_f(f^{-n}D \cap D') \simeq \sum_{i=1}^{(1-\varepsilon)\lambda^n} \mu_f(D_i^{-n} \cap D').$$

Or soit $D_i^{-n} \cap D' = \emptyset$, soit D_i^{-n} est relativement compact dans D car D_i^{-n} a un petit diamètre. Dans ce dernier cas f_i^{-n} est une contraction de D dans lui même et produit donc un point périodique répulsif d'ordre $\leq n$. On obtient ainsi

$$\mu_f(D_i^{-n} \cap D') \leq \mu_f(D_i^{-n}) \cdot \lambda^n \nu_n(D_i^{-n}) = \mu_f(D)\nu_n(D_i^{-n})$$

car μ_f est de jacobien constant et f^n est injective sur D_i^{-n}. Comme les D_i^{-n} que nous considérons sont deux à deux disjoints et tous inclus dans D, il vient

$$\mu_f(D)^2 \lesssim \mu_f(D)\nu_n(D),$$

d'où le résultat.

Unicité. Soit ν une mesure invariante ergodique d'entropie positive. Observons que ν ne charge pas les points, en particulier $\nu(\mathcal{E}_f) = 0$. Il résulte du Théorème 1.8 que soit $\nu = \mu_f$, soit $f^*\nu \neq \lambda\nu$.

Supposons que ν n'est pas de jacobien constant. On construit alors un ouvert U plein (i.e. $\nu(U) = \mathrm{Vol}(U) = 1$), simplement connexe de $X \setminus f(\mathcal{C}_f)$ dont les préimages $U_1, \ldots, U_\lambda = f^{-1}(U)$ vérifient $\nu(U_1) > \cdots > \nu(U_\lambda)$.

On peut alors coder la dynamique de f sur son graphe itéré grâce à la partition $U_1, \ldots, U_\lambda$ et montrer que $h_\nu(f) < \log \lambda$. Nous renvoyons le lecteur à [Ly], [BrD 2] pour une preuve détaillée de ce dernier point qui assure que μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale.

Preuve du Lemme 1.12. On note τ le nombre de valeurs critiques de f et $V_l := \cup_{j=1}^l f^j(\mathcal{C}_f)$. Soit D un disque qui évite V_l. L'entier l sera spécifié plus loin en fonction de $\varepsilon > 0$ qui est fixé par l'énoncé du lemme.

On construit des branches inverses f_i^{-n} de f^n par récurrence : comme D évite les valeurs critiques V_l de f^l, f^l est un revêtement étale de degré λ^l en restriction à D et on peut donc construire des branches inverses $f_1^{-1}, \ldots, f_{\lambda^l}^{-l}$ de f^l sur D d'images disjointes D_i^{-l}. Si D_i^{-l} ne rencontre pas les valeurs critiques de f, on peut fabriquer λ branches inverses de f sur D_i^{-l} qui définissent λ branches inverses de f^{l+1} sur D. Or il y a au plus τ disques D_i^{-l} qui rencontrent V_1. Si on jette ces τ disques (éventuels), on obtient ainsi $\lambda^{l+1}(1 - \tau/\lambda^{l+1})$ branches inverses de f^{l+1} sur D. Une récurrence montre alors que pour tout $n \geq l+1$, on peut construire au moins

$$\lambda^n \left[1 - \frac{\tau}{\lambda^{l+1}} - \cdots - \frac{\tau}{\lambda^n}\right] \geq \lambda^n[1 - \varepsilon/2]$$

branches inverses de f^n sur D si l'on fixe $l = l_\varepsilon$ assez grand pour que $\tau\lambda^{-l}/(1-1/\lambda) < \varepsilon/2$.

On veut à présent contrôler le diamètre des images D_i^{-n}. Observons que

$$\sum_{i=1}^{(1-\varepsilon/2)\lambda^n} \mathrm{Aire}(D_i^{-n}) \le \mathrm{Aire}(X) = 1,$$

si on calcule l'aire par rapport à une forme volume normalisée. Il s'ensuit qu'au moins $(1-\varepsilon)\lambda^n$ des disques D_i^{-n} ont une aire qui vérifie

$$\mathrm{Aire}(D_i^{-n}) \le \frac{2}{\varepsilon}\lambda^{-n}.$$

On en déduit un contrôle des diamètres : quitte à réduire légèrement D, on peut supposer qu'on contrôle en fait l'aire de disques légèrement plus grands $\tilde{D}_i^{-n} = f_i^{-n}(\tilde{D})$, où D est relativement compact dans $\tilde{D}$. Le module des anneaux $\tilde{D}_i^{-n} \setminus D_i^{-n}$ étant constant, égal à $mod(\tilde{D} \setminus D)$, on obtient

$$\mathrm{diam}(D_i^{-n}) \lesssim [\mathrm{Aire}(\tilde{D}_i^{-n})]^{1/2} \lesssim \lambda^{-n/2}.$$

Nous renvoyons le lecteur à l'Appendice de [BrD 2] pour plus de détails sur cette estimation aire-diamètre. $\square$

Notons qu'on peut se passer de cette estimation aire-diamètre en dimension 1 : il résulte en effet du Théorème de Koebe que le contrôle de l'aire des D_i^{-n} suffit à contrôler les dérivées $(f^{-n})'(x)$ et conduit ainsi à la minoration de l'exposant de Lyapunov. Pour le mélange, on a juste besoin de savoir que le diamètre des D_i^{-n} converge vers 0, ce qui se voit facilement par un argument de familles normales. Nous avons néanmoins indiqué cette estimation due à J.-Y.Briend et J.Duval [BrD 2] (et qui ne figure pas dans [Ly]), car c'est un argument crucial en dimension supérieure où l'on ne dispose pas du Théorème de Koebe. Comme on l'aura compris, toutes les preuves proposées dans cette première partie sont modelées pour pouvoir s'adapter directement en dimension supérieure.

1.5 Le cas des polynômes

Nous interprétons ici les objets introduits jusqu'à présent lorsque f est un *polynôme* de degré $\lambda \ge 2$. Quitte à conjuguer f par un automorphisme $z \mapsto az + b$ convenablement choisi, on peut toujours supposer – et nous le ferons – que f est *centré*, *unitaire*, i.e.

$$f(z) = z^\lambda + a_{\lambda-2}z^{\lambda-2} + \cdots + a_0,$$

où $(a_0, \ldots, a_{\lambda-2}) \in \mathbb{C}^{\lambda-1}$.

Observons que le point ∞ à l'infini joue un rôle spécial ici : c'est un point fixe superattractif ($f'(\infty)=0$) qui est totalement invariant : $\infty \in \mathcal{E}_f$. Il s'ensuit que si $z \in \mathbb{C}$, soit l'orbite $(f^n z)_{n\in\mathbb{N}}$ de z est une suite bornée, soit elle converge vers ∞. Notons $\mathcal{B}(\infty)$ le bassin d'attraction (dans $\mathbb{C}$) de l'infini et

$$K_f := \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, (f^n z)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}.$$

L'ensemble K_f est appelé ensemble de Julia rempli. Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante.

Lemme 1.13 *L'ensemble K_f est un compact simplement connexe dont le bord coïncide avec l'ensemble de Julia J_f.*

Preuve. Rappelons que $\mu_f = \omega + \Delta g_f$, où $g_f = \sum \lambda^{-j}\gamma \circ f^j$ et γ est solution de l'équation $\lambda^{-1} f^*\omega = \omega + \Delta\gamma$. La forme de Fubini-Study ω est donnée par $\Delta\frac{1}{2}\log[1+|z|^2]$ dans $\mathbb{C}$. Posons

$$G_f(z) = \frac{1}{2}\log[1+|z|^2] + g_f(z).$$

C'est une fonction sousharmonique et continue dans $\mathbb{C}$ telle que $\Delta G_f = \mu_f$. Si l'on choisit – comme nous l'avons implicitement fait dans le paragraphe 1.1.1 – $\gamma(z) = \frac{1}{2\lambda}\log[1+|f(z)|^2] - \frac{1}{2}\log[1+|z|^2]$, on obtient

$$G_f(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\lambda^n}\log\left[1+|f^n(z)|^2\right].$$

En particulier $G_f \geq 0$,

$$(G_f = 0) = K_f \text{ et } (G_f > 0) = \mathcal{B}(\infty).$$

Il s'ensuit que K_f est un compact et $J_f = \text{Supp}\mu_f \subset \partial K_f$ (par la Proposition 1.1, car $G_f \equiv 0$ dans l'intérieur de K_f et $G_f = \lim \lambda^{-n}\log|f^n|$ est harmonique dans $\mathcal{B}(\infty)$). Or G_f ne peut pas être harmonique en un point $p \in \partial K_f$ par le principe du minimum, donc $J_f = \partial K_f$.

Enfin il résulte du principe du maximum que $\mathcal{B}(\infty)$ est connexe, donc K_f est simplement connexe. □

L'ensemble K_f est donc constitué de J_f et de ses trous (composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus J_f$). La fonction $G_f(z) = g_f(z) + \frac{1}{2}\log[1+|z|^2]$, introduite par H.Brolin [Bro], possède de nombreuses propriétés. Son invariance $G_f \circ f = \lambda G_f$ reflète l'invariance de la mesure μ_f, $f^*\mu_f = \lambda\mu_f$, qu'on appelle parfois mesure de Green en raison de l'interprétation suivante.

Proposition 1.14 *La fonction G_f est la fonction de Green du compact K_f avec pôle à l'infini. Elle admet le développement asymptotique*

$$G_f(z) = \log|z| + o(1).$$

En particulier K_f est de capacité logarithmique égale à 1.

La preuve est une conséquence immédiate de ce que $G_f \geq 0$ est harmonique dans $\mathbb{C} \setminus K_f = \mathcal{B}(\infty)$ et nulle sur K_f. Le développement asymptotique provient de ce que nous avons pris f *unitaire*. Il assure également que G_f coïncide avec le potentiel logarithmique de μ_f,

$$V_{\mu_f}(z) = \int_{\mathbb{C}} \log|z-w| d\mu_f(w).$$

En effet $\Delta G_f = \Delta V_{\mu_f} = \mu_f$, donc $G_f - V_{\mu_f}$ est une fonction harmonique à croissance logarithmique dans $\mathbb{C}$: c'est donc une constante qui vaut zéro puisque ces deux fonctions ont le même développement asymptotique, $G_f(z) = \log|z| + o(1) = V_{\mu_f}(z)$.

Exemples 1.15

1) Si $f(z) = z^\lambda$ alors $G_f(z) = \log^+|z| := \max(\log|z|, 1)$. L'ensemble K_f est le disque unité fermé et μ_f est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité S^1.

2) Le polynôme de Tchebychev $g(z) = z^2 - 2$ est semi-conjugué au polynôme $f(z) = z^2$ par l'application $\Phi(z) = z + 1/z$, via $g \circ \Phi = \Phi \circ f$. On en déduit que $K_g = J_g$ est l'intervalle $[-2, 2]$ et

$$G_g(z) = \max\left(\log\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right|; \log\left|\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}\right|\right).$$

Notons en particulier que G_g est Höldérienne d'exposant $1/2$ (mais pas plus) et $\chi_{top}(g) = \log 4$ puisque $g'(2) = 4$, $g(2) = 2$ et $\sup_{J_g}|g'| = 4$. La régularité obtenue à la Proposition 1.2 est donc optimale.

L'exposant de Lyapunov $\chi(\mu_f)$ d'un polynôme f par rapport à la mesure d'entropie maximale μ_f s'exprime simplement en fonction de la fonction G_f, comme l'ont observé A.Manning [Ma] et F.Przytycki [P].

Proposition 1.16 *Soit f un polynôme unitaire de degré $\lambda \geq 2$. Alors*

$$\chi(\mu_f) = \log\lambda + \sum_{f'(c)=0} G_f(c).$$

Preuve. Il résulte du Théorème ergodique de Birkhoff que

$$\chi(\mu_f) = \int_{\mathbb{C}} \log|f'| d\mu_f.$$

Or $f'(z) = \lambda \Pi_{i=1}^{\lambda-1}(z - c_i)$, où les c_i sont les points critiques de f, i.e. les points $c \in \mathbb{C}$ tels que $f'(c) = 0$. Comme G_f coïncide avec le potentiel logarithmique de μ_f (voir la discussion qui précède les Exemples 1.15), il vient

$$\chi(\mu_f) = \log\lambda + \sum_{f'(c)=0} \int \log|z-c| d\mu_f(z) = \log\lambda + \sum_{f'(c)=0} G_f(c).$$

□

Lorsque l'ensemble de Julia est connexe (i.e. lorsque tous les points critiques sont dans K_f, voir [CG]), on obtient $\chi(\mu_f) = \log\lambda$. Il y a donc en général un décalage entre l'exposant de Lyapunov mesurable $\chi(\mu_f)$ et l'exposant de Lyapunov topologique $\chi_{top}(f)$, qui oscille dans ce cas entre $\log\lambda$ et $2\log\lambda$ (voir [Buf 1]).

Chapitre 2

Invariants numériques

Dans toute la suite X désigne une variété kählérienne compacte de dimension k munie d'une forme de Kähler ω, $f : X \to X$ désigne une transformation méromorphe dominante, et on note I_f l'ensemble d'indétermination de f : c'est un sous-ensemble analytique de X de codimension au moins deux, constitué des points en lesquels f n'est pas continue.

Nous introduisons dans ce chapitre des invariants numériques qui permettent de mesurer la complexité dynamique de la transformation f. Les degrés dynamiques $\lambda_j(f)$ – *section 2.1* – jouent un rôle central dans toute la suite. Ils ont été introduits par S.Friedland [Fr] lorsque f est *holomorphe*, puis étudiés par de nombreux auteurs lorsque f est *méromorphe* [RS], [FaG], [DF], [G 1,3,5], [DS 1,3,4], [BK 1,2,3].

Lorsque les ratios $\lambda_j(f)/\lambda_{j+1}(f)$ sont différents de 1, on peut établir [RS] des propriétés d'équidistribution par image directe ($\lambda_j(f)/\lambda_{j+1}(f) > 1$) ou par image inverse ($\lambda_j(f)/\lambda_{j+1}(f) < 1$) : c'est l'intérêt de l'hypothèse d'*hyperbolicité cohomologique*.

Les degrés dynamiques permettent d'estimer l'entropie topologique de la transformation f (*section 2.2.1*) en suivant une idée de M.Gromov [Gr 1], et sa généralisation au cas méromorphe [G 5,7], [DS 3,4]. Ils permettent également de majorer l'entropie métrique d'une mesure invariante (*section 2.2.2*), ainsi que le nombre de points périodiques (*section 2.3*). Nous donnons dans la *section 2.4* quelques exemples de transformations cohomologiquement hyperboliques. Le lecteur en trouvera de nombreux autres dans le texte de S.Cantat [Ca 4].

2.1 Degrés dynamiques

Etant donnée une forme différentielle lisse θ sur X, on définit son image inverse $f^*\theta$ par f de la façon suivante : soit $\Gamma_f \subset X \times X$ le graphe de f, et soit $\tilde{\Gamma}_f$ une désingularisation de Γ_f. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Gamma}_f & \\ \overset{\pi_1}{\swarrow} & & \overset{\pi_2}{\searrow} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

où π_1, π_2 sont des applications holomorphes. On pose $f^*\theta := (\pi_1)_*(\pi_2^*\theta)$, où l'on pousse la forme lisse $\pi_2^*\theta$ par π_1 au sens des courants. De façon analogue, on définit l'image directe de θ par

$$f_*\theta := (\pi_2)_*(\pi_1^*\theta).$$

On vérifie aisément que ces définitions ne dépendent pas du choix de la désingularisation de Γ_f. Observons que les opérations f^*, f_* préservent les degrés, les bidegrés, le caractère réel et les bords ; elles induisent donc des actions linéaires sur les espaces de cohomologie $H^{l,l}(X, \mathbb{R})$.

Définition 2.1 *Pour $0 \leq l \leq k$, on note $r_l(f)$ le rayon spectral de l'action linéaire $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{R}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{R})$ et on pose*

$$\rho_l(f) := \liminf_{n \to +\infty} [r_l(f^n)]^{1/n}.$$

C'est le rayon spectral dynamique d'ordre l de f.

Notons que $r_l(f^n) \neq r_l(f)^n$ en général –sauf bien sûr pour les endomorphismes holomorphes. C'est cette observation qui a poussé S.Friedland à introduire les degrés $\rho_l(f)$ dans [Fr] : ceux-ci vérifient $\rho_l(f^n) = [\rho_l(f)]^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut bien sûr introduire des quantités analogues –notons les $r_l(f_*)$, $\rho_l(f_*)$– correspondant aux actions linéaires induites par f_*. Il résulte de la définition que ces actions f^*, f_* sont adjointes l'une de l'autre pour la forme d'intersection sur X, i.e.

$$\langle f^*\theta, \eta \rangle = \langle \pi_2^*\theta, \pi_1^*\eta \rangle = \langle \theta, f_*\eta \rangle,$$

pour toutes formes lisses fermées θ, η de degrés complémentaires. On en déduit que $r_l(f_*) = r_{k-l}(f)$ et $\rho_l(f_*) = \rho_{k-l}(f)$.

Observons que $H^{0,0}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ (fonctions constantes) et $H^{k,k}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. L'opérateur f^* agit sur le premier par multiplication par la constante $1 = r_0(f) = \rho_0(f)$, et sur le deuxième par multiplication par le degré topologique (nombre de préimages par f d'un point générique). On a donc toujours $r_k(f) = \rho_k(f)$ et $\rho_k(f)$ est le **degré topologique de** f.

Exemple 2.2 *Lorsque $X = \mathbb{P}^k$, tous les espaces de cohomologie $H^{l,l}(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$ sont de dimension 1 et f^* agit par multiplication par la constante $r_l(f)$ qui admet dans ce cas une interprétation algébro-géométrique,*

$r_l(f) = \deg(f^{-1}L)$, *L un sous-espace linéaire générique de codimension l,* *comme l'ont montré A.Russakovskii et B.Shiffman [RS]. La constante $r_1(f)$ est dans ce cas le degré des polynômes homogènes premiers entre eux intervenant dans l'écriture de f en coordonnées homogènes.*

Il y a d'autres actions linéaires auxquelles on peut s'intéresser, par exemple l'action linéaire induite par f^*, f_* sur les espaces $H^{p,q}(X,\mathbb{R})$, $p \neq q$. C'est légitime si l'on souhaite estimer le nombre de points périodiques de f en utilisant la formule de Lefschetz (voir section 2.3.1). Celle-ci fait intervenir la trace des opérateurs f^* sur tous les espaces de deRham $H^i(X,\mathbb{R})$. Puisque X est kählérienne, ils se décomposent canoniquement (Théorème de Hodge),

$$H^i(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X,\mathbb{R}).$$

Lorsque X est *projective*, on peut au contraire se restreindre à la partie algébrique des espaces en ne considérant que le sous-espace $H^{l,l}_{alg}(X,\mathbb{R})$ (stable par f^*, f_*) engendré par les cycles algébriques. On notera $r_l^{alg}(f)$ le rayon spectral de la restriction de f^* à ce sous-espace invariant, et $\rho_l^{alg}(f)$ le degré dynamique correspondant.

Il est utile d'avoir une description *analytique* du comportement asymptotique des opérateurs $(f^n)^*, (f^n)_*$. C'est le rôle joué par les “degrés”

$$\delta_l(f,\omega) := \int_{X\setminus I_f} f^*\omega^l \wedge \omega^{k-l},$$

et leur version asymptotique :

Définition 2.3 *Le degré dynamique d'ordre l est*

$$\lambda_l(f) = \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_{X\setminus I_{f^n}} (f^n)^*\omega^l \wedge \omega^{k-l}\right]^{1/n}.$$

Il est clair que $\lambda_l(f)$ ne dépend pas du choix de la forme de Kähler ω. Le lien entre ces différentes notions est fourni par le résultat suivant.

Théorème 2.4 *Pour tout $0 \le l \le k$, on a $\lambda_l(f) = \rho_l(f)$. En particulier $\rho_l(f) = \rho_l^{alg}(f)$ lorsque X est projective. De plus,*

(a) Pour tout $1 \le l \le k$, on a

$$1 \le \lambda_{l+1}(f)\lambda_{l-1}(f) \le [\lambda_l(f)]^2.$$

(b) Si $g : X' \to X'$ est une transformation méromorphe dominante d'une variété kählérienne compacte X' de dimension k', alors la transformation produit direct $f \times g : X \times X' \to X \times X'$ vérifie

$$\lambda_l(f \times g) = \max_{i+j=l} \lambda_i(f)\lambda_j(g),$$

pour tout $l \in [0, k+k']$.

(c) Il existe $C > 0$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p, q \in [0, k]$, *on a*

$$\left| Tr\left((f^n)^*_{|H^{p,q}(X,\mathbb{R})} \right) \right| \leq C \max_{0 \leq j \leq k} \delta_j(f^n, \omega).$$

Ces assertions sont pour la plupart démontrées dans [G 5]. Nous en donnons ici une preuve légèrement simplifiée.

Preuve. On va montrer qu'il existe $C \geq 1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{C}||(f^n)^*|| \leq \delta_l(f^n, \omega) \leq C||(f^n)^*|| \tag{2.1}$$

pour une norme $|| \cdot ||$ arbitraire sur $H^{l,l}(X, \mathbb{R})$. L'égalité $\rho_l(f) = \lambda_l(f)$ en résulte immédiatement. Soit (α_i) une base de $H^{l,l}(X, \mathbb{R})$. On peut la choisir de sorte que les classes α_i soient représentées par des (l, l)-formes lisses fermées *positives*, et avec $\alpha_1 = \{\omega^l\}$. Fixons $C_1 > 0$ une constante telle que la classe $C_1\{\omega^l\}$ domine toutes les classes α_i, c'est à dire que la différence peut être représentée par la classe d'un courant positif.

Soit à présent $\beta_j \in H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{R})$ les éléments de la base duale de (α_j) pour la forme d'intersection (dualité de Serre). Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle (f^n)^*\alpha_i, \beta_j \rangle = a_{ij}^{(n)},$$

où les $a_{ij}^{(n)}$ sont les coefficients de la matrice représentant $(f^n)^*$ dans la base (α_i). Soit $C_2 > 0$ une constante telle que la classe $C_2\{\omega^{k-l}\}$ domine toutes les classes $\pm\beta_j$. Il vient

$$\langle (f^n)^*\alpha_i, \pm\beta_j \rangle \leq C_2 \langle (f^n)^*\alpha_i, \omega^{k-l} \rangle \leq C_1 C_2 \delta_l(f^n, \omega),$$

d'où l'inégalité $||(f^n)^*|| \leq C\delta_l(f^n, \omega)$. Pour l'inégalité réciproque, on observe, puisque $\alpha_1 = \{\omega^l\}$, que

$$\delta_l(f^n, \omega) = \sum_j a_{1j}^{(n)} \langle \alpha_j, \omega^{k-l} \rangle \leq \sum_j |a_{1j}^{(n)}| \cdot |\langle \alpha_j, \omega^{k-l} \rangle| \leq C||(f^n)^*||.$$

Lorsque X est projective, on peut choisir une forme ω dont la classe est entière (classe de Hodge). Le raisonnement précédent s'applique au sous-espace stable engendré par les cycles algébriques et montre que $\lambda_l(f) = \rho_l^{alg}(f)$, donc $\rho_l(f) = \rho_l^{alg}(f)$.

Les inégalités (a) sont des conséquences des inégalités mixtes de Teissier-Hovanskii qui assurent $\delta_{l+1}(f, \omega)\delta_{l-1}(f, \omega) \leq [\delta_l(f, \omega)]^2$ (voir [G 5]). Ces inégalités peuvent s'interpréter comme des propriétés de concavité de la fonction $l \mapsto \log \delta_l(f, \omega)$ (voir [Gr 2]). Comme $\lambda_k(f) \geq 1$, on en déduit que $\lambda_j(f) \geq 1$ pour tout $j \in [1, k]$.

Pour établir (b), on fixe une forme de Kähler $\Omega(x,x') = \omega(x) + \omega'(x')$ sur le produit $X \times X'$. Un calcul élémentaire donne

$$\delta_l(h^n, \Omega) = \sum_{i+j=l} \delta_i(f^n, \omega)\delta_j(g^n, \omega'),$$

où h désigne la transformation produit (f, g). L'égalité s'ensuit.

Observons que (c) est une conséquence de (2.1) lorsque $p = q$. Lorsque $p \neq q$, on peut s'y ramener en travaillant dans X^2 avec la transformation produit $h = (f, f)$. En effet si $\alpha \in H^{p,q}(X, \mathbb{R})$ alors $\alpha(x) \wedge \overline{\alpha(x')}$ définit une classe de bidegré $(p+q, p+q)$ dans X^2. Estimer la norme de $(h^n)^*$ sur une telle classe revient à estimer le carré de la norme de $(f^n)^*$ agissant sur $H^{p,q}(X, \mathbb{R})$. Le calcul fait pour démontrer (b) donne ainsi

$$||(f^n)^*_{H^{p,q}(X,\mathbb{R})}||^2 \leq C_1 \sum_{i+j=p+q} \delta_i(f^n, \omega)\delta_j(f^n, \omega) \leq \left[C \max_j \delta_j(f^n, \omega) \right]^2.$$

□

Notons qu'on peut raffiner l'estimation 2.4.c et montrer

$$||(f^n)^*_{H^{p,q}(X,\mathbb{R})}||^2 \leq C\delta_p(f^n, \omega)\delta_q(f^n, \omega).$$

Ce contrôle plus précis est dû à T.C.Dinh (Proposition 5.8 dans [Di 1]).

On note $H^{l,l}_{psef}(X, \mathbb{R})$ le cône des classes *pseudoeffectives* (i.e. représentables par un courant positif fermé), et $H^{l,l}_{nef}(X, \mathbb{R})$ le cône des classes *nef*, adhérence du cône des classes strictement positives (i.e. représentables par une forme lisse fermée qui domine un multiple de ω^l) : c'est le cône dual de $H^{k-l,k-l}_{psef}(X, \mathbb{R})$. Ce sont des cônes stricts, i.e. ils ne contiennent aucune droite réelle.

Lorsque l'un de ces cônes est invariant par f^*, il résulte du Théorème de Perron-Frobenius qu'il contient une classe qui est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{R}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{R})$. En particulier $r_l(f)$ est une valeur propre de f^*. Cela a des conséquences particulièrement intéressantes sur le spectre et la dynamique de f^*, comme nous le verrons dans la section 4.2.

Le cône $H^{1,1}_{psef}(X, \mathbb{R})$ est toujours préservé par f^* et f_*. Cela résulte de ce qu'on a une bonne définition de l'image inverse par f (et de l'image directe) de n'importe quel courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$: tout se passe comme si f était holomorphe, car l'ensemble d'indétermination est de codimension ≥ 2 : c'est donc un ensemble négligeable pour les courants de bidegré $(1, 1)$. Nous verrons dans la section 4.2 que le cône $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ est également préservé par f^*, f_* lorsque X est de dimension 2. Ce n'est pas vrai en dimension supérieure pour des applications méromorphes, comme le montre l'exemple suivant qui nous a été communiqué par L.Bonavero.

Exemple 2.5 *Soit $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ l'involution donnée en coordonnées homogènes par $g[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [1/z_0 : 1/z_1 : 1/z_2 : 1/z_3] = [z_1 z_2 z_3 : \cdots : z_0 z_1 z_2]$. C'est une transformation birationnelle (i.e. de degré topologique $r_3(f) = \lambda_3(f) = 1$) de $\mathbb{P}^3$. Son ensemble d'indétermination est*

$$I_g := \bigcup_{i \neq j} \{z_i = z_j = 0\}.$$

Soit ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^3$, on vérifie aisément que

$$r_1(f) = \delta_1(f, \omega) = 3 \text{ et } r_1(f^2) = \delta_1(f^2) = 1, \text{ donc } \lambda_1(f) = 1.$$

Comme $f = f^{-1}$, il vient également $\lambda_2(f) = \lambda_1(f^{-1}) = 1$.

Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^3$ l'éclatement de $\mathbb{P}^3$ aux quatre points toriques $p_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $p_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 0 : 1]$. On note $E_i = \pi^{-1}(p_i)$ les diviseurs exceptionnels. Soit $f : X \to X$ la transformation méromorphe induite par g. On note $H_i = (z_i = 0)$ l'hyperplan de $\mathbb{P}^3$ passant par les trois points p_j, $j \neq i$, et H_i' sa transformée stricte par π,

$$H_i' = \pi^* H_i - \sum_{j \neq i} E_j.$$

Comme $g(p_i) = H_i$, on obtient

$$f^* H_i' = E_i \text{ et } f^* E_i = H_i'.$$

Soit $D = \pi^* H_0$. C'est un diviseur nef (il est même semi-positif), et pourtant

$$f^* D = E_0 + H_1' + H_2' + H_3'$$

n'est pas nef. Soit en effet L la droite passant par les points p_3, p_4 et L' sa transformée stricte. On calcule

$$f^* D \cdot L' = (3\pi^* H - 3E_0 - 2\sum_{j \geq 1} E_j) \cdot L' = 3 - 2 - 2 = -1.$$

Le cône $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ n'est donc pas préservé par f^*. Comme c'est le cône dual de $H^{2,2}_{psef}(X, \mathbb{R})$, cela montre également que ce dernier n'est pas préservé par $f_* = (f^{-1})^*$.

Nous verrons plus loin qu'il est utile d'effectuer des changements de coordonnées biméromorphes pour analyser la dynamique. Il faut donc s'intéresser à l'invariance des degrés dynamiques sous conjugaison biméromorphe.

Observons tout d'abord que l'on peut définir des degrés $\delta_l(f, \omega_X, \omega_Y)$ lorsque $f : X \to Y$ est une application méromorphe entre deux variétéss kählériennes compactes de même dimension k par

$$\delta_l(f, \omega_X, \omega_Y) := \int_{X \setminus I_f} f^* \omega_Y^l \wedge \omega_X^{k-l}.$$

Ici ω_X, ω_Y désignent deux formes de Kähler sur X, Y respectivement. On a alors l'estimation suivante due à T.C.Dinh et N.Sibony [DS 3,4].

Proposition 2.6 *Soit X, Y, Z trois variétés kählériennes compactes de même dimension k, munies de formes de Kähler $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$. Il existe $C > 0$ telle que pour toute transformation $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et pour tout $0 \leq l \leq k$,*

$$\delta_l(g \circ f, \omega_X, \omega_Z) \leq C\delta_l(g, \omega_Y, \omega_Z)\delta_l(f, \omega_X, \omega_Y).$$

Esquisse de preuve. Lorsque $l = 1$, la démonstration est simplifiée grâce à l'observation suivante : $f^*(g^*\omega_Z)$ est un $(1,1)$-courant positif fermé bien défini qui coïncide avec $(g \circ f)^*\omega_Z$ hors d'une hypersurface. Or $(g \circ f)^*\omega_Z$ ne charge pas les hypersurfaces (c'est localement une forme à coefficients L^1_{loc}), on a donc $(g \circ f)^*\omega_Z \leq f^*(g^*\omega_Z)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\delta_1(g \circ f, \omega_X, \omega_Z) &\leq \int_X f^*(g^*\omega_Z) \wedge \omega_X^{k-1} = \int_Y g^*\omega_Z \wedge f_*(\omega_X^{k-1}) \\
&\leq C||g^*_{H^{1,1}}|| \cdot ||f^*_{H^{1,1}}|| \leq C'\delta_1(g, \omega_Y, \omega_Z)\delta_1(f, \omega_X, \omega_Y),
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités (2.1).

Lorsque $l \geq 2$, la définition de $f^*(g^*\omega_Z^l)$ pose problème et l'argument précédent doit être modifié. Observons que δ_k est le degré topologique qui se comporte très bien par composition. Cela règle le cas de la dimension deux. Lorsque X est de dimension 3, on peut utiliser la dualité f^*, f_* et travailler en bidegré $(1,1)$ avec f_* (voir paragraphe 1 dans [G 5]). Pour traiter le cas général ($2 \leq l \leq k-2$, donc $k = \dim_{\mathbb{C}} X \geq 4$), il faut savoir régulariser convenablement le courant positif $g^*\omega_Z$ comme l'ont observé A.Russakovskii et B.Shiffman [RS] qui démontrent la Proposition 2.6 lorsque $X = \mathbb{P}^k$: dans ce cas on sait régulariser sans perte de positivité car $Aut(\mathbb{P}^k)$ agit transitivement sur $\mathbb{P}^k$. Lorsque la variété X n'est pas homogène, T.C.Dinh et N.Sibony ont montré [DS 3,4] qu'on peut régulariser avec perte uniforme de positivité : cela permet de conclure (voir e.g. Lemme 4 dans [DS 3]). $\square$

Le point important est que la constante C ne dépend ni de f, ni de g. Si on applique cette estimation à $X = Y = Z$, $\omega = \omega_X = \omega_Y = \omega_Z$, lorsque f et g sont les itérés d'une même transformation (que nous notons à nouveau f), on obtient pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\delta_l(f^{n+m}, \omega) \leq C\delta_l(f^n, \omega)\delta_l(f^m, \omega).$$

Autrement dit la suite $n \mapsto \delta_l(f^n, \omega)$ est quasi-sousmultiplicative : la limite inférieure dans la définition 2.3 est donc en fait une limite (et un infimum). Voici une autre application de la Proposition 2.6.

Corollaire 2.7 *Les degrés dynamiques sont invariants par conjugaison biméromorphe.*

Preuve. On considère $\Phi : \tilde{X} \to X$ une application biméromophe et $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ la transformation induite par f, Φ sur $\tilde{X}$. Fixons $\omega, \tilde{\omega}$ deux formes de

Kähler sur $X, \tilde{X}$. Il résulte d'une double application de la Proposition 2.6 que
$$\delta_l(\tilde{f}, \tilde{\omega}) \leq C^2 \delta_l(\Phi, \tilde{\omega}, \omega) \delta_l(\Phi^{-1}, \omega, \tilde{\omega}) \delta_l(f, \omega).$$
On peut remplacer $f, \tilde{f}$ par $f^n, \tilde{f}^n$ dans l'inégalité précédente sans changer la valeur des constantes, d'où $\lambda_l(\tilde{f}) \leq \lambda_l(f)$. Il suffit enfin d'interchanger les rôles de f, f^{-1} (resp. Φ, Φ^{-1}) pour conclure. $\square$

2.2 Entropies

2.2.1 Entropie topologique

a) Le cas holomorphe

Soit $f : X \to X$ une application que l'on suppose dans un premier temps *holomorphe*. Alors f est en particulier un endomorphisme *continu* de X. On peut définir son *entropie topologique* à la Bowen (voir [Bo] et [Dina]) de la façon suivante,
$$h_{\text{top}}^{\text{Bow}}(f) := \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log \max \{\sharp F \,/\, F \;\text{ ensemble } (N, \varepsilon)\text{-séparé}\}.$$
Rappelons qu'un ensemble F est dit (N, ε)-séparé si $d_N(x, y) \geq \varepsilon$, pour tout couple de points distincts (x,y) de F, où
$$d_N(x, y) := \max_{0 \leq j \leq N-1} d(f^j(x), f^j(y)),$$
pour une distance d fixée sur X. La définition ne dépend du choix de la distance que dans une moindre mesure : deux distances équivalentes conduisent à la même valeur de l'entropie. Dans notre contexte, nous choisissons la distance associée à une métrique kählérienne sur X ; la valeur de l'entropie ne dépend donc pas du choix particulier de cette métrique.

Une approche alternative –inspirée des travaux de M.Gromov [Gr 1]– est de considérer l'entropie du graphe itéré de f,
$$\Gamma_f^{\infty} := \left\{ \hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \,/\, x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\},$$
sur lequel f agit comme un décalage unilatéral $\hat{f}$. On obtient ainsi un endomorphisme continu $\hat{f}$ de l'espace topologique Γ_f^{∞} qui est compact (pour la topologie produit), et on pose
$$h_{\text{top}}^{\text{Gr}}(f) := h_{\text{top}}(\hat{f}).$$
M.Gromov a montré dans [Gr 1] que ces deux notions coïncident et que l'entropie du graphe itéré peut s'estimer en cohomologie grâce au taux de croissance asymptotique du volume des graphes itérés Γ_f^N,
$$\text{lov}(f) := \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log \text{Vol}(\Gamma_f^N).$$

Théorème 2.8 (Gromov) *Si $f : X \to X$ est holomorphe, alors*

$$h_{top}(f) \leq lov(f) = \max_j \log \lambda_j(f).$$

Esquisse de preuve. Rappelons que Γ_f^N, le graphe d'ordre N de f, est le sous-ensemble analytique irréductible de dimension k dans X^N, défini par

$$\Gamma_f^N := \left\{(x_0, \ldots, x_{N-1}) \in X^N \,/\, x_i = f^i(x),\ 0 \leq i \leq N-1\right\}.$$

Notons $\pi_i : X^N \to X$ la projection sur le i^e facteur et $\omega_N := \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i^* \omega$ la forme de Kähler induite sur X^N. Alors

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_f^N) = \int_{X^N} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k.$$

La preuve repose sur les deux observations suivantes :

1. Si F est un ensemble (N, ε)-séparé dans Ω_f pour la distance d associée à ω, alors $F_N := \{(x, f(x), \ldots, f^{N-1}(x)) \in X^N \,/\, x \in F\}$ est un ensemble $(1, \varepsilon)$-séparé dans Γ_f^N pour la distance d_N associée à ω_N. Les boules $B_{d_N}(y, \varepsilon/2)$ sont donc disjointes pour $y \in F_N$, ce qui garantit

$$\sharp F \cdot \min_{y \in F_N} \int_{B_{d_N}(y,\varepsilon/2)} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k \leq \int_{X^N} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k.$$

2. Le volume d'une boule centrée en un point y de Γ_f^N est minoré indépendamment de N et de y. Plus précisément il existe $C = C(X, \omega) > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $y \in \Gamma_f^N$, alors

$$\int_{B_{d_N}(y,\varepsilon/2)} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k \geq C \varepsilon^{2k}.$$

   C'est l'observation désormais classique de P.Lelong qui permet de définir le nombre de Lelong d'un courant positif fermé de bidimension (k, k) (ici le courant d'intégration sur Γ_f^N).

Il reste à calculer effectivement l'invariant $\mathrm{lov}(f)$. Or

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_f^N) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots i_k \leq N-1} \int_X (f^{i_1})^* \omega \wedge \cdots \wedge (f^{i_k})^* \omega.$$

En particulier $\mathrm{lov}(f) \geq \max_j \log \lambda_j(f)$ (prendre $i_1 = \cdots = i_j = N-1$ et $i_{j+1} = \cdots = i_k = 0$). L'inégalité réciproque s'obtient en observant, lorsque $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$, que

$$\int_X (f^{i_1})^* \omega \wedge \cdots \wedge (f^{i_k})^* \omega \leq C_\varepsilon \lambda_k(f)^{i_1} [\lambda_{k-1}(f) + \varepsilon]^{i_2 - i_1} \cdots [\lambda_1(f) + \varepsilon]^{i_k - i_{k-1}},$$

avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Nous renvoyons le lecteur à [Gr 1], [Fr] pour plus de détails.

$\square$

Il résulte par ailleurs des travaux de Y.Yomdin [Y] qu'on a également une minoration $h_{top}(f) \geq \max_j \log \lambda_j(f)$. Il s'ensuit, lorsque f est **holomorphe**, qu'on a l'égalité

$$h_{top}(f) = \max_{1 \leq j \leq k} \log \lambda_j(f).$$

b) Le cas méromorphe

Lorsque f est seulement *méromorphe*, on peut adopter des définitions tout à fait similaires –mais il faut être soigneux. Dans la définition à la Bowen, on considère uniquement des ensembles (n, ε)-séparés qui se situent dans le plus grand ensemble totalement invariant sur lequel f et ses itérés sont holomorphes,

$$\Omega_f := X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_f).$$

Dans la définition via le graphe, on considère l'adhérence dans $X^{\mathbb{N}}$ du graphe itéré holomorphe qui est inclus dans $\Omega_f^{\mathbb{N}}$ (il ne faut pas considérer le graphe infini fabriqué à partir de l'adhérence du graphe holomorphe de f).

Nous renvoyons le lecteur à [G 7] pour des définitions précises, ainsi que pour la justification des assertions suivantes : lorsque f est méromorphe

– on a encore $h_{\text{top}}^{\text{Bow}}(f) = h_{\text{top}}^{\text{Gr}}(f) =: h_{\text{top}}(f)$;
– on a encore $h_{\text{top}}(f) \leq \text{lov}(f)$;
– on peut avoir $h_{\text{top}}(f) < \text{lov}(f)$.

Cependant les seuls exemples que nous connaissons pour lesquels $h_{\text{top}}(f)$ diffère de $\text{lov}(f)$ correspondent à des transformations méromorphes qui ne sont pas cohomologiquement hyperboliques.

L'égalité $\text{lov}(f) = \max_j \log \lambda_j(f)$ est encore vraie, mais beaucoup plus délicate à justifier que dans le cas holomorphe. Elle est établie dans [G 5] dans quelques cas particuliers (lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 3$, ou lorsque X est une variété homogène, e.g. $X = \mathbb{P}^k$). T.C.Dinh et N.Sibony l'ont établi dans le cas général [DS 3,4]. Un point clef, comme dans la preuve de la Proposition 2.6, est de savoir régulariser convenablement les courants positifs fermés.

Conclusion. Lorsque $f : X \to X$ est *méromorphe*, la majoration de M.Gromov

$$h_{top}(f) \leq \max_{1 \leq j \leq k} \log \lambda_j(f)$$

est valable, mais la minoration de Y.Yomdin ne s'applique pas en général.

2.2.2 Entropie métrique

L'image directe d'une masse de Dirac ε_x par une transformation méromorphe $f : X \to X$ est bien définie lorsque $x \notin I_f$, par

$$f_*\varepsilon_x = \varepsilon_{f(x)}.$$

On peut donc définir de même l'image directe $f_*\nu$ de toute mesure de probabilité ν qui ne charge pas l'ensemble d'indétermination I_f. On va s'intéresser à des mesures invariantes, $f_*\nu = \nu$, et, parfois, à des mesures invariantes par image inverse. Il faut donc se restreindre et considérer des mesures de probabilité ν telles que $\nu(\Omega_f) = 1$. On peut alors définir l'entropie métrique $h_\nu(f)$ de ν comme on le fait habituellement (voir e.g. [KH]). Nous montrons dans [G 7] les assertions suivantes :

– on a toujours $\sup_\nu h_\nu(f) \leq h_{top}(f)$ (principe variationnel faible) ;
– il peut y avoir inégalité stricte.

Cependant les seuls exemples que nous connaissons pour lesquels il y a inégalité stricte correspondent à nouveau à des transformations méromorphes qui ne sont pas cohomologiquement hyperboliques.

Rappelons à présent que M.Misiurewicz et F.Przytycki ont montré [MiP] que si $f : M \to M$ est un endomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ d'une variété lisse orientable compacte, alors son entropie topologique est minorée par le logarithme de son degré topologique. Ce n'est plus vrai si l'endomorphisme est seulement continu (cf e.g. [KH] p 317). C'est également faux en général pour une transformation méromorphe d'une variété kählérienne compacte (voir Exemple 2.10). On peut toutefois espérer obtenir une telle minoration en utilisant la stratégie suivante : soit Θ une mesure de probabilité lisse sur X. Alors la suite

$$\nu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_k(f)^j}(f^j)^*\Theta$$

définit une suite de mesures de probabilité sur X. Soit $\mu = \lim \nu_{n_i}$ une valeur d'adhérence de la suite ν_n. Il se pourrait malheureusement que μ charge les points d'indétermination I_f. On peut aussi espérer que ce ne sera pas le cas si on fait un choix intelligent de la mesure Θ de départ (voir Exemples 2.10 et 2.16 pour des choix heureux et malheureux). Supposons que μ ne charge pas I_f. Alors la mesure $f_*\mu$ est bien définie et vérifie

$$f_*\mu = \lim_{i\to+\infty} f_*\nu_{n_i} = \lim_{i\to+\infty}\nu_{-1+n_i} = \mu,$$

donc μ est une mesure invariante.

Supposons à présent que μ ne charge pas les valeurs critiques $V_f = f(\mathcal{C}_f)$ de f. C'est automatique sur une variété de dimension de Kodaira positive (voir section 2.4.2). Cela n'est pas nécessairement vrai lorsque $kod(X) = -\infty$, mais ce sera toujours le cas lorsque f a un grand degré topologique (voir section 3.1). On peut alors définir $f^*\mu := \sum_{i=1}^{\lambda_k(f)} (f_i^{-1})_*\mu$, où f_i^{-1} désigne les branches inverses (locales) de f qui sont bien définies hors de V_f. L'opérateur $\nu \mapsto f^*\nu$ est continu sur l'espace des mesures qui ne chargent pas V_f. Comme $f^*\nu_n \simeq \lambda_k(f)\nu_{n+1}$, on obtient dans ce cas

$$f^*\mu = \lambda_k(f)\mu,$$

autrement dit μ est de jacobien constant égal à $\lambda_k(f)$. Dans une telle situation on récupère la minoration de Misiurewicz-Przytycki grâce à l'argument suivant de J.Y.Briend et J.Duval [BrD 2].

Proposition 2.9 *Soit μ une mesure de probabilité invariante qui ne charge pas les valeurs critiques de f et vérifie $f^*\mu = \lambda_k(f)\mu$. Alors*

$$h_{top}(f) \geq h_\mu(f) \geq \log \lambda_k(f).$$

Remarquons qu'il peut y avoir inégalité stricte comme le montre l'exemple de la mesure de Lebesgue sur un tore complexe qui admet un endomorphisme de type Anosov.

Preuve. Nous supposons μ ergodique pour simplifier –ce sera d'ailleurs dans ce cadre que nous l'utiliserons. Pour $x \in X, \varepsilon > 0$ fixés, on note

$$B_n(x,\varepsilon) := \{y \in X \,/\, d_n(x,y) < \varepsilon\}$$

la boule dynamique associée à $d_n(x,y) = \max_{0\leq j\leq n-1} d(f^j x, f^j y)$, la distance dynamique. Il résulte du Théorème de Shannon-McMillan (voir [BrKa]) que pour μ presque tout x, on a

$$h_\mu(f) = \sup_{\varepsilon>0} \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x,\varepsilon)).$$

Nous allons minorer $h_\mu(f)$ en majorant $\mu(B_n(x,\varepsilon))$. L'idée est la suivante : si B est un Borélien sur lequel f est injective, alors $\mu(B) = \lambda_k^{-1}\mu(fB)$ car μ est de jacobien constant$= \lambda_k$. En particulier si f est injective sur $B_n(x,\varepsilon)$, alors

$$\mu(B_n(x,\varepsilon)) = \frac{1}{\lambda_k}\mu(fB_n(x,\varepsilon)) \leq \frac{1}{\lambda_k}\mu(B_{n-1}(fx,\varepsilon))$$

car $fB_n(x,\varepsilon) \subset B_{n-1}(fx,\varepsilon)$. Si f est à nouveau injective sur $B_{n-1}(x,\varepsilon)$, puis sur $B_{n-j}(f^j x,\varepsilon)$ pour tout $j \leq n$, on obtient ainsi $\mu(B_n(x,\varepsilon)) \leq \lambda_k^{-n}\mu(B(f^n x,\varepsilon)) \leq \lambda_k^{-n}$, ce qui donne $h_\mu(f) \geq \log \lambda_k$.

Pour rendre rigoureux ce raisonnement simpliste, nous allons montrer que f est souvent injective sur $B_{n-j}(f^{n-j}(x,\varepsilon))$, pour un choix générique de x. Plus précisément fixons $0 < \delta << 1$ et U un petit voisinage de l'ensemble V_f des valeurs critiques de f, de sorte que $\mu(U) < \delta/2$. Posons

$$X_n(\delta) := \left\{x \in X \,/\, \sharp\{j \in [0,n-1]/f^j x \in U\} \leq n\delta\right\}.$$

Il résulte du Théorème de Birkhoff que pour μ presque tout $x \in X$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sharp\{j \in [0, n-1] / f^j(x) \in U\}}{n} = \mu(U) < \delta/2.$$

Il s'ensuit que $X_n(\delta)$ est de mesure positive pour n assez grand. Pour $x \in X_n(\delta)$ μ-générique, on applique l'estimation de jacobien constant lorsque $f^j x \notin U$: il suffit de fixer ε assez petit pour que la boule dynamique $B_{n-j}(f^j x, \varepsilon)$ ne rencontre pas V_f -prendre par exemple $\varepsilon < d(V_f, \partial U)$. Lorsque $f^j x \in U$, on majore brutalement

$$\mu(B_{n-j}(f^j x, \varepsilon)) \leq \mu(B_{n-j-1}(f^{j+1} x, \varepsilon))$$

en utilisant l'invariance $f_*\mu = \mu$. Comme l'orbite de x est souvent hors de U, on obtient l'estimation

$$\mu(B_n(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\lambda_k^{n(1-\delta)}}.$$

Enfin δ étant arbitrairement petit, le principe variationnel donne

$$h_{top}(f) \geq h_\mu(f) \geq \log \lambda_k.$$

□

2.3 Points périodiques

2.3.1 La formule de Lefschetz

Nous cherchons ici à estimer le nombre de points périodiques d'ordre n de la transformation f. Quitte à changer f en f^n, il s'agit d'estimer le nombre de points fixes. Nous verrons plus loin (2.3.3) qu'il peut exister des courbes de points fixes. Il s'agit bien sûr de points fixes non-hyperboliques, or ce sont les points fixes hyperboliques que nous souhaitons dénombrer. Comme ils sont stables par petite perturbation et comme l'existence d'une courbe de points fixes est une situation exceptionnelle, nous ne considérons que le cas où *il n'y a pas de courbe de points fixes.* Considérons

$$\Gamma_f := \overline{\{(x, f(x)) \in X^2 \,/\, x \in X \setminus I_f\}}$$

l'adhérence du graphe holomorphe de f dans X^2 et soit $\Delta := \{(x, x) \in X^2 \,/\, x \in X\}$ la diagonale de X. Le produit d'intersection $\Gamma_f \cdot \Delta$ est bien défini au sens des courants positifs –car il n'y a pas de courbe de points fixes– et compte, avec multiplicité, le nombre de points fixes plus le nombre de points d'indétermination. On a donc $\Gamma_f \cdot \Delta \geq \sharp Fix(f)$. Par ailleurs ce produit d'intersection se calcule en cohomologie : c'est le contenu de la formule des points fixes de Lefschetz (voir [GH] p 423) qui assure

$$\Gamma_f \cdot \Delta = \sum_{0 \leq p,q \leq k} (-1)^{p+q} \mathrm{Trace}\left(f^*_{|H^{p,q}(X,\mathbb{R})}\right).$$

Lorsque f est cohomologiquement hyperbolique, il résulte du Théorème 2.4 qu'on obtient la majoration

$$\sharp Fix(f^n) \lesssim \delta_l(f^n, \omega), \text{ pour } n >> 1, \tag{2.2}$$

où $\lambda_l(f)$ désigne le plus grand des degrés dynamiques. On en déduit

$$\limsup \frac{1}{n} \log \sharp Fix(f^n) \leq \log \lambda_l(f). \tag{2.3}$$

Notons que l'estimation (2.2) est plus précise que (2.3). Lorsque $l = k$, on peut remplacer δ_k par λ_k dans (2.2). Lorsque $l \leq k-1$, on espère également pouvoir remplacer δ_l par λ_l dans (2.2). C'est probablement possible si on sait trouver un modèle $\tilde{X}$ biméromorphe à X sur lequel l'action linéaire induite par f^* sur $H^{l,l}(\tilde{X}, \mathbb{R})$ est compatible avec la dynamique (voir section 4.2 et l'introduction du chapitre 5 ; voir également [BFJ] pour une réponse en dimension deux).

2.3.2 Quels points périodiques ?

Lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$, f admet une infinité de points périodiques et tous –sauf un nombre fini d'entre eux– sont répulsifs (voir [CG]). La situation est plus variée en dimension supérieure. Il résulte des travaux de S.Newhouse [N] (voir également [Ga], [Bu]) qu'il peut coexister une infinité de cycles attractifs et une infinité de points selles (resp. points répulsifs). Nous allons donner quelques exemples de dimension 2 qui illustrent d'autres différences avec la dimension 1.

Exemple 2.10 *Soit $f : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z^\lambda, w+1) \in \mathbb{C}^2$, avec $\lambda \geq 2$. Alors f induit une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^2$ qui a un point fixe q_∞ et un point d'indétermination I_f à l'infini. On vérifie aisément qu'il n'y a pas d'autre point périodique que q_∞ et que $\lambda_1(f) = \lambda_2(f) = \lambda \geq 2$. On obtient également (voir [G 7])*

$$0 = h_{top}(f) < lov(f) = \log \lambda,$$

bien que f soit de degré topologique $\lambda \geq 2$. En particulier la stratégie proposée en 2.2.2 échoue dans ce cas : on vérifie en effet aisément que la suite $\lambda^{-n}(f^n)^*\Theta$ converge vers le point d'indétermination I_f, quel que soit le choix de la mesure lisse de probabilité Θ.

En dimension 1, tous les cycles répulsifs sont dans le support de la mesure d'entropie maximale μ_f que nous avons construite dans la section 1.1. Ce n'est plus le cas en dimension supérieure comme l'ont observé J.H.Hubbard et P.Papadopol [HP 1] :

Exemple 2.11 *Soit $f_\varepsilon : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(w) + \varepsilon z^r, Q(z) + R(w)) \in \mathbb{C}^2$, où P, Q, R sont des polynômes de degré p, q, r avec $pq < r$. On considère les extensions méromorphes de ces applications à $\mathbb{P}^2$ –encore notées f_ε. Lorsque $\varepsilon = 0$, on obtient une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^2$ tel que*

$$\lambda_1(f_0) = r \text{ et } \lambda_2(f_0) = pq < \lambda_1(f_0).$$

L'application f_0 a un unique point d'indétermination I_0 à l'infini. Il est facile d'expliciter des polynômes P, Q, R tels que f_0 ait un point fixe répulsif loin de I_0.

Les autres applications ($\varepsilon \neq 0$) définissent des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$, pour lesquels on a $\lambda_1(f_\varepsilon) = r$ et $\lambda_2(f_\varepsilon) = r^2$. On construira un peu plus loin (Chapitre 3) une mesure d'entropie maximale μ_ε pour les endomorphismes f_ε, $\varepsilon \neq 0$. Les mesures μ_ε sont localisées près de I_0 et dégénèrent en une masse de Dirac au point I_0 lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier, les points périodiques répulsifs de f_0 situés loin de I_0 génèrent des points périodiques répulsifs de f_ε (ε petit) qui se situent hors du support de μ_ε : il est donc possible que certains points périodiques répulsifs se situent loin du support de la mesure d'entropie maximale, bien que la plupart en soient proches, puisqu'ils s'équidistribuent selon elle (voir chapitre 3.2). Cette observation est due à J.H.Hubbard et P.Papadopol [HP 1] qui considèrent des perturbations d'applications de Hénon complexes (voir également [FS 5] pour une autre généralisation).

2.3.3 Courbes de points périodiques

Les endomorphismes holomorphes cohomologiquement hyperboliques n'ont essentiellement pas de courbes de points périodiques :

Proposition 2.12 *Soit $f : X \to X$ un endomorphisme* **holomorphe** *d'une surface kählérienne compacte tel que $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f) \geq 2$. Alors f est induit par un endomorphisme holomorphe $g : Y \to Y$ sur un modèle minimal Y de X, tel que g n'admet pas de courbe de points fixes.*

Notons qu'il est facile de produire un endomorphisme holomorphe "non-minimal" qui admet une courbe de points fixes : il suffit d'éclater en un point fixe en lequel l'application a une différentielle égale à l'identité.

Preuve. Supposons qu'il existe une courbe irréductible $\mathcal{C}$ de points fixes de f. Alors $f_*\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Comme f_* est un opérateur inversible sur l'espace $NS(X)$ de Néron-Severi réel (car $f_* f^* D = \lambda_2(f) D$), on en déduit que $f^*\mathcal{C} = \lambda_2(f)\mathcal{C}$.

Soit $\theta \in H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ une classe non-nulle telle que $f^*\theta = r_1(f)\theta$. Il vient

$$r_1(f)\lambda_2(f)\langle \mathcal{C}, \theta \rangle = \langle f^*\mathcal{C}, f^*\theta \rangle = \lambda_2(f)\langle \mathcal{C}, \theta \rangle.$$

Si $\langle \mathcal{C}, \theta \rangle > 0$ alors $r_1(f) = 1$, donc $\lambda_1(f) = 1$, donc $\lambda_2(f) = \lambda_1(f) = 1$ (car $1 \leq \lambda_2(f) \leq \lambda_1(f)^2$ par 2.4.a). Supposons donc $\langle \mathcal{C}, \theta \rangle = 0$. Comme $\theta^2 \geq 0$, il résulte du Théorème de l'indice de Hodge que soit $\mathcal{C}$ est proportionnelle à θ –mais alors $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)$–, soit $\mathcal{C}^2 < 0$.

Lorsque $\mathcal{C}^2 < 0, \mathcal{C}$ fait partie du nombre fini de courbes d'auto-intersection négative, dont on montrera dans la section 3.3.1 qu'elles sont obtenues par éclatements successifs à partir d'un endomorphisme sur un modèle minimal. On vérifie aisément qu'il n'y a pas de courbe de points fixes lorsque X est minimale et $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$ (voir Thórème 3.6). □

Ce résultat n'est plus valable si l'on permet des points d'indétermination :

Exemple 2.13 *Soit $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (zw^b, w + z^c w^d) \in \mathbb{C}^2$, où $b, c, d \in \mathbb{N}$. Alors f induit une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^2$ telle que $f(0, w) = (0, w)$. On vérifie –en travaillant en fait dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, cf [FaG]– que $\lambda_1(f)$ est le rayon spectral de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et que*

$$\lambda_2(f) = \max(d - bc, [bc - d] + 1).$$

En faisant varier les valeurs des entiers b, c, d, on peut obtenir aussi bien $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ –par exemple pour $b = c = d = 1$– que $\lambda_1(f) < \lambda_2(f)$ –par exemple pour $d = 0$ et $b = c = 2$.

Cette situation reste néanmoins très exceptionnelle. Les transformations birationnelles qui admettent une courbe de points fixes ont été partiellement classifiées par D.Jackson [Ja]. Pour des résultats sur la géométrie des courbes invariantes par des transformations rationnelles, nous renvoyons le lecteur à [BDM], [Pa] et [DJS]. On pourra également consulter [ABT] pour une étude locale des courbes invariantes.

2.4 Quelles variétés ?

L'objectif de cette section est de fournir quelques exemples de transformations méromorphes $f : X \to X$ cohomologiquement hyperboliques, i.e. telles que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ pour un indice $l \in [1, k]$. Nous commençons par justifier pourquoi il faut les chercher sur les variétés dont la dimension de Kodaira vaut 0 ou $-\infty$.

Théorème 2.14 *Soit $f : X \to X$ une transformation méromorphe d'une surface kählérienne compacte telle que $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$. Alors*

– *soit* $kod(X) = 0$ *;*
– *soit* X *est rationnelle ;*
– *soit* X *est birationnelle à* $\mathbb{P}^1 \times E$*,* $genre(E) = 1$*, et* $\lambda_2(f) > \lambda_1(f)$*.*

La démonstration repose sur le Lemme 2.15 ci-dessous. Lorsque $kod(X) \geq 1$, on applique ce lemme en utilisant la fibration d'Itaka : dans ce cas g est linéaire donc de degré 1, ce qui donne $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)$. Lorsque $kod(X) = -\infty$, on utilise la fibration d'Albanese. Nous renvoyons le lecteur au texte de S.Cantat [Ca 4] pour la définition de ces fibrations et la justification du fait qu'elles sont automatiquement préservées par f.

Lemme 2.15 *Soit* X *une surface kählérienne compacte et* B *une surface de Riemann compacte. On suppose qu'il existe des applications méromorphes* f, g, π *telles que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Alors $\lambda_1(f) \leq \lambda_2(f)$ *avec égalité si* $\deg(g) = 1$*.*

Preuve. Remarquons qu'on peut résoudre les singularités de π sans changer les données du problème : cela revient à remplacer X par un modèle biméromorphe $\tilde{X}$, et f par la transformation $\tilde{f}$ induite par f sur $\tilde{X}$. Comme f et $\tilde{f}$ ont les mêmes degrés dynamiques (corollaire 2.7), on s'est ramené au cas où π est holomorphe, ce que nous supposerons dans la suite.

Soit d le degré de l'application g. Observons que si F est une fibre générique de π, alors $F^2 = 0$ et $f^*F \simeq dF$. Par ailleurs le degré topologique de f satisfait $\lambda_2(f) = d \cdot m$, où m est le degré de l'application $f_{|F}$.

Si $p \in I_f$, son image $f(p)$ est incluse dans la fibre $F_{g(a)}$ telle que $p \in F_a$. Il s'ensuit que pour toute classe de cohomologie $\theta \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, on a

$$\langle f^*\theta, f^*F \rangle = \lambda_2(f) \langle \theta, F \rangle. \tag{2.4}$$

Il s'agit d'une version simple de la "formule d'aller-retour" (Proposition 4.8).

Soit en particulier $\theta \in H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ une classe nef telle que $f^*\theta = r_1(f)\theta$ (voir section 4.2). Si $\theta = F$, on obtient $r_1(f) = \deg(g) \leq \lambda_2(f)$, donc $\lambda_1(f) \leq \lambda_2(f)$. De plus si $\deg(g) = 1$ on obtient $r_1(f) = 1$ donc $\lambda_1(f) = 1$, d'où $\lambda_2(f) = \lambda_1(f) = 1$ (cf Théorème 2.4.a).

Si θ n'est pas proportionnelle à F, il résulte du Théorème de l'indice de Hodge que $\theta \cdot F > 0$. La formule d'intersection ci-dessus donne ainsi $r_1(f) \cdot d = \lambda_2(f)$, d'où le résultat. $\square$

Nous donnons à présent des exemples de transformations méromorphes cohomologiquement hyperboliques.

2.4.1 $kod(X) = -\infty$

Il y a une multitude d'exemples de transformations rationnelles de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$ –donc de toute variété rationnelle. Nous en donnons quelques uns ci-dessous. Lorsque X est une variété *unirationnelle*, i.e. lorsqu'il existe une application méromorphe dominante $\Phi : \mathbb{P}^k \to X$, alors X admet également des transformations méromorphes induites par celles de $\mathbb{P}^k$ (voir Exemple 3.9). Il serait intéressant de donner une classification grossière des variétés kählériennes compactes telles que $kod(X) = -\infty$ et qui admettent des transformations cohomologiquement hyperboliques. Le Théorème 2.14 ci-dessus indique que l'existence de telles transformations impose des contraintes particulières sur la géométrie de la variété.

Exemple 2.16 *Soit $f : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(w), Q(z) + R(w)) \in \mathbb{C}^2$, où P, Q, R sont des polynômes de degré p, q, r avec $r \geq \max(p,q)$. Alors f induit une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^2$ telle que*

$$\lambda_1(f) = r \text{ et } \lambda_2(f) = pq.$$

On peut donc, en fonction des valeurs respectives de p, q, r, obtenir aussi bien $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ que $\lambda_1(f) < \lambda_2(f)$.

Lorsque $p = q = 1$ et $r \geq 2$, f définit un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ d'entropie positive : c'est une application de Hénon complexe. Lorsque $p = q = r$, on obtient un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2$.

On peut bien sûr considérer des compositions de telles applications. La dynamique de ces endomorphismes est étudiée dans [G 1]. On y montre en particulier que l'ensemble d'indétermination I_f est f^{-1}-attirant lorsque $\lambda_2(f) = pq < \lambda_1(f) = r$. Si Θ est une mesure de probabilité lisse localisée près de I_f, on a donc $\Theta_n := \lambda_2(f)^{-n}(f^n)^*\Theta \to \delta_{I_f}$: c'est un choix malheureux de Θ pour la stratégie proposée en 2.2.2. On montre également dans [G 1] que $\mathbb{C}^2$ est la réunion disjointe du bassin d'attraction de I_f (sous itération de f^{-1}) et de l'ensemble fermé K^- des points d'orbite négative bornée. Si ce dernier est d'intérieur non-vide (par exemple lorsque f admet un point périodique répulsif), on peut choisir Θ localisée dans ce bassin et obtenir des valeurs d'adhérence pour Θ_n qui ne chargent pas I_f.

Nous verrons dans la section 3.3.1 que les endomorphismes holomorphes non inversibles des surfaces rationnelles sont induits par les endomorphismes holomorphes d'un modèle minimal. Il y en a donc peu, hormis sur $\mathbb{P}^2$. Il reste le cas –assez mal compris– des automorphismes d'entropie positive des surfaces rationnelles. Le lecteur trouvera de nombreux exemples dans [BK 1,3], [M 3], [Ca 4].

2.4.2 $kod(X) = 0$

Lorsque X est de dimension de Kodaira nulle, le diviseur canonique K_X est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif ($K_X \geq 0$). Cela contraint les ramifications possibles de f. Notons R_f le diviseur de ramification. Il résulte de la formule de Hurwitz $f^*K_X + R_f = K_X$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f^*)^n K_X + \sum_{j=0}^{n-1} (f^*)^j R_f = K_X.$$

Si D est un diviseur ample, il vient donc

$$0 \leq \sum_{j=0}^{n-1} \langle (f^*)^j R_f, D^{k-1} \rangle \leq K_X \cdot D^{k-1}.$$

On en déduit que $(f^*)^j R_f = 0$ pour $j \geq j_0$. Cela implique que la transformation f est essentiellement non ramifiée.

Supposons par exemple que $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$. Quitte à effectuer un changement biméromorphe de coordonnées, on peut supposer que l'on travaille sur le modèle minimal. Dans ce cas $12K_X = 0$, donc $12R_f = 0$. Nous utiliserons cette observation à plusieurs reprises, notamment dans la section 4 pour en déduire qu'une telle transformation f est 1-stable (voir Proposition 4.5).

Exemple 2.17 *Soit $X = \mathbb{C}^k/\Lambda$ un tore complexe de dimension $k \geq 1$ i.e. le quotient de $\mathbb{C}^k$ par un réseau Λ de rang $2k$. Soit $f : X \to X$ une transformation méromorphe de X. Alors f est en fait automatiquement holomorphe : sinon on considère une désingularisation*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\Gamma}_f \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

de f. On peut trouver un diviseur exceptionnel $E \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ de π_1 qui est envoyé par π_2 sur un sous-ensemble analytique de dimension positive, image par f d'un hypothétique point d'indétermination. Or $\mathbb{P}^{k-1}$ est simplement connexe et le revêtement universel de X est $\mathbb{C}^k$, on peut donc relever l'application $\pi_{2|E}$ en une application holomorphe vers $\mathbb{C}^k$. L'image de E est alors un sous-ensemble analytique compact (Théorème de Remmert) et connexe dans $\mathbb{C}^k$ qui est une variété de Stein, c'est donc un point. Il s'ensuit que π_2 contracte E sur un point, donc f est holomorphe.

On montre d'une façon analogue que f est induit par un endomorphisme affine F de $\mathbb{C}^k$, $F(z) = A \cdot z + v$, où $A \in GL(k, \mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}^k$ sont tels que $F\Lambda \subset \Lambda$. Observons que $D_x f = A$ en tout point $x \in X$. La matrice A représente l'action de f^* sur $H^{1,0}(X, \mathbb{R})$ dans la base canonique déterminée par les 1-formes dz_j. Notons $a_1, \ldots, a_k$ ses valeurs propres ordonnées de telle sorte que $|a_1| \geq \cdots \geq |a_k|$. Un calcul immédiat donne

$$\lambda_j(f) = r_j(f) = |a_1|^2 \cdots |a_j|^2,$$

pour tout $1 \leq j \leq k$. En particulier $\lambda_1(f)$ est égal au carré du rayon spectral de la matrice A, et $\lambda_k(f)$ est égal au carré du determinant de A.

La condition "f est cohomologiquement hyperbolique" est donc équivalente ici au fait que les valeurs propres de A sont toutes de module différent de 1, c'est à dire que f est uniformément hyperbolique.

Observons que la contrainte $F\Lambda \subset \Lambda$ n'est pas facile à satisfaire. Pour un réseau générique Λ, les seules matrices A qui conviennent sont les homothéties de rapport entier. Dans ce cas λ_k est le plus grand des degrés dynamiques. On peut cependant, pour des choix particuliers de réseau (par exemple pour un réseau produit), obtenir des endomorphismes tels que $\lambda_l(f)$ domine tous les autres degrés dynamiques, quel que soit l fixé dans $[1, k]$. E.Ghys et A.Verjovsky [GV] ont donné une liste des tores de dimension deux qui admettent des difféomorphismes d'Anosov, i.e. pour lesquels $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) = 1$.

Lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, $kod(X) = 0$, il résulte de la classification d'Enriques-Kodaira (voir [Bea]) que le modèle minimal de X est

- soit un tore ;
- soit le quotient d'un tore par un groupe fini d'automorphismes sans point fixe (surface hyperelliptique) ;
- soit une surface $K3$;
- soit le quotient d'une surface $K3$ par une involution holomorphe sans point fixe (surface d'Enriques).

Les transformations méromorphes d'une surface d'Enriques se relèvent en des transformations de sa surface $K3$. Celles des surfaces hyperelliptiques se relèvent sur le tore et sont dynamiquement moins intéressants car elles préservent la fibration d'Albanese –on obtient donc des produits croisés de grand degré topologique. Il reste donc, en dimension 2, à donner des exemples de transformations méromorphes des surfaces $K3$. Le lecteur en trouvera plusieurs dans le texte de S.Cantat [Ca 4]

Chapitre 3

Grand degré topologique

Dans ce chapitre nous considérons le cas où le degré topologique $\lambda_k(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques. Nous construisons une mesure μ_f mélangeante d'entropie maximale dans la *section 3.1*, puis démontrons dans la *section 3.2* la conjecture énoncée dans l'introduction. Nous donnons des exemples de transformations vérifiant nos hypothèses dans la *section 3.3* puis mentionnons quelques résultats supplémentaires sur la dynamique de ces applications (*section 3.4*). Nous présentons enfin (*section 3.5*) quelques éléments du travail de T.C.Dinh et N.Sibony sur les applications d'allure polynomiale : ce sont des perturbations (éventuellement transcendantes) d'endomorphismes *polynomiaux* de grand degré topologique.

Lorsque f est *holomorphe*, la mesure canonique μ_f a été construite par J.H.Hubbard,P.Papadopol [HP 1] et J.E.Fornaess,N.Sibony [FS 3]. Ces derniers ont également montré que μ_f est une mesure mélangeante d'entropie maximale. Dans deux articles splendides, J.Y.Briend et J.Duval [BrD 1,2] ont établi le reste de la conjecture :

- μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale ;
- les exposants de Lyapunov de μ_f sont strictement positifs ;
- les points périodiques répulsifs s'équidistribuent selon μ_f.

Le lecteur trouvera un exposé détaillé ce ce cas holomorphe dans [Buf 2].

Le cas *méromorphe* que nous exposons ici a été traité par l'auteur [G 5] et T.C.Dinh,N.Sibony [DS 3].

3.1 La mesure canonique

Nous allons construire une mesure invariante canonique μ_f pour les transformations méromorphes de grand degré topologique. Lorsque $X = \mathbb{P}^k$ et f est *holomorphe*, cette mesure a été construite par J.-E.Fornaess et N.Sibony dans [FS 2,3,4], et par J.-H.Hubbard et P.Papadopol dans [HP 1]. Lorsque f est méromorphe, A.Russakovskii et B.Shiffman ont construit la mesure μ_f [RS] en observant une propriété d'équidistribution des préimages de points. Leur construction – délicate – ne leur a pas permis d'établir des propriétés dynamiques de la mesure μ_f, mais elle a motivé de nombreux travaux (voir par exemple [FaG],[G 1,3,5], [DS 2,8], [HP 2]). L'auteur a obtenu dans [G 3,5] une construction simple de cette mesure –dite de Russakovskii–Shiffman– qui a permis d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Supposons que $\lambda := \lambda_k(f) > \max_{j\neq k} \lambda_j(f)$. Alors il existe une mesure de probabilité canonique μ_f telle que*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\Theta \longrightarrow \mu_f,$$

pour toute mesure de probabilité lisse Θ sur X. De plus

1. *toute fonction qpsh est intégrable par rapport à μ_f ; en particulier μ_f ne charge pas les hypersurfaces et $\log^+ ||Df^{\pm 1}|| \in L^1(\mu_f)$;*
2. *la mesure μ_f est invariante et de jacobien constant $f^*\mu_f = \lambda\mu_f$, donc d'entropie maximale*
$$h_{\mu_f}(f) = h_{top}(f) = \log\lambda > 0.$$
3. *la mesure μ_f est mélangeante ; plus précisément il existe $C > 0$ telle que pour toutes fonctions test χ, ψ,*
$$\left| \int_X \psi\chi \circ f^n d\mu_f - \int_X \psi d\mu_f \int_X \chi d\mu_f \right| \leq C||\psi||_{\mathcal{C}^2} ||\chi||_{L^\infty} \frac{\delta_{k-1}(f^n,\omega)}{\lambda^n}.$$

Preuve. Soit $a \in X$ un point qui n'est ni une valeur critique de f, ni un point d'indétermination. Alors f est localement inversible près de a. Soit Θ une mesure lisse de probabilité dont le support est concentré près du point a. Alors $f^*\Theta$ est une mesure positive lisse de masse λ. Comme X est kählérienne, le dd^c-lemma assure l'existence d'une forme lisse S de bidegré $(k-1, k-1)$ telle que

$$\frac{1}{\lambda} f^*\Theta = \Theta + dd^c S. \tag{3.1}$$

Quitte à translater S en lui ajoutant un multiple de ω^{k-1}, on peut supposer que $0 \leq S \leq C\omega^{k-1}$. Comme f est k-stable, on peut prendre l'image inverse de (4.1) par f^n et utiliser les identités $(f^n)^* = (f^*)^n$ pour obtenir

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\Theta = \Theta + dd^c S_n, \text{ où } S_n := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^j}(f^j)^* S.$$

Les courants S_n forment une suite croissante de courants positifs -car $S \geq 0$ donc $(f^j)^*S \geq 0$- dont la masse est bornée par $\sum_{j\geq 0} \delta_{k-1}(f^j,\omega)/\lambda^j$ qui converge car $\lambda > \lambda_{k-1}(f)$. On en déduit la convergence

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\Theta \longrightarrow \mu_f := \Theta + dd^c S_\infty, \text{ où } S_\infty := \sum_{j\geq 0} \frac{1}{\lambda^j}(f^j)^* S.$$

Si Θ' est une autre mesure de probabilité lisse, alors il existe une forme lisse R de bidegré $(k-1, k-1)$ telle que $\Theta' = \Theta + dd^c R$. On en déduit que $\lambda^{-n}(f^n)^*\Theta' \to \mu_f$, car les courants $(f^n)^*R$ sont de masse majorée par $\delta_{k-1}(f^n, \omega)$.

Soit φ une fonction quasiplurisousharmonique (qpsh) sur X. C'est une fonction majorée dont la courbure est minorée par une forme lisse. Quitte à translater et dilater φ, on peut supposer $\varphi \leq 0$ et $dd^c\varphi \geq -\omega$. On a alors

$$0 \leq \int_X (-\varphi) d\mu_f = \int_X (-\varphi)\Theta + \int_X (-\varphi) dd^c S_\infty \leq \int_X (-\varphi)\Theta + \int_X \omega \wedge S_\infty,$$

en intégrant par parties dans la deuxième intégrale, et en observant que $-dd^c\varphi \wedge S_\infty \leq \omega \wedge S_\infty$ car le courant S_∞ est positif. On peut justifier ces intégrations par parties en approximant φ par une suite décroissante de fonctions lisses qpsh (voir [G 5], [GZ 1]). L'assertion (1) en résulte.

En particulier μ_f ne charge pas l'ensemble d'indétermination, ni les valeurs critiques de f. Comme elle est limite de mesures μ_n qui vérifient $f^*\mu_n = \lambda\mu_{n+1}$, on en déduit que μ_f est invariante et de jacobien constant. Il résulte de la Proposition 2.9 et de la majoration $h_{top}(f) \leq \max_j \log \lambda_j(f)$ que μ_f est d'entropie maximale,

$$h_{\mu_f}(f) = h_{top}(f) = \log \lambda > 0.$$

Il reste à montrer le mélange et à estimer la décroissance des corrélations. C'est la même idée que dans la preuve du Théorème 1.5, mais les détails techniques sont légèrement plus élaborés. Soit χ, ψ des fonctions test. Posons $c_\chi = \int \chi d\mu_f$ et $c_\psi = \int \psi d\mu_f$. Quitte à translater et dilater χ on peut supposer $\chi \geq 0$ et $c_\chi = 1$. La mesure $\chi\mu_f$ est donc une mesure de probabilité et il s'agit de montrer que $\chi \circ f^n \mu_f = \lambda^{-n}(f^n)^*(\chi\mu_f)$ converge vers μ_f, et d'estimer à quelle vitesse. L'idée est la suivante : comme μ_f et $\chi\mu_f$ sont cohomologues, on peut trouver R_χ, un courant de bidegré $(k-1, k-1)$ qui dépend continûment de χ tel que $\chi\mu_f = \mu_f + dd^c R_\chi$. En prenant l'image inverse par f^n et en intégrant contre ψ, on obtient ainsi

$$I_n(\chi, \psi) = \left|\langle dd^c\psi, \lambda^{-n}(f^n)^* R_\chi\rangle\right| \leq ||\psi||_{\mathcal{C}^2} ||R_\chi|| \delta_{k-1}(f^n, \omega)\lambda^{-n},$$

où $I_n(\chi, \psi) := \left|\int \psi\chi \circ f^n d\mu_f - c_\chi c_\psi\right|$.

Il nous reste à expliciter un tel courant R_χ, car celui-ci n'est pas du tout unique, contrairement au cas de la dimension 1. La théorie de Hodge fournit des opérateurs $\partial^*, \overline{\partial}^*, G$ qui permettent de résoudre canoniquement l'opérateur dd^c (voir [GH]). Dans la pratique, il s'agit d'intégrer contre un noyau $K(x, y)$ tel que $dd^c K = [\Delta] - \theta$, où $[\Delta]$ désigne le courant d'intégration sur la diagonale de X^2, et θ est une forme différentielle lisse fermée cohomologue à $[\Delta]$. Nous renvoyons le lecteur à [BGS] pour une étude systématique de ce type de noyau, et à la preuve de la Proposition 2.1 de [DS 4] pour une application dans un contexte dynamique : il y est montré notamment qu'on peut décomposer le noyau $K = K_1 - K_2$ en une différence de formes positives, $K_i \geq 0$. Le courant R_χ est obtenu en intégrant contre K,

$$R_\chi(x) = \int_{y \in X} K(x,y) \wedge [\chi(y)\mu_f(y) - \mu_f(y)].$$

Il se décompose en $R_\chi = R_1 - R_2$ en suivant la décomposition $K = K_1 - K_2$. On obtient ainsi l'encadrement

$$-\int K_i(x,y) \wedge \mu_f(y) \leq R_i(x) \leq ||\chi||_{L^\infty} \int K_i(x,y) \wedge \mu_f(y).$$

L'estimation de la vitesse de mélange résulte alors de $||R_\chi|| \leq C||\chi||_{L^\infty}$. $\square$

Remarques 3.2 *Lorsque f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$, ce résultat est dû à J.-E.Fornaess et N.Sibony [FS 3]. La méthode que nous proposons est intéressante également dans ce cas : elle évite le recours à des propriétés fines et techniques de théorie du pluripotentiel.*

T.-C.Dinh et N.Sibony donnent dans [DS 1,8,9] une preuve différente de l'estimation de la vitesse de mélange. Ils démontrent également que la mesure μ_f mélange à tout ordre, et qu'elle est même K-mélangeante (voir [CFS] pour les définitions et [DS 1] pour une preuve).

Il est probable que (f, X) soit en fait conjugué au décalage de Bernoulli sur λ symboles. Cela a été démontré par D.Heicklen, C.Hoffman [HH] et J.-Y.Briend [Br] lorsque f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ (voir également [Buz]).

3.2 Propriétés ergodiques de μ_f

Soit, comme précédemment, $f : X \to X$ une transformation dont le degré topologique $\lambda_k(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques.

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses précédentes,*

1. *la mesure μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale ;*
2. *elle est hyperbolique, ses exposants de Lyapunov vérifient*

$$\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_k \geq \frac{1}{2} \log \lambda_k(f)/\lambda_{k-1}(f) > 0;$$

3. *les points périodiques répulsifs s'équidistribuent selon μ_f.*

Autrement dit la conjecture est vérifiée lorsque $l = k$. Ce résultat est dû à J.-Y.Briend et J.Duval lorsque f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ [BrD 1,2]. Le cas méromorphe est traité dans [G 5], [DS 3,4].

L'idée centrale de la démonstration est de construire et contrôler beaucoup de branches inverses de f^n, en suivant une méthode initiée par M.Lyubich en dimension 1 [Ly] (voir section 1.4) et généralisée par J.-Y.Briend et J.Duval [BrD 2] en dimension supérieure. Le lemme clef est le suivant :

Lemme 3.4 *Soit* $V_l = \cup_{j=1}^{l} f^j(\mathcal{C}_f)$, *où* $\mathcal{C}_f$ *désigne l'ensemble critique de* f. *Fixons* $\varepsilon > 0$ *et* $1 < \delta < \lambda/\lambda_{k-1}(f)$. *Alors il existe* $l \in \mathbb{N}$ *et* $C > 1$ *tels que pour toute boule* $\overline{B}$ *qui évite* V_l, *on peut construire au moins* $(1-\varepsilon)\lambda^n$ *branches inverses* f_i^{-n} *de* f^n *sur* B, $n \geq l$, *avec*

$$diam(f_i^{-n}B) \leq C\delta^{-n/2}.$$

La méthode de démonstration est très proche du cas des endomorphismes holomorphes traité par J.-Y.Briend et J.Duval. Nous l'avons esquissée dans la section 1.4 dans le cas de la dimension 1 en utilisant des arguments qui passent en dimension supérieure. Nous renvoyons le lecteur à l'article original [BrD 2] ainsi qu'à l'exposé de X.Buff au séminaire Bourbaki [Buf 2] pour plus de détails sur le cas holomorphe.

La présence de points d'indétermination rend les détails techniques plus compliqués dans le cas méromorphe. Il est par exemple délicat d'estimer certaines intégrales qui, dans le cas holomorphe, se calculent directement en cohomologie (voir Lemme 1.5 dans [G5] pour une illustration). Nous renvoyons le lecteur à [G 5], [DS 1,3,4] pour les détails et nous nous contentons de donner ici la preuve du Lemme 3.4.

Preuve du Lemme 3.4. Fixons $\varepsilon > 0$ et $1 < \delta < \lambda/\lambda_{k-1}(f)$. Fixons également $l = l_\varepsilon >> 1$ (la valeur sera précisée plus loin) et $B = B(p,r)$ une boule t.q. $\overline{B} \cap V_l = \emptyset$.

Construction des branches inverses. Nous allons construire des branches inverses f_i^{-n} de f^n sur B par récurrence.

Etape l (initialisation). Comme B ne rencontre pas les valeurs critiques de f^l, il y a λ^l branches inverses f_i^{-l} bien définies de f^l sur B. On note $B_i^{-l} := f_i^{-l}B$ leurs images.

Etape $l+1$. Si $\overline{B_i^{-l}}$ ne rencontre pas les valeurs critiques V_1 de f, on peut définir λ nouvelles branches inverses de f sur B_i^{-l}. Lorsque $\overline{B_i^{-l}}$ rencontre V_1, il faut mesurer de quelle façon : on diminue pour cela légèrement le rayon de B et on poursuit la contruction des branches inverses si $f_i^{-l}(\varrho_{l+1}\overline{B}) \cap V_1 = \emptyset$, où $\varrho_n := 1 - \sum_{j=l}^{n} j^{-2}$. Lorsque $f_i^{-l}(\varrho_{l+1}\overline{B}) \cap V_1 \neq \emptyset$, il vient $f^l(B_i^{-l} \cap V_1) \cap \varrho_{l+1}B \neq \emptyset$, c'est à dire que l'ensemble analytique $Z_l := f^l(B_i^{-l} \cap V_1)$ pénètre de façon consistante à l'intérieur de la boule B. Fixons $z_l \in Z_l$ tel que $B(z_l, l^{-2}r) \subset B$. Alors $B(z_l, l^{-2}r) \cap Z_l$ est un sous-ensemble analytique sans bord de dimension $s = \dim_{\mathbb{C}} V_1$ de $B(z_l, l^{-2}r)$. Comme Z_l a un nombre de Lelong positif au point z_l, il vient

$$C_1(rl^{-2})^{2s} \leq \int_{B(z_l,l^{-2}r)} [Z_l] \wedge \omega^s \leq \int [f^l B_i^{-l} \cap V_1] \wedge \omega^s,$$

pour une constante $C_1 > 0$ uniforme. Or

$$\sum_i \int [f^l B_i^{-l} \cap V_1] \wedge \omega^s \leq \int (f^l)_*[V_1] \wedge \omega^s \leq C_2[\lambda_s(f) + \varepsilon']^l,$$

où $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit et $C_2 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\varepsilon' > 0$. Observons que $\lambda_s(f) \leq \lambda_{k-1}(f)$ (cf Théorème 2.4.a). Dans la suite on ajuste la valeur de ε' de sorte que $\delta = [\lambda_{k-1}(f) + \varepsilon']/\lambda > 1$. il résulte des inégalités précédentes que

$$\sharp\{i \,/\, f_i^{-l}(\varrho_{l+1}\overline{B}) \cap V_1 \neq \emptyset\} \leq C_3 l^{4(k-1)} \delta^{-l} \lambda^l.$$

Si l est choisi suffisamment grand, le nombre des préimages B_i^{-l} qui rencontrent V_1 de façon consistante est donc négligeable par rapport au nombre total λ^l de préimages. On a donc fabriqué $\lambda^{l+1}[1 - C_3 l^{4(k-1)} \delta^{-l}]$ préimages de f^{l+1} sur $\varrho_{l+1}B$.

Etape n. On procède ensuite par récurrence pour construire des préimages f_i^{-n} de f^n sur $\varrho_n B$, i.e. en diminuant à chaque étape légèrement le rayon de la boule $B(p, r)$ de départ. A l'étape n, on a donc construit au moins

$$d_n := \lambda^n \left[1 - C_3 \sum_{j=l}^{n-1} l^{4(k-1)} \delta^{-l} \right] \geq \lambda^n (1 - \varepsilon/2)$$

branches inverses f_i^{-n} qui sont toutes bien définies sur la boule $B' = B(p, r')$ de rayon

$$0 < r' = r \left[1 - \sum_{j \geq l} j^{-2} \right] \leq \varrho_n r,$$

arbitrairement proche de r, si on choisit initialement l suffisamment grand.

Diamètre des images. Nous souhaitons à présent estimer le diamètre des préimages de la boule $B' = B(p, r')$. Pour cela nous allons trancher B' par des disques holomorphes locaux Δ_θ passant par p et estimer les diamètres $diam f_i^{-n}(\Delta_\theta)$ pour beaucoup de θ.

Soit ω' une $(k-1, k-1)$-forme positive fermée à coefficients dans $L^1(X)$ qui est lisse dans $X \setminus \{p\}$ et telle que

$$\omega' = \int_{\theta \in \mathbb{P}^{k-1}} [\Delta_\theta] d\nu(\theta) \ \text{ dans } B',$$

où ν désigne la mesure de Fubini-Study sur l'ensemble $\mathbb{P}^{k-1}$ des droites locales passant par p. On peut construire une telle forme ω' en considérant l'éclatement de X au point p ou, à la main, en posant

$$\omega' = [A\omega_1 + dd^c(\chi \log dist(\cdot, p)]^{k-1}.$$

Ici χ désigne une fonction de troncature telle que $\chi \equiv 1$ dans $2B'$ et $\chi \log dist(\cdot, p) \in \mathcal{C}^\infty(X \setminus \{p\})$, et $\omega_1 \geq 0$ est une $(1,1)$-forme lisse fermée telle que $\omega_1 \equiv 0$ dans B' et $\omega_1 > 0$ hors de $\overline{B'}$. On choisit $A >> 1$ de sorte que la positivité de $A\omega_1$ compense la négativité de $dd^c[\chi \log dist(\cdot, p)]$. Observons que

$$0 \leq \sum_i \int_{B'} (f_i^{-n})_* \omega' \wedge \omega \leq \int_X (f^n)^* \omega' \wedge \omega \leq C_4 \delta^{-n} \lambda^n.$$

Il s'ensuit qu'au moins $(1-\varepsilon)\lambda^n$ des branches inverses f_i^{-n} sont telles que

$$\int \text{Aire}(f_i^{-n} \Delta_\theta) d\nu(\theta) = \int_{B'} (f_i^{-n})_* \omega' \wedge \omega \leq \frac{2C_4}{\varepsilon} \delta^{-n}.$$

On note I_ε^n l'ensemble de ces branches inverses et, pour $i \in I_\varepsilon^n$,

$$A_i^n := \left\{ \theta \in \mathbb{P}^{k-1} \,/\, \text{Aire}(f_i^{-n} \Delta_\theta) \leq \frac{4C_4}{\varepsilon} \delta^{-n} \right\}.$$

J.Y.Briend et J.Duval montrent dans [BrD 2] que l'estimation d'aire implique, quitte à légèrement diminuer la taille de la boule B', un contrôle de diamètre,

$$\text{diam}(f_i^{-n} \Delta_\theta) \leq C_5 \delta^{-n/2},\ \theta \in A_i^n,$$

pour une constante $C_5 > 0$ indépendante de n. Or $\nu(A_i^n) \geq 1/2$, en particulier A_i^n est de capacité projective $\geq 1/2$. Un résultat de N.Sibony et P.M.Wong [SW] implique alors

$$\text{diam}\left(f_i^{-n} \frac{1}{2} \Delta_\theta \right) \leq C_5 \delta^{-n/2}, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{P}^{k-1}.$$

L'estimation du diamètre de $f_i^{-n} B''$ en résulte, $B'' = B'/2$. Nous renvoyons le lecteur à [GZ 1] (Théorème 6.3) pour la définition et quelques propriétés de la capacité projective. □

Remarque 3.5 *La preuve ci-dessus est une version légèrement modifiée de celle du Lemme 3.3 de [G 5], qui suppose la variété ambiante projective (ce qui permet l'utilisation du Théorème de Bezout, comme dans l'approche de J.Y.Briend et J.Duval [BrD 2]). On peut s'affranchir de l'hypothèse de projectivité comme cela a été observé par T.C.Dinh et N.Sibony dans le cadre des applications d'allure polynomiale [DS 1].*

3.3 Exemples

3.3.1 Endomorphismes holomorphes

Il y a beaucoup d'endomorphismes *holomorphes* f sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. Ils s'écrivent en coordonnées homogènes $f = [P_0 : \cdots : P_k]$, où les P_j sont des polynômes homogènes premiers entre eux de degré $d \in \mathbb{N}^*$, avec $\cap_{j=0}^k (P_j = 0) = \{0\}$. Ils vérifient $\lambda_j(f) = d^j$, $0 \leq j \leq k$ et sont donc de grand degré topologique dés que $d \geq 2$.

Ce sont les seuls exemples "intéressants" d'endomorphismes holomorphes de grand degré topologique sur les surfaces kählériennes compactes :

Théorème 3.6 *Soit X une surface kählérienne compacte, et $f : X \to X$ un endomorphisme holomorphe tel que $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$. Alors on est dans l'une des situations suivantes :*
– *soit $X = \mathbb{P}^2$;*
– *soit X est un tore ;*
– *soit f est un automorphisme d'entropie positive ;*
– *soit f préserve une fibration et $\lambda_2(f) > \lambda_1(f)$.*

Nous renvoyons le lecteur au texte de S.Cantat [Ca 4] et à [Fu], [Na], pour une preuve de ce résultat.

Corollaire 3.7 *Les seuls endomorphismes holomorphes tels que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) \geq 2$ sont ceux des tores.*

On peut par contre fabriquer de nombreux exemples de transformations méromorphes telles que $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$ sur les surfaces rationnelles et les surfaces de dimension de Kodaira nulle.

Remarque 3.8 *Les endomorphismes holomorphes non inversibles des surfaces ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir [Fu], [Na]). Ils vérifient tous $\lambda_2(f) = \lambda_1(f)^2$, à l'exception d'un produit direct de deux fractions rationnelles de degrés distincts sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si le modèle minimal est différent de $\mathbb{P}^2$, l'endomorphisme (ou son carré) préserve une fibration rationnelle : c'est donc un produit croisé, dont la dynamique est une version fibrée de la dynamique unidimensionnelle. Il en est de même d'un endomorphisme dans un éclaté X de $\mathbb{P}^2$: pour que le relevé de $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ soit un endomorphisme de X, il faut que f préserve le pinceau de droites issues du point auquel on éclate. En conclusion, les seuls endomorphismes holomorphes non inversibles véritablement intéressants sont ceux de $\mathbb{P}^2$!*

Nous étudierons la dynamique des endomorphismes holomorphes *inversibles* (automorphismes) au chapitre 4..

3.3.2 Endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$

Les endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ de la forme

$$f(z_1, \ldots, z_k) = (P_1(z_1), P_2(z_1, z_2), \ldots, P_k(z_1, \ldots, z_k)),$$

où les P_j sont des polynômes de degré $d_j \geq 2$ en z_j s'étendent en des transformations méromorphes de $\mathbb{P}^k$ telles que

$$\lambda_l(f) = \max_{i_1 < \cdots < i_l} d_{i_1} \cdots d_{i_l}; \text{ en particulier } \lambda_k(f) > \max_{j \leq k-1} \lambda_j(f).$$

Ces endomorphismes ont été abondamment étudiés (voir [He], [Se], [J 1,2], [FaG]), notamment en dimension deux : l'analyse de leur dynamique est en effet simplifiée par le fait que ces *produits croisés* préservent les feuilletages linéaires $\{z_1 = c_1, \ldots, z_j = c_j\}$.

Il est montré en particulier dans [FaG] que la mesure d'entropie maximale μ_f peut être exprimée comme un produit extérieur

$$\mu_f = dd^c G_1 \wedge \cdots \wedge dd^c G_k,$$

où G_1 est une fonction plurisousharmonique continue dans $\mathbb{C}^k$ telle que $G_1 \circ f = \lambda_1 G_1$, G_2 est une fonction de Green partielle définie uniquement sur le support de $dd^c G_1$ qui vérifie $G_2 \circ f = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} G_2$, etc. L'intérêt de cette construction réside dans le fait que l'on sait contrôler le module de continuité des fonctions G_i (dans l'esprit de la Proposition 1.2, voir [DG]) et que cela donne par exemple des informations sur la dimension de Hausdorff du support de la mesure μ_f. Lorsque $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ s'étend en un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$, on obtient en fait $G_1 = \cdots = G_k$ et la construction est due à J.E.Fornaess, N.Sibony [FS 2] et J.H.Hubbard, P.Papadopol [HP 1]. Lorsque l'extension de f a des points d'indétermination à l'infini, on obtient $(dd^c G_1)^k = 0$ dans $\mathbb{C}^k$ et il devient nécessaire de considérer des fonctions de Green partielles.

La construction de fonctions de Green partielles a été étendue [G 1] à des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui ne sont pas des produits croisés. Cette approche a été généralisée en dimension supérieure dans [DS 2].

Les applications concernées sont cependant d'un type particulier : il faut un contrôle précis de la croissance de f sur le support du courant $dd^c G_1$, ce qui n'est pas toujours possible (voir [DiDS]). On s'en rend déjà compte en considérant les endomorphismes polynomiaux $f = (P_1, P_2)$ *quadratiques* de $\mathbb{C}^2$, i.e. ceux tels que $\max(\deg P_1, \deg P_2) = 2$. Ils sont classifiés dans [G 3], à conjugaison près, en fonction de leurs degrés dynamiques (λ_1, λ_2) : on obtient cinq familles telles que $\lambda_2 > \lambda_1$ et quatre possibilités pour les couples de degrés (λ_1, λ_2),

$$(\sqrt{2}, 2), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right), (2,3), \text{ et } (2,4).$$

Nous renvoyons le lecteur au Théorème 2.1 de [G 3] pour plus de détails.

3.3.3 La méthode de Newton

Si l'on souhaite trouver les racines du système d'équations polynomiales

$$w = P(z) \quad \text{et} \quad z = Q(w),$$

où P, Q sont des polynômes de degré $p, q \geq 2$, il est naturel d'utiliser la méthode de Newton qui consiste à itérer l'application rationnelle f définie pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ par

$$f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} P'(z) & -1 \\ -1 & Q'(w) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P(z) - w \\ Q(w) - z \end{pmatrix}.$$

C'est un problème mentionné par J.E.Fornaess et N.Sibony dans [FS 4], qui a été étudié par J.-H.Hubbard et P.Papadopol [HP 2]. Ces derniers montrent que f induit une transformation 1-stable de $\mathbb{P}^2$ telle que

$$\lambda_1(f) = r_1(f) = p + q - 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = pq > \lambda_1(f),$$

et entament une étude systématique de la dynamique de f.

Le Théorème 3.1 fournit une mesure canonique μ_f d'entropie maximale $= \log \lambda_2(f)$ qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. En particulier μ_f ne charge pas les points d'indétermination : cela répond à une question d'A.Russsakovskii et B.Shiffman [RS]. On trouvera dans [HP 2] une preuve géométrique très élégante de ce dernier point, due à A.Douady.

3.3.4 Variétés non rationnelles

Rappelons qu'une variété projective X de dimension k est dite unirationnelle s'il existe une application méromorphe dominante $\Phi : \mathbb{P}^k \to X$. Lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 2$, toutes les variétés unirationnelles sont en fait rationnelles (Théorème de Castelnuovo, voir [Bea]). Ce n'est plus vrai en dimension ≥ 3 : V.A.Iskovskikh et Yu.A.Manin [IM] ont montré que les quartiques lisses de $\mathbb{P}^4$ sont des variétés unirationnelles dont le groupe des transformations birationnelles est fini. Elles ne sont donc pas rationnelles. On peut vérifier qu'elles n'admettent pas d'endomorphisme holomorphe non inversible (voir[ARV]), bien qu'elles admettent de nombreuses transformations méromorphes dynamiquement intéressants, comme le montre l'exemple suivant, dû à F.Campana, qui est mentionné dans [DS 1].

Exemple 3.9 *Soit X une variété projective : on peut la plonger dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$ puis projeter sur un k-plan générique : autrement dit on dispose toujours d'une application méromorphe dominante $p : X \to \mathbb{P}^k$. Supposons que X est unirationnelle, on fixe $\Phi : \mathbb{P}^k \to X$ une application méromorphe dominante. Soit alors $g : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ une transformation rationnelle. Elle induit des transformations méromorphes sur X,*

$$f := \Phi \circ g^j \circ p, \quad \textit{où } j \in \mathbb{N}.$$

Il résulte de la Proposition 2.6 qu'il existe $C_X \geq 1$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, et pour tout $1 \leq l \leq k$,

$$\lambda_l(f) \leq C_X^2 r_l(\Phi) r_l(p) r_l(g^j).$$

Or pour $l = k$, on obtient bien sûr $\lambda_k(f) = \lambda_k(\Phi)\lambda_k(p)\lambda_k(g)^j$. On en déduit que si g a un grand degré topologique –i.e. si $\lambda_k(g)$ domine tous les autres degrés topologiques–, alors $\lambda_k(f)$ domine tous les autres degrés dynamiques de f, pourvu que j soit choisi assez grand.

3.4 Autres développements

Nous concentrons nos efforts dans ce mémoire sur la construction d'une mesure d'entropie maximale, et cherchons à établir quelques unes de ses propriétés ergodiques, en relation avec la conjecture énoncée dans l'introduction. Il y a bien entendu de nombreuses autres directions de recherche : on peut s'intéresser à des propriétés plus fines de cette même mesure (dimension, régularité), ou étudier d'autres mesures qui rendent mieux compte de la géométrie des ensembles de Julia (mesures conformes). On peut également s'intéresser à la façon dont tous ces objets dépendent d'un paramètre. Nous passons en revue dans cette section quelques unes des directions qui ont été en partie explorées.

3.4.1 Dimension et exposants de Lyapunov

Nous avons mentionné à plusieurs reprises qu'il existe un lien entre la régularité des potentiels de la mesure μ_f et la dimension ponctuelle de celle-ci. Rappelons que la dimension de Hausdorff de μ_f est

$$\dim(\mu_f) := \inf\{\dim_H(Y) \,/\, Y \text{ borélien tel que } \mu_f(Y) = 1\},$$

où $\dim_H(Y)$ désigne la dimension de Hausdorff du borélien Y. La dimension ponctuelle supérieure de μ_f au point p est

$$\overline{\dim}(\mu_f, p) := \limsup_{r \to 0} \left[\frac{\log \mu_f B(p,r)}{\log r} \right].$$

On définit de façon analogue la dimension ponctuelle inférieure $\underline{\dim}(\mu_f, p)$. Nous renvoyons le lecteur au livre de Y.Pesin [Pe] pour plus de renseignements sur ces notions. Il résulte de la Proposition 1.2 et du Corollaire 1.4 que, lorsque $k = 1$,

$$\underline{\dim}(\mu_f, p) \geq \frac{\log \lambda}{\chi_{top}(f)}, \text{ pour tout point } p \in X;$$

en particulier $\dim(\mu_f) \geq \log \lambda / \chi_{top}(f)$. C'est le "principe de distribution de masse" (voir [Pe] p43). On peut en fait raffiner ces estimations et obtenir la formule de F.Ledrappier [L], A.Manning [Ma] et R.Mañe [Mn] ;

$$\dim(\mu_f) = \frac{\log \lambda}{\chi(\mu_f)}.$$

Cette formule a été partiellement généralisée en dimension supérieure, dans le cadre des transformations de grand degré topologique (voir [BiDeM], [DiD]). T.C.Dinh et C.Dupont [DiD] obtiennent notamment l'encadrement

$$\frac{\log \lambda_k(f)}{\chi_1(\mu_f)} \leq \dim(\mu_f) \leq 2k - \frac{\sum_{j=1}^{k} \chi_j(\mu_f) - \log \lambda_k(f)}{\chi_1(\mu_f)}, \tag{3.2}$$

où $\chi_1(\mu_f) \geq \cdots \geq \chi_k(\mu_f)$ désignent les exposants de Lyapunov de μ_f.

Nous avons vu (Théorème 3.3.2) que ceux-ci sont tous au moins égaux à $\frac{1}{2} \log \lambda_k(f)/\lambda_{k-1}(f)$. Il est naturel de s'intéresser au cas extrémal où les exposants sont minimaux, i.e. lorsque

$$\chi_1(\mu_f) = \cdots = \chi_k(\mu_f) = \frac{1}{2} \log[\lambda_k(f)/\lambda_{k-1}(f)].$$

C'est un problème qui a été étudié par plusieurs auteurs (voir par exemple [L], [Z], [BeL], [BeD], [Ca 3]). Les résultats obtenus jusqu'ici nous incitent à poser la question suivante :

Question 3.10 *Soit $f : X \to X$ une transformation méromorphe de grand degré topologique, $\lambda_k(f) > \max_{j \leq k-1} \lambda_j(f)$. Les propriétés suivantes sont-elles équivalentes ?*

1. *Les exposants de Lyapunov de μ_f sont tous égaux à $\frac{1}{2} \log \lambda_k(f)/\lambda_{k-1}(f)$.*
2. *La dimension de Hausdorff de μ_f est égale à $2k$ et les degrés dynamiques vérifient $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$.*
3. *La mesure μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et les degrés dynamiques vérifient $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$.*
4. *f est un exemple de Lattès.*

Une transformation méromorphe est un exemple de Lattès s'il existe un tore complexe compact A de dimension k, un groupe fini G d'automorphismes de A et une dilatation affine F de A tels que

1. F passe au quotient en un endomorphisme de la variété A/G ;
2. il existe une application birationnelle $\pi : X \to A/G$ t.q. $\pi \circ f = F \circ \pi$.

Le lecteur trouvera dans [Mi 2] une classification complète des exemples de Lattès en dimension 1. A.Zdunik [Z] a montré dans ce contexte que la réponse à la question 3.10 est positive. C.Dupont donne dans [Dup] une classification partielle des exemples de Lattès en dimension deux. C.Dupont, F.Berteloot et J.-J.Loeb ont donné une réponse positive à la question 3.10 lorsque f est un endomorphisme *holomorphe* de l'espace projectif complexe $X = \mathbb{P}^k$ (voir [BeL], [BeD], [Dup 2]). Leur travail a été généralisé par S.Cantat [Ca 3] au cas des transformations méromorphes des *surfaces*. La question reste donc ouverte pour les transformations méromorphes en dimension ≥ 3. Nous donnons ci-dessous quelques indications qui permettent de justifier la partie la plus simple de ces équivalences.

Eléments de réponse. Supposons pour commencer que les exposants de Lyapunov sont minimaux. Il résulte alors de l'inégalité de Ruelle-Margulis que,

$$k \log(\lambda_k/\lambda_{k-1}) = 2 \sum_{j=1}^{k} \chi_j \geq \log \lambda_k = h_{\mu_f}(f). \tag{3.3}$$

Ainsi $\log \lambda_{k-1} \leq (1 - 1/k) \log \lambda_k$, ce que l'on peut réécrire

$$\log \lambda_{k-1} = \log \lambda_{(1-1/k)\cdot k+1/k\cdot 1} \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log \lambda_k + \frac{1}{k} \log \lambda_0, \tag{3.4}$$

puisque $\lambda_0(f) = 1$. Or l'application $j \mapsto \log \lambda_j(f)$ est concave (Théorème 2.4.a). Il y a donc égalité dans toutes les inégalités précédentes : l'égalité dans (3.4) implique que $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$ pour tout $0 \leq j \leq k$, et l'égalité dans (3.3) implique – par les travaux de F.Ledrappier [L] – que μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous avons donc obtenu l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) de la question 3.10.

L'implication (3) $\Rightarrow$ (2) est évidente. Nous montrons à présent que (2) $\Rightarrow$ (1). Comme μ_f est de dimension maximale $2k$, la majoration dans (3.2) montre que $2\sum_{j=1}^{k} \chi_j = \log \lambda_k$, donc μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. La relation algébrique $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$ montre que les exposants de Lyapunov sont tous minorés par $\frac{1}{2} \log \lambda_1(f)$, donc $2\sum_{j=1}^{k} \chi_j \geq k \log \lambda_1 = \log \lambda_k$. Toutes ces inégalités sont donc des égalités, en particulier les exposants de Lyapunov sont tous égaux à $\frac{1}{2} \log \lambda_1 = \frac{1}{2} \log \lambda_k/\lambda_{k-1}$.

Lorsque f est un exemple de Lattès, les assertions (1),(2),(3) sont trivialement vérifiées. La partie difficile consiste à montrer la réciproque à cette dernière implication. Nous renvoyons le lecteur au texte de S.Cantat [Ca 4] (ainsi qu'aux articles originaux) pour plus de détails. □

Remarque 3.11 *La preuve de S.Cantat [Ca 3] s'appuie en partie sur la classification de Kodaira des surfaces et ne passe donc pas en dimension supérieure. Notons que l'hypothèse algébrique $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$ est essentielle : S.Cantat donne un exemple d'une transformation méromorphe sur une surface $K3$ dont la mesure μ_f est lisse, mais qui ne provient pas d'un endomorphisme affine d'un tore (voir Théorème C dans [Ca 3]).*

Rappelons que la dimension de Hausdorff de μ_f est en général différente de la dimension de Hausdorff de son support : pour un polynôme $f(z) = z^\lambda + a_{\lambda-2}z^{\lambda-2} + \cdots + a_0$ de degré $\lambda \geq 2$, on obtient (Proposition 1.16)

$$\dim(\mu_f) = \frac{\log\lambda}{\chi(\mu_f)} = \frac{\log\lambda}{\log\lambda + \sum_{f'(c)=0} G_f(c)} \leq 1,$$

alors que l'ensemble de Julia $J_f = \mathrm{Supp}\mu_f$ peut être de dimension de Hausdorff égale à 2 (voir [Shi]). Mentionnons à ce sujet que X.Buff et A.Chéritat [BuC] ont exhibé de nombreux exemples de polynômes quadratiques pour lesquels J_f est de mesure de Lebesgue strictement positive.

Si l'on s'intéresse à des propriétés géométriques fines du support de μ_f, il faut donc étudier d'autres mesures invariantes que μ_f : c'est un des objets du formalisme thermodynamique et nous renvoyons le lecteur à [Zi], [DPU] pour quelques résultats dans cette direction (en dimension 1).

3.4.2 Théorème limite centrale

Certains auteurs se sont intéressés aux propriétés stochastiques satisfaites par le couple (f, μ_f). Si φ est une fonction mesurable de M vers $\mathbb{R}$, les fonctions $X_k = \varphi \circ f^k$ forment une suite de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (M, μ_f) ; on s'attache alors à décrire le comportement asymptotique des sommes de Birkhoff

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} X_j.$$

L'approche principale consiste à comparer ce comportement à celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par exemple, l'ergodicité de μ_f et le théorème ergodique de Birkhoff assurent que les X_k satisfont la loi des grands nombres : dès que φ est intégrable, les moyennes $S_N(x)/N$ tendent μ_f-presque sûrement vers la constante $\int_M \varphi\, d\mu_f$.

Poussant l'analyse un cran plus loin, il convient de déterminer si la suite X_k satisfait un théorème limite centrale. On suppose donc que φ a une moyenne nulle et que son carré est intégrable, puis on dit que φ *satisfait le théorème limite centrale* s'il existe un réel *strictement positif* σ tel que

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_f \left\{ x\, ;\, \frac{1}{\sqrt{N}} S_N(x) \in A \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(\frac{-t2}{2\sigma 2}\right) dt,$$

pour tout intervalle de nombres réels A.

À ce stade il devient nécessaire de faire des hypothèses de régularité sur la fonction φ. Pour s'en convaincre, commençons par quelques remarques. Si l'on additionne à φ un cobord $\psi \circ f - \psi$, où ψ appartient à $L^2(M, \mu_f)$, ceci ne change pas le fait que φ satisfasse ou non le théorème limite centrale, ni la valeur de σ. D'autre part, les cobords $\psi \circ f - \psi$ forment un sous-espace dense de l'espace de Hilbert $L^2_0(M, \mu_f)$ des fonctions de carré sommable et de moyenne nulle. Or un théorème de Burton et Denker [BuD] assure que si μ est une mesure invariante, ergodique et non atomique, il existe toujours au moins un élément φ de $L^2_0(M, \mu)$ qui satisfait le théorème limite centrale. Il s'ensuit que les éléments de $L^2_0(M, \mu_f)$ qui satisfont le théorème limite centrale forment un sous-espace dense de $L^2_0(M, \mu_f)$.

À l'opposé, on dispose du théorème suivant de Volný [Vo] montrant qu'il existe toujours un sous-ensemble G_δ-dense de fonctions dans $L^2_0(M, \mu_f)$ pour lesquelles les moyennes de Birkhoff suivent des lois arbitraires :

Théorème 3.12 (Volný) *Soit (M, f, μ) un système dynamique probabilisé, ergodique et sans atome. Il existe un G_δ-dense $\mathcal{E} \subset L^2_0(M, \mu)$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$ et pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} t\, d\nu(t) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\nu(t) = 1$, il existe une suite N_i tendant vers l'infini telle que la loi de $\frac{S_{N_i}}{\|S_{N_i}\|_2}$ converge vers ν.*

Le cadre général des fonctions de carré sommable est donc trop vaste en général. On s'attend cependant à ce que le théorème limite centrale soit valable si la fonction φ est suffisamment régulière et si la dynamique de f est suffisamment mélangeante. C'est le cas lorsque f est une transformation dilatante d'une variété compacte, si φ est höldérienne et si $\mu = \nu_f$ est la mesure de probabilité f-invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [Vi]). C'est également le cas pour les transformations méromorphes de grand degré topologique (=transformations "cohomologiquement dilatantes") , (f, μ_f), comme l'ont montré S.Cantat-S.Leborgne [CL] (cas des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$) et T.C.Dinh et N.Sibony [DS 9] (cas général).

Théorème 3.13 *Soient M une variété projective complexe et $f : M \to M$ une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante. Soit ξ une fonction höldérienne sur M dont l'intégrale vis-à-vis de μ_f est nulle. Ou bien ξ est un cobord, ou bien la suite de variables aléatoires $(\xi \circ f^j)$ satisfait un théorème limite centrale : il existe un réel strictement positif σ tel que*

$$\lim_{N \to +\infty} \mu \left\{ x\,;\ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \xi \circ f^j(x) \in A \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(\frac{-t2}{2\sigma 2}\right) dt$$

pour tout intervalle de nombres réels A.

3.4.3 Ensemble exceptionnel

Il résulte du Lemme 3.4 que si un point a n'appartient pas à l'ensemble postcritique $PC(f) = \cup_{j\geq 1} f^j(\mathcal{C}_f)$, alors

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\varepsilon_a = \frac{1}{\lambda^n}\sum_{f^n(p)=a}\varepsilon_p \longrightarrow \mu_f, \tag{3.5}$$

où ε_p désigne la masse de Dirac au point p. On appelle *ensemble exceptionnel* $\mathcal{E}_f$ l'ensemble des points a pour lesquels la convergence (3.5) n'a pas lieu.

Lorsque $k = 1$, il résulte du Lemme 1.9 et du Théorème 1.10 que $\mathcal{E}_f$ est un ensemble fini constitué d'au plus deux points. Lorsque $k \geq 2$, l'ensemble $\mathcal{E}_f$ n'est plus nécessairement algébrique car il contient l'orbite des points sur lesquels une courbe est contractée (voir Remarque 6.5 dans [G 3]). Plusieurs auteurs se sont cependant intéressés à la caractérisation de l'ensemble $\mathcal{E}_f$ lorsque $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ est un endomorphisme *holomorphe* :

- J.E.Fornaess et N.Sibony ont montré [FS 3] que $\mathcal{E}_f$ est un ensemble pluripolaire ;
- J.Y.Briend et J.Duval ont montré [BrD 2] que $\mathcal{E}_f$ est un ensemble algébrique, et que c'est le plus grand sous-ensemble algébrique totalement invariant ;
- C.Favre et M.Jonsson ont entrepris dans [FaJ 1] une étude fine de l'ensemble $\mathcal{E}_f$ lorsque $k = 2$.

On s'attend dans ce dernier cas à ce que le nombre de points totalement invariants (i.e. les composantes $\mathcal{E}_f^0$ de dimension 0 de $\mathcal{E}_f$) soit au plus égal à 3. E.Amerik et F.Campana ont obtenu dans [AC 1] la majoration $\sharp\, \mathcal{E}_f^0 \leq 9$. T.C.Dinh et N.Sibony montrent dans [DS 1], corollaire 3.2.8, que $\sharp\, \mathcal{E}_f^0 \leq 3$ lorsque $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ provient d'un endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$.

3.4.4 Espace des paramètres

Il est intéressant d'étudier la façon dont les objets construits jusqu'ici (mesure μ_f, exposants $\chi_j(\mu_f)$, ensemble de Julia, etc) dépendent de la transformation f.

Lorsque $f = f_t : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est une famille de fractions rationnelles de degré $\lambda \geq 2$ qui dépend holomorphiquement d'un paramètre $t \in M$ – M une variété complexe de dimension m –, nous avons observé dans la section 1.3 que l'exposant de Lyapunov $\chi(\mu_{f_t})$ est une fonction plurisousharmonique et Hölder-continue du paramètre t. L'étude des mesures de bifurcation $(dd^c\chi)^m$ fait l'objet de plusieurs travaux récents (voir [DeM], [BaBe], [DuF]). Lorsque $f_t(z) = z^2 + t$ est la famille des polynômes quadratiques ($m = 1$), la mesure $dd^c\chi$ est précisément la mesure d'équilibre de l'ensemble de Mandelbrot qui a été abondamment étudiée (voir [CG], [Mi 1]).

3.5 Généralisations

La dynamique des endomorphismes transcendants de $\mathbb{C}^k$ est un sujet difficile qui nécessite l'utilisation de techniques différentes de celles présentées dans ce mémoire. Il y a cependant une situation intermédiaire entre le monde des endomorphismes polynomiaux et celui des endomorphismes transcendants de $\mathbb{C}^k$ de grand degré topologique : c'est celui des applications d'allure polynomiale étudiées par T.C.Dinh et N.Sibony dans [DS 1].

Définition 3.14 *Soit V un ouvert connexe de $\mathbb{C}^k$ (ou d'une variété de Stein) et $U \subset\subset V$ un ouvert relativement compact. On appelle application d'allure polynomiale toute application*

$$f : U \to V \text{ holomorphe, propre,}$$

de degré topologique $\lambda \geq 2$.

Ces applications ont été introduites en dimension 1 par A.Douady et J.H.Hubbard [DH]. Dans ce cas elles sont conjuguées, dans un voisinage de l'ensemble de Julia rempli

$$K_f := \cap_{n \geq 0} f^{-n}(V),$$

à un polynôme de degré λ. Ce n'est plus vrai en dimension supérieure comme l'ont observé T.C.Dinh et N.Sibony (voir Exemple 3.4.11 dans [DS 1]). Ces derniers ont mené à bien une étude systématique de la dynamique de ces applications. Ils obtiennent notamment :

Théorème 3.15 *Soit $f : U \to V$ une application d'allure polynomiale. Il existe une mesure de probabilité invariante μ_f à support dans ∂K_f telle que*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^* \nu \longrightarrow \mu_f,$$

pour toute mesure de probabilité lisse ν dans V.

La mesure μ_f est mélangeante, d'entropie maximale $= \log \lambda$.

Notons que l'image inverse $f^*\nu$ d'une mesure de probabilité ν (pas nécessairement lisse) est bien définie par dualité car f est une application *propre* qui est un revêtement ramifié : si χ est une fonction continue à support compact dans U, alors

$$f_*\chi(x) := \sum_{f(y)=x} \chi(y)$$

est une fonction continue à support compact dans $f^{-1}U \subset U \subset\subset V$. On compte ici les préimages avec multiplicité.

Esquisse de preuve. Soit ν une mesure de probabilité lisse dans V. La convergence de $\lambda^{-n}(f^n)^*\nu$ est équivalente à la convergence de $\lambda^{-n}(f^n)_*\chi$ dans $L^1(\nu)$, pour toute fonction test χ (fonction lisse à support compact). Or une telle fonction peut s'écrire comme différence de deux fonctions psh bornées. Il suffit donc d'établir la convergence de $\lambda^{-n}(f^n)_*\varphi$, pour toute fonction φ psh bornée (bornée au voisinage de K_f suffit bien sûr).

L'observation de T.C.Dinh et N.Sibony qui est la clef de ce résultat (cf Lemme 3.2.2, [DS 1]) est que le principe du maximum garantit une telle convergence. Plus précisément, si ψ est une fonction psh dans V telle que $\lambda^{-1}f_*\psi \geq \psi$, alors

$$\sup_U \psi \geq \sup_V \frac{1}{\lambda} f_*\psi \geq \sup_V \psi,$$

donc ψ est constante.

Appliquons ceci à la convergence de la suite $\varphi_n := \lambda^{-n}(f^n)_*\varphi$. Comme φ est bornée, la suite (φ_n) est uniformément bornée par $||\varphi||_{L^\infty}$. On peut donc extraire une sous-suite convergente (φ_{n_j}) qui converge dans $L^1(\nu)$ vers une valeur d'adhérence ψ. Montrons que ψ est constante, égale à $c_\varphi = (\limsup \varphi_n)^*$, où $(\cdot)^*$ désigne la régularisation supérieure, ce qui assurera $\varphi_n \to c_\varphi$ dans $L^1(\nu)$. Posons $\psi_0 := (\limsup \varphi_n)^*$. Alors $\psi_0 = c_\varphi$ est constante, par le principe du maximum car $\lambda^{-1}f_*\psi_0 \geq \psi_0$. Si $\psi \neq c_\varphi$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\psi \leq c_\varphi - 2\varepsilon$ sur U, donc $\varphi_{n_j} \leq c_\varphi - \varepsilon$ sur $f^{-1}U$, par le lemme de Hartogs. Mais alors $\varphi_{p+n_j} \leq c_\varphi - \varepsilon$ pour tout $p \geq 1$, donc $\psi_0 \leq c_\varphi - \varepsilon$, contradiction. Notons que l'ensemble $\{x \,/\, \limsup \varphi_n(x) < c_\varphi\}$ est pluripolaire, il y a donc convergence presque partout (pour la la mesure de Lebesgue) de la suite $\varphi_n(x)$ vers c_φ. Nous verrons plus loin (Lemme 3.14) que la suite (φ_n) converge vers c_φ dans $L^2(\mu_f)$.

Il résulte de l'analyse précédente que si χ est une fonction test quelconque, alors $\chi_n := \lambda^{-n}(f^n)_*\chi$ converge presque partout et dans $L^1(\nu)$ vers une limite c_χ qui dépend linéairement de χ. Il s'ensuit que

$$\mu_f : \chi \mapsto c_\chi = \lim\langle \lambda^{-n}(f^n)^*\nu, \chi\rangle$$

est une mesure de probabilité bien définie. Elle ne dépend pas du choix de ν puisque χ_n converge presque partout vers c_χ. Si on part d'une mesure ν à support compact dans $V \setminus U$, on obtient que $\operatorname{Supp} \mu_f \subset \partial K_f$.

Observons que $f^*\mu_f = \lambda\mu_f$. Pour montrer le mélange, il faut vérifier que si χ, ψ sont des fonctions test, alors

$$I_n := \langle \chi \circ f^n \psi, \mu_f\rangle \longrightarrow c_\chi c_\psi, \quad \text{où } c_\chi = \int \chi d\mu_f,\ c_\psi = \int \psi d\mu_f.$$

La relation fonctionnelle $f^*\mu_f = \lambda\mu_f$ permet de réécrire I_n sous la forme

$$I_n = \langle \chi\mu_f, \psi_n\rangle, \ \text{ avec } \psi_n := \frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*\psi.$$

Il résulte du lemme de Hartogs (voir Lemme 3.14 ci-dessous) que ψ_n converge vers c_ψ dans $L^2(\mu_f)$. On en déduit la convergence annoncée.

Il reste à vérifier que μ_f est d'entropie maximale. On introduit les degrés dynamiques

$$\lambda_l(f) = \limsup_{n\to+\infty}[\delta_l(f^n,\omega)]^{1/n}, \quad \text{où } \delta_l(f,\omega) := \int_U f_*\omega^{k-l}\wedge\omega^l,$$

et $\lambda_k(f) = \lambda$ est le degré topologique de f. La majoration de M.Gromov (voir Théorème 2.8) et le principe variationnel donnent $h_{\mu_f}(f) \leq h_{top}(f) \leq \max_{1\leq j\leq k}\log\lambda_j(f)$. Or $\lambda = \lambda_k(f)$ domine tous les autres degrés dynamiques. En effet comme V est Stein on peut choisir une forme de Kähler ω qui s'écrit $\omega = dd^c\Phi$, où Φ est une fonction lisse strictement psh. Comme $\lambda^{-n}(f^n)_*\Phi$ converge vers c_Φ, il vient

$$\delta_{k-1}(f^n,\omega) = \int_U (f^n)_* dd^c\Phi \wedge \omega^{k-1} = o(\lambda^n),$$

car $\lambda^{-n}(f^n)_*dd^c\Phi$ converge faiblement vers 0. Les autres degrés dynamiques se majorent de façon similaire (voir corollaire 3.3.4, [DS 1]). Ainsi

$$h_{\mu_f}(f) \leq h_{top}(f) \leq \log\lambda.$$

La minoration $h_{\mu_f}(f) \geq \log\lambda$ est une conséquence de ce que μ_f est de jacobien constant $= \lambda$ et ne charge pas les valeurs critiques de f (voir Proposition 2.9, ainsi que le Théorème 2.3.1.(2) dans [DS 1]). □

Lemme 3.16 *Soit φ une fonction psh bornée dans U. Alors $\varphi_n := \lambda^{-n}(f^n)_*\varphi$ converge dans $L^2(\mu_f)$ vers $c_\varphi = \int \varphi d\mu_f$.*

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\Omega_n^\varepsilon := \{|\varphi_n - c_\varphi| > \varepsilon\}$. Le lemme de Hartogs assure que $\varphi_n \leq c_\varphi + \varepsilon^2$ pour n assez grand, d'où $\Omega_n^\varepsilon := \{\varphi_n < c_\varphi - \varepsilon\}$. On a donc pour $n \geq n_\varepsilon >> 1$,

$$\mu_f(\Omega_n^\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |\varphi_n - c_\varphi| d\mu_f \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\int [c_\varphi + \varepsilon^2 - \varphi_n] d\mu_f = 2\varepsilon,$$

car $\int \varphi_n d\mu_f = c_\varphi$. Comme la suite (φ_n) est uniformément bornée ($||\varphi_n||_{L^\infty} \leq ||\varphi||_{L^\infty}$), on en déduit

$$\int |\varphi_n - c_\varphi|^2 d\mu_f \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon||\varphi||_{L^\infty},$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.17 *T.C.Dinh et N.Sibony montrent que la convergence de $\lambda^{-n}(f^n)_*\varphi$ vers c_φ dans $L^2(\mu_f)$ implique que μ_f est K-mélangeante (voir Proposition 2.2.2, [DS 1]).*

Une difficulté importante, comme dans le cas des transformations méromorphes, est de montrer que μ_f n'est pas trop singulière, par exemple qu'elle intègre les fonctions psh. Ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant (Exemple 3.10.3 dans [DS 1]).

Exemple 3.18 *Considérons* $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (3z, Q(w)) \in \mathbb{C}^2$, *où* Q *est un polynôme de degré* $\lambda \geq 2$. *Soit*

$$V_R := \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, |z|, |w| < R \right\}.$$

Alors $f : U_R := f^{-1}V_R \to V_R$ *définit, pour* $R >> 1$ *assez grand, une application d'allure polynomiale telle que* μ_f *est portée par le sous-ensemble analytique* $(z = 0)$ *: en particulier* $\log |z| \notin L^1(\mu_f)$.

Dans cet exemple, on a $\lambda_{k-1}(f) = \lambda$. T.C.Dinh et N.Sibony montrent (corollaire 3.9.9, [DS 1]) que l'inégalité $\lambda_{k-1}(f) > \lambda = \lambda_k(f)$ est une condition nécessaire pour que μ_f intègre les fonctions psh ("μ_f est PLB") et que la condition "μ_f est PLB" est stable par petites perturbations (corollaire 3.9.7, [DS 1). En particulier les petites perturbations f_ε d'un endomorphisme polynomial $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ qui s'étend holomorphiquement à $\mathbb{P}^k$ définissent des applications d'allure polynomiale $f_\varepsilon : f_\varepsilon^{-1}V_R \to V_R$ pour $R >> 1$ telles que μ_{f_ε} est PLB.

Sous une telle condition T.C.Dinh et N.Sibony établissent les principales propriétés ergodiques de la mesure μ_f :

– ses exposants de Lyapunov sont strictement positifs, $\geq \frac{1}{2} \log \lambda / \lambda_{k-1}$;
– les points périodiques répulsifs s'équidistribuent selon μ_f ;
– il y a décroissance exponentielle des coefficients de corrélation.

Nous renvoyons le lecteur à [DS 1] pour la preuve de ces résultats.

Ces auteurs ont également étudié [DS 8] des problèmes d'équidistribution pour les *correspondances méromorphes.* Une correspondance méromorphe

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_f \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

est la donnée d'un graphe Γ_f, sous-ensemble analytique de X^2, et de deux projections holomorphes surjectives π_1, π_2. Lorsque π_1 est génériquement injective (i.e. injective hors d'un sous-ensemble analytique propre), on retrouve la notion de transformation méromorphe. On peut définir des degrés dynamiques associés à une telle correspondance et montrer l'existence d'une mesure canonique μ_f lorsque la correspondance a un grand degré topologique (voir corollaire 5.3, [DS 8]).

T.C.Dinh et N.Sibony obtiennent aussi des résultats d'équidistribution généraux qui s'appliquent aussi bien au cas des *transformations méromorphes* qu'à celui de l'itération aléatoire (voir Théorème 1.2, [DS 8]).

Chapitre 4

Petit degré topologique en dimension deux

Nous supposons ici que X est une *surface* ($\dim_{\mathbb{C}} X = 2$) et $f : X \to X$ est une transformation méromorphe de petit degré topologique, $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$.

Lorsque f est un *automorphisme polynomial de* $\mathbb{C}^2$ (dont on considère l'extension méromorphe à $X = \mathbb{P}^2$), l'hypothèse d'hyperbolicité cohomologique $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) = 1$ garantit que f est conjuguée à une composée d'applications de Hénon complexes (travaux de S.Friedland et J.Milnor [FrM]). E.Bedford et N.Sibony [BS 1] ont construit dans ce cadre la mesure canonique invariante μ_f, et E.Bedford, M.Lyubich et J.Smillie ont établi la conjecture dans deux articles fondateurs [BLS 1,2].

Lorsque f est un *automorphisme d'une surface projective compacte* (pas de point d'indétermination et $\lambda_2(f) = 1$), S.Cantat a établi la conjecture dans [Ca 1]. Un aspect non trivial de cette étude est d'exhiber des exemples : le lecteur trouvera dans [Ca 4] de nombreuses constructions et références.

Lorsque f est une *application birationnelle* ($\lambda_2(f) = 1$ avec points d'indétermination), la conjecture a été démontrée dans de nombreux cas, mais pas en toute généralité : citons notamment les travaux de J.Diller-C.Favre [DF], E.Bedford-J.Diller [BDi 1,2], et R.Dujardin [Du 5]. La non inversibilité, $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) \geq 2$, rajoute encore quelques difficultés, mais des progrès ont été réalisés récemment dans [DDG].

La stratégie, qui s'inspire fortement de [BLS 1,2], est la suivante :

– on essaie, par un changement biméromorphe de coordonnées, de se ramener à un "bon modèle", sur lequel l'action linéaire induite par f en cohomologie est compatible avec la dynamique ;

– l'hypothèse $\lambda_1(f) > \lambda_0(f) = 1$ permet alors de construire un $(1,1)$-courant positif fermé canonique T^+, f^*-invariant ; tandis que l'hypothèse $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ permet de construire un $(1,1)$-courant positif fermé f_*-invariant T^- ;

– la mesure canonique est alors $\mu_f = T^+ \wedge T^-$, si tant est qu'on arrive

à définir ce produit (on multiplie des distributions) ;
- on établit des propriétés d'extrémalité de T^+, T^-. Elles correspondent à des propriétés d'ergodicité de μ_f ;
- on établit des propriétés de laminarité de T^+, T^- (ils sont localement somme de courants d'intégration sur des disques holomorphes), pour montrer que μ_f a une structure de produit local ;
- on essaie d'identifier les disques locaux de T^+/T^- à des morceaux de variétés stables/instables, pour estimer les exposants de Lyapunov de μ_f, son entropie, et construire des points selles.

Comme nous allons le voir, la présence de points d'indétermination, (leurs propriétés de récurrence) rend chacune de ces étapes très délicate.

4.1 Bon modèle

Le premier problème auquel nous sommes confrontés est celui du calcul effectif du degré dynamique $\lambda_1(f)$, qui est défini par une limite –contrairement à $\lambda_2(f)$. Il se peut très bien par exemple que $r_1(f)$ soit plus grand que le degré topologique $\lambda_2(f)$, bien que $\lambda_2(f) > \lambda_1(f)$. Plus sérieusement, nous n'avons pas seulement besoin de connaître la valeur de $\lambda_1(f)$ pour la comparer à celle de $\lambda_2(f)$, mais, lorsque $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$, il est important de contrôler la croissance de la norme $||(f^n)^*||$ sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ (cf section 2.3) : est-ce que la croissance est de l'ordre de $\lambda_1(f)^n$, ou bien fait-elle apparaître également des termes polynomiaux $n^s \lambda_1(f)^n$? Nous nous proposons dans cette section d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

Définition 4.1 *On dit que $f : X \to X$ est* 1*-stable si l'action linéaire induite par f^* sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est compatible avec la dynamique, i.e. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(f^n)^* = (f^*)^n$.*

Considérons l'endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$,

$$f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (zw + c_1, z + c_2) \in \mathbb{C}^2.$$

C'est un endomorphisme *birationnel* de $\mathbb{C}^2$, i.e. son degré topologique $\lambda_2(f)$ est égal à 1. On peut calculer à la main $\lambda_1(f) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais nous allons retrouver cette valeur d'une autre façon. On peut considérer l'extension méromorphe de l'endomorphisme f à n'importe quelle compactification lisse de $\mathbb{C}^2$. Notons $g : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ son extension à $\mathbb{P}^2$. Elle induit une action linéaire g^* sur l'espace $H^{1,1}(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ qui est engendré par la classe d'une droite projective L. On vérifie que $g^*L \sim 2L$ et $(g^2)^*L \sim 3L$, donc g n'est pas 1-stable.

Considérons à présent $h : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'extension méromorphe de f à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Elle induit une action linéaire h^* sur l'espace $H^{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2$

qui est engendré par la classe d'une droite verticale $L_z = (z = 0)$ et celle d'une droite horizontale $L_w = (w = 0)$. On obtient

$$h^* L_z \sim L_z + L_w \text{ et } h^* L_w \sim L_z,$$

donc l'action de h^* est donnée, dans la base (L_z, L_w) par la matrice $A_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. L'application h est 1-stable (voir le critère 4.4), ce qui assure

$$\lambda_1(f) = \lambda_1(g) = \lambda_1(h) = r_1(h) = \text{rayon spectral de } A_h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cela résulte de l'observation élémentaire suivante.

Observation 4.2 *Si $f : X \to X$ est 1-stable, alors $r_1(f) = \lambda_1(f)$.*

Comme $\lambda_1(f)$ est invariant par conjugaison biméromorphe, il est naturel de se demander si l'on peut toujours effectuer un changement biméromorphe de coordonnées – et donc remplacer X par une variété biméromorphiquement équivalente $\tilde{X}$ – de telle sorte que la transformation $\tilde{f}$ induite par f sur $\tilde{X}$ soit 1-stable. Ce n'est pas toujours possible, sans condition sur les degrés dynamiques, comme l'a montré C.Favre dans [Fa 2] en analysant le cas des transformations toriques de dimension 2 : il existe des transformations toriques qui ne peuvent jamais être rendues 1-stables. Les transformations concernées vérifient $\lambda_2(f) = \lambda_1(f)^2 > \lambda_1(f)$, ce qui motive la

Question 4.3 *Soit $f : X \to X$ une transformation telle que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Peut-on effectuer un changement biméromorphe de coordonnées $\pi : \tilde{X} \to X$ de sorte que la transformation $\tilde{f} := \pi^{-1} \circ f \circ \pi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ soit 1-stable ?*

On dispose d'un critère algébrique simple pour détecter la 1-stabilité, comme l'ont observé J.E.Fornaess et N.Sibony lorsque X est un espace projectif complexe [FS 4].

Proposition 4.4 *Une transformation $f : X \to X$ méromorphe est 1-stable si et seulement si aucune courbe $\mathcal{C}$ n'est contractée par un itéré f^n sur un point d'indétermination.*

Preuve. Supposons qu'une courbe $\mathcal{C}$ est contractée par f^n sur un point $p \in I_f$. On peut supposer, quitte à changer f en f^n, que $n = 1$. Soit ω une forme de Kähler. Alors $f^*\omega$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X qui a un nombre de Lelong positif au point p. Il s'ensuit que $f^*(f^*\omega)$ est un courant qui charge la courbe $\mathcal{C}$. Or $(f^2)^*\omega$ est par définition une forme différentielle à coefficients localement intégrables : elle coïncide presque partout avec $f^*(f^*\omega)$ mais ne charge pas la courbe $\mathcal{C}$. On en déduit que les classes de cohomologie $f^*(f^*\{\omega\})$ et $(f^2)^*\{\omega\}$ sont différentes.

Réciproquement supposons qu'aucune courbe n'est contractée sur un point d'indétermination. Alors les ensembles $f^{-n}(I_f)$ sont tous de codimension ≥ 2. Soit θ une forme différentielle lisse fermée de bidegré $(1,1)$. Par définition, $f^*(f^*\theta)$ et $(f^2)^*\theta$ coïncident hors de $I_f \cup f^{-1}I_f$. Comme les ensembles de codimension ≥ 2 sont négligeables pour les courants de bidegré $(1,1)$, on en déduit que ces formes coïncident partout. Ainsi $(f^*)^2 = (f^2)^*$ et on montre de même que $(f^*)^n = (f^n)^*$ pour tout n. $\square$

Dans l'exemple polynomial $f(z,w) = (zw + c_1, z + c_2)$ vu plus haut, les points d'indétermination sont situés dans le diviseur à l'infini. Les seules courbes qui peuvent être contractées sur un point d'indétermination sont les composantes irréductibles de ce diviseur. On vérifie ainsi que $h(w = \infty) = (z = \infty)$ et $h(z = \infty) = (\infty, \infty)$, or le point (∞, ∞) est un point fixe qui n'est pas un point d'indétermination pour h, donc h est 1-stable.

Ce critère est également facile à vérifier sur les surfaces de dimension de Kodaira nulle. On a vu à la section 2.4.2 que si X est une surface minimale de dimension de Kodaira nulle, alors f est non-ramifiée. Or les seules courbes susceptibles d'être contractées sur un point d'indétermination sont les courbes de l'ensemble critique. Comme celui-ci est vide, on en déduit l'assertion suivante :

Proposition 4.5 *Si kod$(X) = 0$, alors on peut supposer que f est 1-stable en travaillant sur le modèle minimal de X.*

Le cas des surfaces rationnelles est plus délicat. Nous disposons toutefois du résultat suivant de J.Diller et C.Favre [DF] :

Théorème 4.6 *Si $\lambda_2(f) = 1$, alors on peut, quitte à conjuguer par une application biméromorphe, supposer que f est 1-stable.*

La preuve (voir Théorème 0.1 dans [DF]) utilise de façon cruciale le fait que f est birationnelle : dans ce cas f peut s'écrire comme une composition d'éclatements et de contractions. Le cas général, $2 \leq \lambda_2(f) < \lambda_1(f)$, semble beaucoup plus difficile. Notons qu'une avancée significative a été réalisée par C.Favre et M.Jonsson lorsque f provient d'un endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ (voir [FaJ 3]).

4.2 Analyse spectrale

Dans toute la suite du chapitre 4, nous supposons que $f : X \to X$ est une transformation 1-stable telle que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Nous allons en tirer des conséquences sur le spectre des actions linéaires induites par f^*, f_* sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. On note dans la suite $\lambda := \lambda_1(f)$. Comme f est 1-stable, il résulte de la section précédente que $\lambda = r_1(f)$ est égal au rayon spectral de l'action linéaire induite par f^* sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

L'action $f_* : H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est duale de celle de f^*, car on est en dimension deux. En particulier $(f_*)^n = (f^n)_*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme le cône $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ est dual du cône $H^{1,1}_{psef}(X, \mathbb{R})$, qui est préservé par f^*, f_*, on en déduit que le cône nef est également préservé par f^* et f_*.

Lorsque $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, il s'ensuit que les actions linéaires f^*, f_* sont données par des matrices à coefficients entiers naturels dans la base $\{z = 0\}$, $\{w = 0\}$ de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. Il résulte alors du Théorème de Perron-Frobénius que $\lambda = r_1(f)$ est une valeur propre de f^*, f_* et admet un vecteur propre dans $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$, comme cela a été observé dans [FaG]. C'est en fait vrai en toute généralité comme l'ont montré J.Diller et C.Favre dans [DF].

Théorème 4.7 *Soit $f : X \to X$ une transformation méromorphe 1-stable telle que $\lambda := \lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Alors il existe une $(1,1)$-classe nef non nulle α^+ (resp. α^-) telle que $f^*\alpha^+ = \lambda\alpha_+$ (resp. $f_*\alpha^- = \lambda\alpha^-$) ; en particulier le rayon spectral $\lambda := r_1(f) = \lambda_1(f)$ est une valeur propre de f^*, f_*. De plus*

1. *la valeur propre λ est une racine simple du polynôme caractéristique de f^*. Les autres valeurs propres sont de module $\leq \sqrt{\lambda_2(f)} < \lambda$;*
2. *les vecteurs propres nef α^+, α^- vérifient $\alpha^+ \cdot \alpha^- > 0$.*

Esquisse de preuve. Observons que $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ est un cône strict, c'est à dire $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R}) \cap -H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R}) = \emptyset$. Comme l'intérieur de $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ est non-vide (c'est le cône de Kähler), il résulte du Théorème de Perron-Frobénius que le rayon spectral $\lambda = \lambda_1(f) = r_1(f)$ de f^* sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est une valeur propre qui possède un vecteur propre α^+ dans $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$.

Supposons dans un premier temps que f est holomorphe. Dans ce cas les opérateurs f_* et f^* vérifient $f_* f^*(\cdot) = \lambda_2(f)(\cdot)$. On en déduit que pour toutes (1,1)-classes α, β, on a

$$\langle f^*\alpha, f^*\beta \rangle = \lambda_2(f) \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{4.1}$$

En appliquant cette relation à $\alpha = \beta = \alpha^+$, on obtient $(\alpha^+)^2 = 0$, puisque $\lambda_2(f) < \lambda_1(f) < \lambda_1(f)^2$. Supposons qu'il existe une classe β non nulle telle que $f^*\beta = \lambda\beta + c\alpha^+$. En appliquant (4.1) aux classes $\alpha = \alpha^+$ et β, on obtient de même $\langle \alpha^+, \beta \rangle = 0$. Une nouvelle application de (4.1) avec $\alpha = \beta$ donne enfin $\beta^2 = 0$. La forme d'intersection est donc non-négative sur l'espace vectoriel engendré par α^+ et β. Il résulte alors du Théorème de l'indice de Hodge (voir [BPV]) que β est nécessairement proportionnelle à α^+ : cela démontre que λ est une valeur propre simple du polynôme caractéristique de f^*. Par dualité il en est de même pour f_*.

Soit à présent t une valeur propre (complexe) de f^* différente de λ et β un vecteur propre associé. En appliquant à nouveau (4.1) successivement à $\alpha = \beta$, puis à $\alpha = \alpha^+$ et β, on obtient que soit $t^2 = \lambda_2(f)$, soit $t = \lambda_2(f)/\lambda$, soit $\beta^2 = \langle \alpha^+, \beta \rangle = 0$. Mais ce dernier cas n'est pas admissible car il implique

β proportionnelle à α^+ –par le Théorème de l'indice de Hodge–, contredisant le fait que t est distincte de λ. On en déduit que $|t| \leq \sqrt{\lambda_2(f)}$.

Il résulte à nouveau du Théorème de l'indice de Hodge que les classes α^+ et α^- s'intersectent positivement.

Lorsque f est seulement méromorphe, il faut remplacer l'identité (4.1) par une identité plus compliquée, mais qui va jouer le même rôle. C'est la formule d'aller-retour que nous rappelons ci-dessous. L'analyse des spectres de f^*, f_* se fait de façon analogue en utilisant la positivité de la forme quadratique hermitienne Q. Nous renvoyons le lecteur à [DF] pour les détails techniques. $\square$

Proposition 4.8 (Formule d'aller-retour) *Il existe une forme quadratique hermitienne $Q \geq 0$ sur $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ telle que*

$$\langle f^*\alpha, f^*\beta\rangle = \lambda_2(f)\langle\alpha, \beta\rangle + Q(\alpha, \beta)$$

pour toutes les classes $\alpha, \beta \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$. De plus $Q(\alpha, \alpha) = 0$ si et seulement si $\langle\alpha, f(p)\rangle = 0$ pour tout point d'indétermination $p \in I_f$.

Esquisse de preuve. La formule résulte d'un calcul explicite de $f_*f^*\alpha$. En passant par le graphe $X \overset{\pi_1}{\leftarrow} \Gamma_f \overset{\pi_2}{\rightarrow} X$ de l'application f, on décompose le calcul en deux temps : la projection π_2 étant holomorphe, on a $(\pi_2)_*\pi_2^*\gamma = \lambda_2(f)\gamma$ pour toute classe $\gamma \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$. Pour comprendre l'action de la projection π_1 qui est une composée d'éclatements de points, il suffit d'observer que $\pi^*\pi_*\gamma = \gamma + \langle\gamma, E\rangle\{E\}$ pour un éclatement π dont on a noté E le diviseur exceptionnel. Nous renvoyons à [DF] (corollaire 3.4) pour plus de détails. $\square$

Il résulte de cette analyse que la trace des opérateurs $(f^n)^*$ croît comme $\lambda_1(f)^n$ –à une constante multiplicative près. On obtient donc une majoration précise du nombre de points périodiques (voir section 2.3). Il nous faut maintenant établir une minoration de ce nombre en créant beaucoup –environ $\lambda_1(f)^n$– de points périodiques selles d'ordre n. La stratégie est à présent de construire un $(1,1)$-courant fermé positif T^+ (resp. T^-) tel que $\{T^+\} = \alpha^+$ (resp. $\{T^-\} = \alpha^-$) et $f^*T^+ = \lambda T^+$ (resp. $f_*T^- = \lambda T^-$). Comme les classes α^+ et α^- s'intersectent positivement, on peut espérer donner un sens au produit d'intersection $\mu_f = T^+ \wedge T^-$ qui produira alors une mesure dynamiquement intéressante.

4.3 Courants invariants

Rappelons que dans toute la suite du chapitre 4, $f : X \to X$ est une transformation méromorphe 1-stable telle que $\lambda := \lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Soit ω une forme de Kähler sur X. Soit $\alpha^+ \in H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ (resp. α^-) une classe non-nulle telle que $f^*\alpha^+ = \lambda\alpha^+$ (resp. $f_*\alpha^- = \lambda\alpha^-$). Il résulte du Théorème 4.7

que les classes α^+, α^- sont uniques à une constante multiplicative près. On normalise les classes $\alpha^+, \alpha^-, \{\omega\}$ en imposant

$$\alpha^+ \cdot \alpha^- = \alpha^+ \cdot \{\omega\} = \alpha^- \cdot \{\omega\} = 1.$$

4.3.1 Le courant f^*-invariant canonique

Théorème 4.9 *Il existe un unique courant positif fermé T^+ de bidegré $(1,1)$ sur X tel que $f^*T^+ = \lambda T^+$, $\{T^+\} = \alpha^+$ et*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\omega \longrightarrow T^+.$$

Esquisse de preuve. Soit θ^+ une forme lisse fermée de bidegré $(1,1)$ sur X dont la classe de cohomologie est égale à α^+. L'invariance $f^*\alpha^+ = \lambda\alpha^+$ se traduit, grâce au dd^c-lemma de la théorie de Hodge (voir [GH] p 149), par

$$\frac{1}{\lambda}f^*\theta^+ = \theta^+ + dd^c\gamma^+, \tag{4.2}$$

où $\gamma^+ \in L^1(X,\mathbb{R})$ est une fonction lisse hors de I_f, qui peut avoir des singularités logarithmiques aux points d'indétermination.

Comme f est 1-stable, on peut prendre le pull-back de cette équation par les itérés f^n de f. La relation de compatibilité $(f^n)^* = (f^*)^n$ donne alors

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta^+ = \theta^+ + dd^c g_n^+, \text{ où } g_n^+ := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^j}\gamma^+ \circ f^j.$$

La difficulté consiste à montrer que la suite (g_n^+) converge dans $L^1(X)$.

Nous affirmons que la fonction γ^+ est majorée sur X. Lorsque la forme θ^+ est semi-positive, la fonction γ^+ est quasiplurisousharmonique (qpsh), i.e. localement différence d'une fonction psh (un potentiel local du courant positif $\lambda^{-1}f^*\theta^+$) et d'une fonction lisse (potentiel local de θ^+) ; elle est donc bien majorée dans ce cas. La semi-positivité de θ^+ est une hypothèse forte sur la positivité de la classe α^+ que l'on peut toutefois vérifier lorsque X est une surface rationnelle minimale. Dans le cas général, nous allons montrer que la fonction $\gamma^+ \circ \pi_1$ est qpsh sur le graphe désingularisé $\tilde{\Gamma}_f$. Si l'on tire en arrière par π_1 l'équation (4.2), il vient

$$dd^c(\gamma^+ \circ \pi_1) = \frac{1}{\lambda}\pi_1^*((\pi_1)_*\pi_2^*\theta^+) - \pi_1^*\theta^+ = \frac{1}{\lambda}[\pi_2^*\theta^+ + R] - \pi_1^*\theta^+, \tag{4.3}$$

où $R = \pi_1^*(\pi_1)_*\eta - \eta$ et $\eta = \pi_2^*\theta^+$. Comme π_1 est une composition d'éclatements, on vérifie que R est un courant positif, supporté par le diviseur exceptionnel de π_1 : c'est une formule de "pull-push" (appliquer la formule d'aller-retour à π_1^{-1}). Nous renvoyons le lecteur à [DG] pour plus de détails. L'égalité (3.3) exprime donc $dd^c(\gamma^+ \circ \pi_1)$ comme la somme d'un courant positif et d'une forme lisse. La fonction $\gamma^+ \circ \pi_1$ est ainsi qpsh, donc majorée sur $\tilde{\Gamma}_f$, d'où γ^+ est majorée sur X.

Quitte à retrancher une constante, on peut donc supposer que $\sup_X \gamma^+ = 0$. Cela permet d'exprimer la suite g_n^+ comme une suite décroissante de fonctions presque-qpsh. On montre alors par des arguments classiques que la limite n'est pas identiquement $-\infty$, notons la g^+. Ainsi

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta^+ \longrightarrow T^+ := \theta^+ + dd^c g^+.$$

Le reste des assertions s'ensuit aisément. Nous renvoyons le lecteur aux articles cités ci-dessous pour plus de détails. □

Remarque 4.10 *La construction du courant T^+ est due à N.Sibony [S] pour une transformation rationnelle quelconque de $X = \mathbb{P}^2$ [S]. Certains cas particuliers avaient été traités précédemment par J.E.Fornaess et N.Sibony dans [FS 2,3,4]. Le cas général énoncé ici a été récemment démontré par J.Diller et l'auteur dans [DG].*

Observons que le courant T^+ est canonique en ce sens que si θ est n'importe quelle forme lisse fermée de bidegré $(1,1)$, alors

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta \to cT^+, \quad \text{avec } c = \{\theta\} \cdot \alpha^-.$$

Plus généralement on peut s'intéresser à la convergence de $\lambda^{-n}(f^n)^*\theta$ lorsque θ est un (1,1)-courant positif fermé (voir la discussion qui précède le Théorème 4.12). Nous traitons ici un cas simple d'équidistribution (et renvoyons le lecteur à [RS], [S] pour des résultats d'équidistribution plus généraux).

Proposition 4.11 *Supposons $X = \mathbb{P}^2$. Alors*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*[L] \longrightarrow T^+,$$

pour presque toute droite projective $L \in (\mathbb{P}^2)^*$.

Preuve. Notons ν^* la mesure de Fubini-Study sur l'ensemble $(\mathbb{P}^2)^*$ des droites projectives de $\mathbb{P}^2$. La formule de Crofton (voir [Ci]) permet d'exprimer la forme de Kähler ω de Fubini-Study,

$$\omega = \int_{a \in (\mathbb{P}^2)^*} [L_a] d\nu^*(a)$$

comme une moyenne de courants d'intégration sur les droites projectives $L_a \subset \mathbb{P}^2$. Cela se traduit, au niveau des potentiels, par $[L_a] = \omega + dd^c\varphi_a$, où

$$\varphi_a[z] = \log\left[\frac{|z \wedge a|}{||z|| \cdot ||a||}\right] \leq 0, \quad \text{avec } \int_{a \in (\mathbb{P}^2)^*} \varphi_a[z] d\nu^*(a) = -1.$$

Pour montrer la convergence de $\lambda^{-n}(f^n)^*[L_a]$ vers T^+, il suffit donc de montrer que $\lambda^{-n}\varphi_a \circ f^n$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{P}^2)$. Posons

$$\psi(a) := \sum_{n\geq 0} \psi_n(a), \quad \psi_n(a) = \int_{[z]\in\mathbb{P}^2} -\frac{1}{\lambda^n}\varphi_a \circ f^n[z]d\nu[z],$$

où ν désigne la forme volume de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$. Alors ψ est intégrable. En effet, c'est une limite croissante de fonctions positives ($\varphi_a \leq 0$) telle que

$$\begin{aligned}\int_{a\in(\mathbb{P}^2)^*} \psi(a)d\nu(a) &= \sum_{n\geq 0}\int_{[z]\in\mathbb{P}^2}\int_{a\in(\mathbb{P}^2)^*} -\lambda^{-n}\varphi_a \circ f^n[z]d\nu^*(a)d\nu[z] \\ &= \sum_{n\geq 0}\lambda^{-n} < +\infty.\end{aligned}$$

En particulier ψ est finie presque partout, donc $\psi_n(a) \to 0$ presque partout, d'où $\lambda^{-n}(f^n)^*[L_a] \to T^+$, ν^*-presque partout. □

4.3.2 Propriétés d'extrémalité

Il est naturel de se demander s'il existe d'autres courants invariants : peut-on décrire le cône des courants positifs fermés S de bidegré $(1,1)$ tels que $f^*S = \lambda S$? C'est l'analogue, dans le contexte des transformations de petit degré topologique, du problème de la caractérisation des points exceptionnels pour les transformations de grand degré topologique.

L'analyse du spectre de f^* (Théorème 4.7) montre que la classe $\{S\}$ d'un tel courant est proportionnelle à α^+. On a donc $S = c\theta^+ + dd^c\varphi_S$, pour une constante $c \geq 0$ et une fonction qpsh $\varphi_S \in L^1(X)$ uniquement déterminée si on impose $\sup_X \varphi_S = 0$. Ainsi

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*S = c\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta^+ + dd^c\left(\frac{1}{\lambda^n}\varphi_S \circ f^n\right).$$

Il s'agit donc de savoir à quelle condition la suite $\lambda^{-n}\varphi_S \circ f^n$ converge vers 0 dans $L^1(X)$ pour pouvoir conclure (ou non) à la convergence de la suite $\lambda^{-n}(f^n)^*S$ vers cT^+. Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette question (voir [BS 2], [FS 1,2,3,4], [HP 1], [Dil 1], [RS], [S], [FaJ 1]). Une solution complète à ce problème a été obtenue par C.Favre et l'auteur [FaG] dans le cas des transformations birationnelles. La principale technique – développée par C.Favre dans sa thèse – consiste à mettre au point des estimées de volume via un contrôle asymptotique des multiplicité locales (voir Théorème 1.7 et Lemme 1.9), qui permettent de contrôler la convergence de la suite $\lambda^{-n}\varphi_S \circ f^n$ dans l'esprit de la preuve du Théorème 1.10.

Nous n'explicitons pas ces résultats ici et renvoyons le lecteur aux articles originaux. Nous considérons uniquement le cas, plus simple, où le courant S est dominé par T^+.

Notons $\mathcal{T}$ le cône des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ sur X, et $\mathcal{T}_{f^*}$ le sous-cône des courants $S \in \mathcal{T}$ tels que $f^*S = \lambda S$.

Théorème 4.12 *Si $0 \leq S \leq T^+$, alors $\lambda^{-n}(f^n)^*S \to cT^+$, $c = \{S\} \cdot \alpha^-$. En particulier T^+ est extrémal dans le cône $\mathcal{T}_{f^*}$ des courants f^*-invariants.*

Si $\lambda_2(f) = 1$, alors T^+ est un point extrémal du cône $\mathcal{T}$.

Nous verrons un peu plus loin qu'il s'agit là de propriétés de nature ergodiques du courant T^+.

Esquisse de preuve. Lorsque le courant S est dominé par T^+, ses potentiels sont au moins aussi réguliers que ceux de T^+. Cela se traduit par l'inégalité $\varphi_{T^+} \leq \varphi_S \leq 0$. Or φ_{T^+} diffère de g^+ d'une constante additive, donc par construction

$$\lambda^{-n}\varphi_{T^+} \circ f^n \simeq \lambda^{-n} g^+ \circ f^n \longrightarrow 0 \ \text{ dans } L^1(X).$$

On en déduit que $\lambda^{-n}\varphi_S \circ f^n \to 0$, et donc $\lambda^{-n}(f^n)^*S \to cT^+$.

En particulier si $S \in \mathcal{T}_{f^*}$ est un courant invariant tel que $0 \leq S \leq T^+$, alors $S = cT^+$ donc le courant T^+ est un point extrémal du cône $\mathcal{T}_{f^*}$.

Lorsque $\lambda_2(f) = 1$, on peut raffiner le résultat de convergence ci-dessus pour le rendre uniforme par rapport à S. Plus précisément soit $S \in \mathcal{T}$ tel que $0 \leq S \leq T^+$. Le courant T^+ vérifie $f^*T^+ = \lambda T^+$ donc également $f_*T^+ = (f^{-1})^*T^+ = \lambda^{-1}T^+$ dans $X \setminus \mathcal{C}_{f^{-1}}$, où $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ désigne l'ensemble critique de f^{-1}. Les courants positifs fermés $S_j := \lambda^j (f^j)_* S$ sont donc bien définis et dominés par T^+ dans $X \setminus \mathcal{C}_{f^{-1}}$. On note encore S_j leur extension triviale à travers $\mathcal{C}_{f^{-1}}$: ce sont à nouveau des éléments de $\mathcal{T}$ (Théorème d'extension de Skoda [Sk]) dominés par T^+. Ils vérifient $\lambda^{-j}(f^j)^*S_j \equiv S$ dans X, donc S_j est cohomologue à $c\theta^+$, $0 \leq c \leq 1$, et on peut appliquer le raisonnement ci-dessus pour conclure à $S = \lambda^{-j}(f^j)^*S_j \to cT^+$, donc $S = cT^+$, c'est à dire que T^+ est un point extrémal du cône $\mathcal{T}$. $\square$

Remarque 4.13 *Ce résultat est dû à J.E.Fornaess et N.Sibony [FS 3] lorsque f est une application de Hénon complexe.*

4.3.3 Laminarité

Lorsque f est un difféomorphisme holomorphe d'Anosov, le courant T^+ est un *cycle feuilleté* associé au feuilletage holomorphe stable. Dans notre contexte de non hyperbolicité uniforme, il faut remplacer la notion de cycle feuilleté par une notion plus faible, introduite par E.Bedford, M.Lyubich et J.Smillie dans [BLS 1].

Définition 4.14 *Un courant T est dit* **uniformément laminaire** *s'il peut être localement décrit par une moyenne de courants d'intégration sur des graphes disjoints. Un courant T est dit* **laminaire** *s'il peut être approché par une suite croissante de courants localement uniformément laminaires.*

Ces auteurs ont démontré que T^+ est laminaire lorsque f est une application de Hénon complexe [BLS 1], [BS 3]. Leur approche a été généralisée au cas des automorphismes des surfaces projectives par S.Cantat [Ca 1], puis à celui des transformations méromorphes des surfaces projectives par R.Dujardin [Du 1]. Enfin H.deThelin [DeT 1] a traité le cas des surfaces kählériennes non projectives :

Théorème 4.15 *Le courant T^+ est laminaire.*

Esquisse de preuve. On va supposer pour simplifier que $X = \mathbb{P}^2$ et $\lambda_2(f) = 1$. Soit $L \subset \mathbb{P}^2$ une droite projective générique. Il résulte de la Proposition 4.11 que $\lambda^{-n}(f^n)^*[L] \to T^+$. Posons $\mathcal{C}_n := f^{-n}L$. Ce sont des courbes singulières de degré $d_n = \lambda^n$ et de genre 1 car $f^{-n}_{|L} : L \simeq \mathbb{P}^1 \to \mathcal{C}_n$ est une résolution (non minimale) des singularités de $\mathcal{C}_n$.

L'idée est que si l'on projette $\mathcal{C}_n$ sur une droite générique $\mathbb{P}^1$ de $\mathbb{P}^2$, alors on peut espérer écrire localement $\mathcal{C}_n$ comme un graphe au dessus de $\mathbb{P}^1$. Il faut bien sûr se placer hors des singularités et éviter également les points où $\mathcal{C}_n$ est tangente à la projection. Nous allons dénombrer ceux-ci.

Commençons par les points singuliers de $\mathcal{C}_n$. Notons $n_x(\mathcal{C}_n)$ le nombre de composantes irréductibles locales de $\mathcal{C}_n$ au point x. Soit $\pi : \hat{\mathcal{C}_n} \to \mathcal{C}_n$ une résolution minimale des singularités de $\mathcal{C}_n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x \in Sing(\mathcal{C}_n)} n_x(\mathcal{C}_n) &= \text{nombre de points de } \pi^{-1}(Sing\,\mathcal{C}_n) \\ &\leq \sharp f^n(Sing\,\mathcal{C}_n) \cap L \leq \mathcal{C}rit(f^{-n}) \cdot L,\end{aligned}$$

si l'on choisit L de sorte qu'elle évite l'ensemble dénombrable $\cup_{j \geq 0} I_{f^{-j}}$. Comme l'ensemble critique $\mathcal{C}rit(f^{-n})$ est de degré $3\lambda^n - 3$, on en déduit

$$\sum_{x \in Sing(\mathcal{C}_n)} n_x(\mathcal{C}_n) \leq 3\lambda^n - 3 = O(d_n).$$

Soit $\pi_p : \mathbb{P}^2 \setminus \{p\} :\to \mathbb{P}^1$ la projection holomorphe sur une droite $\mathbb{P}^1$, issue d'un point générique p. On découpe $\mathbb{P}^1$ en morceaux Q ("carrés") de petit diamètre $\lesssim r$ (donc d'aire $\lesssim r^2$), formant une subdivison $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{P}^1$. Soit Γ une composante connexe de $\mathcal{C}_n \cap \pi^{-1}(Q)$. On dit que Γ est une *bonne composante* si c'est un graphe au dessus de Q (i.e. $\pi_p : \Gamma \to Q$ est un homéomorphisme), et que c'est une *mauvaise composante* sinon. Observons que les mauvaises composantes sont celles qui contiennent un point singulier de $\mathcal{C}_n$ ou un point x en lequel la droite (px) est tangente à $\mathcal{C}_n$. On peut contrôler le nombre de ces derniers en utilisant la formule de Hurwitz, appliquée à l'application $\pi := \pi_p \circ p : \hat{\mathcal{C}_n} \to \mathbb{P}^1$, où $p : \hat{\mathcal{C}_n} \to \mathcal{C}_n$ est une résolution des singularités de $\mathcal{C}_n$. On obtient (voir Proposition 3.3 de [Du 1]),

$$\sharp\{\text{mauvaises composantes}\} \leq 4g_n + 4d_n + \sum_{x \in Sing(\mathcal{C}_n)} n_x(\mathcal{C}_n) = O(d_n),$$

où g_n désigne le genre de $\hat{\mathcal{C}}_n$ (il vaut 1 ici). Considérons alors

$$T_{\mathcal{Q},n} := \frac{1}{d_n} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \sum_{\Gamma b.c.} [\Gamma] \leq T_n := \frac{1}{d_n} [\mathcal{C}_n].$$

Le courant $T_{\mathcal{Q},n}$ est uniformément laminaire (car les bonnes composantes b.c. sont des graphes) et presque égal à T_n puisque

$$0 \leq \langle T_n - T_{\mathcal{Q},n}, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle \leq Cr^2, \tag{4.4}$$

où $\omega_{\mathbb{P}^1}$ désigne la forme de Fubini-Study sur la droite de projection.

Soit $T_{\mathcal{Q}}$ une valeur d'adhérence de la suite $T_{\mathcal{Q},n}$. Un argument de familles normales permet de montrer que $T_{\mathcal{Q}}$ est uniformément laminaire. En raffinant la subdivision $\mathcal{Q}$ (donc en faisant tendre r vers 0), on obtient une suite croissante de courants uniformément laminaires de masses uniformément bornées. Soit T_∞ la limite croissante de ces courants. Il résulte de (4.4) que

$$\langle T_\infty, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle = \langle T^+, \pi_p^* \omega_{\mathbb{P}^1} \rangle.$$

Pour un choix générique de p, cela implique $T^+ = T_\infty$. Nous renvoyons le lecteur à [Du 1] pour plus de détails. □

Remarque 4.16 *Le résultat énoncé par R.Dujardin dans [Du 1] fait intervenir une hypothèse technique (H) qui est superflue (voir [DDG]).*

Lorsque X n'est pas projective, on ne peut pas utiliser de projection sur une courbe comme nous l'avons esquissé. Il faut faire une analyse locale. Celle-ci a été menée à bien par H.deThelin dans [DeT 1], où la théorie d'Ahlfors remplace la formule de Hurwitz. Cependant l'estimation (4.4) de la masse de $T^+ - T_{\mathcal{Q}}$ est moins précise que dans le cas projectif. Cela pose problème lorsque l'on souhaite intersecter géométriquement deux tels courants (voir paragraphe 4.4.3)..

4.3.4 Courants f_*-invariants

Nous souhaitons à présent construire un courant f_*-invariant T^- qui va jouer un rôle analogue à celui de T^+. Lorsque $\lambda_2(f) = 1$, il suffit d'appliquer la construction précédente à f^{-1}. Lorsque $\lambda_2(f) \geq 2$, certaines difficultés techniques supplémentaires apparaissent, résolues dans [DDG] :

Théorème 4.17 *Il existe un unique courant positif fermé T^- de bidegré $(1,1)$ sur X tel que $f_*T^- = \lambda T^-$, $\{T^-\} = \alpha^-$ et*

$$\frac{1}{\lambda^n} (f^n)_* \omega \longrightarrow T^-.$$

Esquisse de preuve. La construction est tout à fait analogue à celle de T^+. Le point de départ est encore le dd^c-lemma, qui donne ici

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*\theta^- = \theta^- + dd^c g_n^-, \text{ avec } g_n^- := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^j}(f^j)_*\gamma_-,$$

pour une fonction $\gamma^- \in L^1(X, \mathbb{R})$. Comme dans la preuve du Théorème 4.9, la difficulté est de montrer que la fonction γ^- est essentiellement majorée, ce que nous obtenons dans [DDG] en montrant que la classe α^- peut-être représentée par un courant positif fermé qui admet un potentiel borné. On peut alors supposer que γ^- est négative, et on obtient une suite décroissante de potentiels (g_n^-) qui converge dans $L^1(X)$.

Certains cas particuliers sont plus faciles à traiter : lorsque X est une surface rationnelle minimale, la classe α^- est semi-positive et la construction de T^- est obtenue dans [G 1]. Lorsque $kod(X) = 0$, on peut contourner la difficulté en utilisant une forme volume invariante. On travaille dans ce cas sur un modèle minimal. On suppose pour simplifier que $K_X = 0$ (en réalité $12K_X = 0$) : il existe alors une 2-forme holomorphe η sur X –essentiellement unique– qui ne s'annule nulle part. La forme $f^*\eta$ est une 2-forme holomorphe dans $X \setminus I_f$ qui se prolonge de façon holomorphe à travers I_f, car $codim_{\mathbb{C}} I_f \geq 2$. On a donc $f^*\eta = \zeta\eta$, avec $\zeta \in \mathbb{C}$. Soit alors $\nu := i\eta \wedge \overline{\eta}$: c'est une forme volume sur X telle que $f^*\nu = |\zeta|^2\nu$. On a donc $|\zeta|^2 = \lambda_2(f)$ et $f^*\nu = \lambda_2(f)\nu$. On en déduit la convergence de g_n^- dans $L^1(\nu)$, car

$$\sum_{j\geq 0} \frac{1}{\lambda^j} \int_X |(f^j)_*\gamma^-| d\nu = \sum_{j\geq 0} \left(\frac{\lambda_2(f)}{\lambda}\right)^j \int |\gamma^-| d\nu < +\infty,$$

puisque $\lambda = \lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. $\square$

Il serait intéressant de caractériser l'ensemble des courants f_*-invariants, mais nous ne disposons pas d'estimées de volume pour les images réciproques lorsque $\lambda_2(f) \geq 2$. Lorsque $\lambda_2(f) = 1$, $f_* = (f^{-1})^*$ et on peut appliquer les résultats de la section 4.3.2. Le courant T^- jouit cependant d'une propriété ergodique forte, qui s'apparente au mélange [DDG] :

Théorème 4.18 *Le courant T^- est extrémal dans le cône $\mathcal{T}_{f_*}$ des courants f_*-invariants. Si $kod(X) = 0$ et $(\alpha^-)^2 = 0$, alors T^- est un point extrémal du cône $\mathcal{T}$.*

Preuve. La preuve de l'extrémalité de T^- dans le cône $\mathcal{T}_{f_*}$ des $(1,1)$-courants positifs fermés S tels que $f_*S = \lambda S$ est analogue à celle du Théorème 4.12.

Supposons à présent que X est de dimension de Kodaira nulle et que $(\alpha^-)^2 = 0$. Soit S un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ tel que $0 \leq S \leq T^-$. Il s'agit de montrer que S est proportionnel à T^-. L'hypothèse

$(\alpha^-)^2 = 0$ assure que α^- est une classe extrémale dans $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ (donc S est cohomologue à $c\theta^-$, $0 \leq c \leq 1$), et que c'est un vecteur propre pour l'opérateur f^*,

$$f^*\alpha^- = \frac{\lambda_2}{\lambda}\alpha^- \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_2} f_* f^* \alpha^- = \alpha^-.$$

Cela résulte de la formule d'aller-retour et nous renvoyons le lecteur à [DDG] pour plus de détails. Posons

$$T_j^- := \frac{\lambda^j}{\lambda_2^j}(f^j)^* T^- \quad \text{et} \quad S_j := \frac{\lambda^j}{\lambda_2^j}(f^j)^* S.$$

Les courants T_j^- et S_j sont encore cohomologues à θ^-, $c\theta^-$ et vérifient

$$\frac{1}{\lambda^j}(f^j)_* T_j^- \equiv T^- \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^j}(f^j)_* S_j \equiv S$$

Nous allons montrer que la suite de courants positifs $(\lambda^{-j}(f^j)_* S_j)$ converge vers cT^-, ce qui assurera $S = cT^-$.

Posons $R_j := T_j^- - S_j \geq 0$ et fixons $u_j, v_j, w_j \in L^1(X)$ telles que

$$T_j^- = \theta^- + dd^c u_j,\ S_j = c\theta^- + dd^c v_j, \ \text{ et } R_j = (1-c)\theta^- + dd^c w_j.$$

On normalise les fonctions u_j, v_j, w_j par $\int_X u_j d\nu = \int_X v_j d\nu = \int_X w_j d\nu = 0$. Comme la normalisation est linéaire, on a $u_j = v_j + w_j$. Cette normalisation implique également que les suites $(u_j), (v_j), (w_j)$ sont relativement compactes dans $L^1(X)$ (voir [GZ 1]), en particulier ces suites sont toutes uniformément majorées sur X.

Il résulte de l'égalité $\lambda^{-j}(f^j)_* T_j^- = T^-$ et de l'invariance de ν que

$$\tilde{u_j} := \frac{1}{\lambda^j}(f^j)_* u_j = g^- - g_j^- \longrightarrow 0 \text{ dans } L^1(X).$$

L'inégalité $u_j - C \leq v_j \leq C$ donne ainsi

$$\tilde{u}_j - C\frac{\lambda_2^j}{\lambda^j} \leq \frac{1}{\lambda^j}(f^j)_* v_j \leq C\frac{\lambda_2^j}{\lambda^j},$$

d'où $\tilde{v_j} := \lambda^{-j}(f^j)_* v_j \to 0$. Il s'ensuit que

$$S = \lambda^{-j}(f^j)_* S_j = \lim_{j \to +\infty} \left[c\lambda^{-j}(f^j)_*\theta^- + dd^c(\tilde{v_j}) \right] = cT^-.$$

□

Remarquons que la condition $(\alpha^-)^2 = 0$ est vérifiée lorsque f est holomorphe (voir preuve du Théorème 4.7).

4.4 La mesure canonique

Dans toute la suite du chapitre 4, nous supposons que $f : X \to X$ est une transformation méromorphe 1-stable telle que $\lambda := \lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Nous avons contruit deux courants positifs canoniques invariants T^+, T^- qui représentent les classes de cohomologie α^+, α^-. Rappelons que nous avons normalisé ces classes et imposé

$$\alpha^+ \cdot \alpha^- = \{T^+\} \cdot \{T^-\} = 1.$$

4.4.1 Définition pluripotentialiste

Nous souhaitons à présent définir une mesure invariante μ_f en considérant le produit d'intersection $\mu_f := T^+ \wedge T^-$. On ne peut pas toujours donner un sens à un tel produit : les courants $T^\pm$ sont des formes différentielles à coefficients distributions, et il n'est pas toujours possible de définir le produit de deux distributions. On y arrive cependant lorsque les potentiels $g^\pm$ de $T^\pm$ ne sont pas trop singuliers (voir [BT], [De]). Lorsque g^+ est intégrable par rapport à la mesure trace de T^-, on peut ainsi définir le courant g^+T^- et poser

$$\mu_f := \theta^+ \wedge T^- + dd^c(g^+T^-).$$

Notons que cette définition est symétrique au sens où $g^+ \in L^1(T^-)$ si et seulement si $g^- \in L^1(T^+)$, comme on le vérifie en intégrant par parties,

$$\int_X g^+T^- \wedge \omega = \int_X g^-T^+ \wedge \omega + \int_X [g^+\theta^- - g^-\theta^+] \wedge \omega.$$

Nous ne connaissons à l'heure actuelle aucun exemple pour lequel cette condition n'est pas vérifiée. Cela justifie la

Question 4.19 *A-t-on toujours* $g^+ \in L^1(T^- \wedge \omega)$ *?*

En supposant cette condition satisfaite, nous montrons, en collaboration avec J.Diller dans [DG], que la mesure μ_f est une mesure de probabilité qui ne charge pas les courbes complexes : c'est donc une mesure invariante, $f_*\mu_f = \mu_f$, comme on peut le voir en approximant μ_f par les mesures à densité $\mu_n := \lambda^{-2n}(f^n)^*\theta^+ \wedge (f^n)_*\theta^-$.

Il reste à déterminer quand cette condition est effectivement satisfaite. C'est une motivation de l'article [DG] qui fait le point sur les propriétés de régularité des fonctions de Green dynamiques $g^\pm$. Lorsque f est holomorphe, ces fonctions sont hölderiennes (même preuve que pour la Proposition 1.2) et la condition est donc satisfaite. Nous avons vu cependant au paragraphe 3.3.1 que de tels endomorphismes sont rares (voir corollaire 3.7).

Lorsque f est seulement méromorphe, les points d'indétermination ont tendance à créer des singularités logarithmiques. Or il peut y en avoir beaucoup (Exemple 4.35). Il faut donc s'intéresser à des notions de régularité plus faibles. Si les fonctions $g^{\pm}$ sont de gradient L^2, alors $g^+ \in L^1(T^- \wedge \omega)$. En effet, on peut supposer $g^+ \leq 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X (-g^+)T^- \wedge \omega = O(1) + \int_X dg^+ \wedge d^c g^- \wedge \omega \qquad (4.5) \\ &\lesssim \left(\int dg^+ \wedge d^c g^+ \wedge \omega\right)^{1/2} \left(\int dg^- \wedge d^c g^- \wedge \omega\right)^{1/2} < +\infty. \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Nous analysons cette condition dans [DG]. Elle n'est pas toujours satisfaite lorsque X est rationnelle (voir Exemple 4.36). Lorsque $kod(X) = 0$, on a le résultat suivant [DDG].

Proposition 4.20 *Si $kod(X) = 0$ alors $\nabla g^- \in L^2(X)$.*

Preuve. Rappelons que nous travaillons ici sur le modèle minimal. Dans ce cas f est non-ramifiée, donc 1-stable (Proposition 4.5). De plus l'opérateur f_* préserve l'ensemble des fonctions continues. Il s'ensuit que la fonction γ^- de la preuve du Théorème 4.17 est en réalité continue, et que la suite de fonctions continues (g_n^-) converge uniformément vers g^-.

On vérifie aisément que le gradient d'une fonction quasiplurisousharmonique bornée (en particulier continue) est dans $L^2(X)$. □

Dans un article récent [BDi 2], E.Bedford et J.Diller ont étudié une condition légèrement plus forte qui leur permet de mener à bien une partie de l'étude dynamique des transformations birationnelles.

Définition 4.21 *La transformation f vérifie la condition (BD) si la fonction g^- est finie en tout point d'indétermination de f.*

Il s'avère que cette condition est symétrique en f/f^{-1}. Elle implique que les fonctions $g^{\pm}$ sont de gradient L^2, et même un peu plus (voir [BDi 2], [DG]). Les différentes conditions rencontrées jusqu'à présent peuvent s'interpréter en termes de propriétés de récurrence des points d'indétermination :

- f est 1-stable ssi $\log \operatorname{dist}(I_{f^{-1}}, f^{-n} I_f) > -\infty$ pour tout $n \geq 1$;
- $\nabla g^+ \in L^2$ ssi $\sum_{n \geq 1} \lambda^{-2n} \log \operatorname{dist}(I_{f^{-1}}, f^{-n} I_f) > -\infty$;
- f satisfait la condition (BD) ssi $\sum_{n \geq 1} \lambda^{-n} \log \operatorname{dist}(I_{f^{-1}}, f^{-n} I_f) > -\infty$.

Lorsque f est 1-stable, l'ensemble d'indétermination itéré I_{f^n} est égal à $I_f \cup f^{-1} I_f \cup \cdots f^{-n+1} I_f$. Les conditions de régularité ci-dessus mesurent donc à quelle vitesse les ensembles I_{f^n} et $I_{f^{-n}}$ se rapprochent l'un de l'autre. Nous renvoyons le lecteur à [BDi 2], [DG], [DDG] pour la justification de ces équivalences et la preuve du résultat suivant :

Proposition 4.22 *Si f vérifie la condition (BD) alors $\log ||Df|| \in L^1(\mu_f)$.*

Si $kod(X)=0$ alors f vérifie la condition (BD).

Si $f:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ est birationnelle et vérifie (BD), alors $f_A:=A\circ f$ est birationnelle et vérifie (BD) pour toute matrice $A\in PGL(3,\mathbb{C})$ hors d'un ensemble pluripolaire de $PGL(3,\mathbb{C})$.

Nous verrons plus loin (Exemple 4.36) des exemples de transformations birationnelles 1-stables de $\mathbb{P}^2$ qui ne satisfont pas la condition (BD).

4.4.2 Ergodicité

Dans toute la suite nous supposons que $g^+\in L^1(T^-\wedge\omega)$.

Théorème 4.23 *La mesure μ_f est ergodique.*

Si T^- est un courant extrémal, alors μ_f mélange.

Remarque 4.24 *Ce résultat a été établi pour les applications de Hénon complexes par E.Bedford et J.Smillie [BS 2]. La preuve indiquée ci-dessous reprend les simplifications apportées par J.E.Fornaess et N.Sibony dans [FS 3] et par l'auteur et N.Sibony dans [GS].*

Notons que μ_f est mélangeante lorsque $\lambda_2(f)=1$. Nous indiquerons au paragraphe 5.1.1 comment montrer que μ_f est toujours faiblement mélangeante.

Esquisse de preuve. Supposons T^- extrémal et montrons que μ_f mélange. Soit χ,ψ des fonctions test. On ne perd rien en supposant que $0\leq\chi\leq 1$. Il s'agit de montrer que

$$\int_X \chi\psi\circ f^n d\mu_f \longrightarrow c_\chi c_\psi,$$

où $c_\chi=\int\chi d\mu_f$, $c_\psi=\int\psi d\mu_f$. On observe que

$$\int \chi\psi\circ f^n d\mu_f=\langle\lambda^{-n}(f^n)^*(\psi T^+),\chi T^-\rangle=\langle\psi T^+,\lambda^{-n}(f^n)_*(\chi T^-)\rangle.$$

Il s'agit donc de montrer que la suite de mesures (μ_n) converge faiblement vers la mesure $c_\chi\mu_f$, où

$$\mu_n=R_n\wedge T^+,\quad \text{avec } R_n:=\frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*(\chi T^-).$$

Les courants R_n sont des courants positifs non-fermés qui sont dominés par T^-. On montre que leur bord tend en masse vers 0 (voir Lemme 4.25 ci-dessous). Il s'ensuit que toute valeur d'adhérence $R=\lim R_{n_i}$ de la suite (R_n) est un courant positif fermé dominé par T^-. Comme T^- est extrémal, il vient $R=c_RT^-$. Or on calcule

$$c_R=\langle R,\theta^+\rangle=\lim_{n_i\to+\infty}\langle R_{n_i},\theta^+\rangle=c_\chi,$$

d'où c_R est indépendante de R. C'est donc que la suite (R_n) converge en fait vers le courant $c_\chi T^-$.

Si T^+ était une forme lisse, on en déduirait immédiatement que $\mu_n = R_n \wedge T^+$ converge vers $c_\chi T^- \wedge T^+$. Ce n'est pas le cas, mais T^+ est très bien approché par les formes $\theta_j^+ := \lambda^{-j}(f^j)^*\theta^+$: j étant fixé, on obtient $R_n \wedge \theta_j^+ \to c_\chi T^- \wedge \theta_j^+$ car θ_j^+ est lisse (hors d'un nombre fini de points), puis on montre que $R_n \wedge (T^+ - \theta_j^+)$ tend vers 0 uniformément par rapport à n, lorsque j tend vers $+\infty$ (voir la preuve du Théorème 4.1 dans [GS] pour les détails).

Lorsque T^- est seulement extrémal dans le cône $\mathcal{T}_{f_*}$ des courants f_*-invariants, on peut reprendre les arguments ci-dessus en remplaçant partout μ_n par $\mu'_n := n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mu_j$ et R_n par $R'_n := n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} R_j$. Les valeurs d'adhérences de la suite (R'_n) sont des courants positifs fermés *invariants*, car $f_* R_j = \lambda R_{j+1}$. On en déduit la convergence de R'_n vers $c_\chi T^-$, puis celle de μ'_n vers $c_\chi \mu_f$, ce qui montre que μ_f est ergodique. □

Pour faire fonctionner la méthode précédente, il est nécessaire de contrôler la masse des courants dR_n et $dd^c R_n$. C'est l'objet du lemme suivant démontré par E.Bedford et J.Smillie lorsque f est une application de Hénon complexe (voir Lemme 1.2 dans [BS 2]) et qui se généralise aisément à notre cadre.

Lemme 4.25 *On a $||dR_n|| = O(\lambda^{-n/2})$ et $||dd^c R_n|| = O(\lambda^{-n})$.*

L'estimation de la vitesse de mélange est plus délicate que dans le cas des transformations de grand degré topologique. Elle a été obtenue par T.C.Dinh [Di 2] pour les applications de Hénon complexes.

Théorème 4.26 *Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ une application de Hénon complexe de degré $\lambda := \lambda_1(f) > 1$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| \int \psi\varphi \circ \varphi^n d\mu_f - \left(\int \varphi d\mu_f\right)\left(\int \psi d\mu_f\right) \right| \leq c\lambda^{-n/2} ||\varphi||_{\mathcal{C}^2} ||\psi||_{\mathcal{C}^2}.$$

Notons que la vitesse de mélange n'est pas connue dans le cadre plus général des transformations birationnelles qui vérifient la condition (BD).

4.4.3 Définition géométrique

Pour pousser plus avant l'étude des propriétés ergodiques de la mesure μ_f, il est nécessaire de donner une interprétation géométrico-dynamique de celle-ci. Nous supposons pour simplifier dans la suite que $\lambda_2(f) = 1$. Dans ce cas les courants T^+ et T^- sont laminaires (Théorème 4.15).

Si S^+, S^- sont deux courants uniformément laminaires, localement décrits par une moyenne sur des disques

$$S^{\pm} = \int [\Delta_a^{\pm}] d\nu^{\pm}(a),$$

on peut définit leur *intersection géométrique* par

$$S^+\dot{\wedge}S^- := \int\int [\Delta_a^+ \cap \Delta_b^-] d\nu^+(a) d\nu^-(b).$$

On vérifie que cette définition coïncide avec la définition pluripotentialiste (voir Théorème 3.1 dans [Du 2]).

Lorsque les courants S^+, S^- sont seulement laminaires, on définit leur intersection géométrique $S^+\dot{\wedge}S^-$ comme limite des intersections géométriques de leurs approximants uniforméments laminaires. Malheureusement cette définition ne coïncide pas toujours avec la définition pluripotentialiste (voir le second paragraphe de [Du 2] pour des exemples). Lorsqu'on a un contrôle quantitatif de l'approximation de $S^\pm$ par des courants uniformément laminaires (comme c'est le cas dans le Théorème 4.15, cf (4.4)), on peut espérer montrer que les deux notions de produit extérieur coïncident.

R.Dujardin justifie cette attente dans [Du 2,4,5] en démontrant :

Théorème 4.27 *Supposons X projective. Si f vérifie la condition (BD) alors les courants T^+ et T^- s'intersectent géométriquement.*

Esquisse de preuve. On approxime $T^\pm$ par des courants $T_r^\pm$ qui sont uniformément laminaires associés à une subdivison $\mathcal{Q}$ en cubes Q de taille r, de telle sorte que la masse des différences satisfait

$$||T^\pm - T_r^\pm|| \leq Cr^2, \text{ où } T_r^\pm := \sum_{Q\in\mathcal{Q}} T_Q^\pm.$$

Il s'agit d'estimer la masse de la différence entre $T^+ \wedge T^-$ (définition pluripotentialiste) et $\sum_Q T_Q^+ \wedge T_Q^-$ (intersection géométrique).

Quitte à légèrement bouger la subdivision $\mathcal{Q}$, on peut supposer que la mesure $T^+ \wedge T^-$ ne charge pas le bord des cubes Q. Soit χ une fonction test qui s'annule près du bord des cubes et est identique à 1 dans la plus grande partie de Q (les dérivées d'ordre 1 de χ explosent donc comme C/r, lorsque $r \to 0$). Il nous faut montrer que la quantité

$$\int_X \chi(T^+ \wedge T^- - T_r^+ \wedge T_r^-) = \sum_Q \int_Q \chi(T^+ \wedge T^- - T_Q^+ \wedge T_Q^-)$$

tend vers 0 lorsque $r \to 0$. Comme χ est à support compact dans chaque cube Q, on peut traiter les intégrales séparément. Par symétrie il suffit de contrôler la masse de $T^+ \wedge (T^- - T_Q^-)$ dans Q. Or $T^+ = dd^cG^+$ dans Q, pour un potentiel local G^+ qui est de gradient L^2 par rapport à T^- (c'est la propriété (BD)). L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\begin{aligned}
&\int \chi dd^c G^+ \wedge (T^- - T_Q^-) = -\int d\chi \wedge d^c G^+ \wedge (T^- - T_Q^-) \\
\leq\ & \left(\int dG^+ \wedge d^c G^+ \wedge (T^- - T_Q^-)\right)^{1/2} \left(\int d\chi \wedge d^c \chi \wedge (T^- - T_Q^-)\right)^{1/2} \\
\leq\ & C\left(\int dG^+ \wedge d^c G^+ \wedge (T^- - T_Q^-)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Lorsque $r \to 0$, T_Q^- croît vers T^- et cette dernière intégrale converge vers 0 (il suffit d'approximer dG^+ par une suite de formes lisses dans $L^2(T^-)$) . □

4.5 Propriétés ergodiques de μ_f

Nous testons ici la conjecture dans l'une des deux situations suivantes :

1. *Hypothèses :* $kod(X) = -\infty$, $\lambda_2(f) = 1$ et condition (BD). Ainsi,
   – on peut supposer que f est 1-stable (Théorème 4.6) ;
   – on sait construire les courants invariants T^+, T^- (Théorème 4.9) ;
   – ils sont extrémaux et laminaires (Théorèmes 4.12 et 4.15) ;
   – la mesure $\mu_f := T^+ \wedge T^-$ est bien définie (voir (4.6)), mélangeante (Théorème 4.23) et géométrique (Théorème 4.27) ;
   – les exposants de Lyapunov de μ_f sont bien définis (Proposition 4.22).
   La conjecture a été démontrée dans ce contexte par E.Bedford, M.Lyubich et J.Smillie lorsque f est une application de Hénon complexe [BLS 1,2] et partiellement démontrée par E.Bedford, J.Diller [BDi 2], et R.Dujardin [Du 5] sous ces hypothèses.
2. *Hypothèses :* $kod(X) = 0$ et X est projective. Ainsi
   – f est 1-stable si on travaille sur le modèle minimal (Proposition 4.5) ;
   – on sait construire les courants T^+, T^- (Théorèmes 4.9 et 4.17) ;
   – T^+ est laminaire, T^- est extrémal si $(\alpha^-)^2 = 0$ (Th. 4.15 et 4.18) ;
   – la condition (BD) est toujours satisfaite (Proposition 4.22), donc $\mu_f = T^+ \wedge T^-$ est bien définie, ergodique (et même mélangeante si $(\alpha^-)^2 = 0$, Théorème 4.23), et géométrique (Théorème 4.27) ;
   – les exposants de Lyapunov de μ_f sont bien définis (Proposition 4.22).
   La conjecture a été démontrée dans ce contexte par S.Cantat [Ca 1] lorsque $\lambda_2(f) = 1$ – c'est à dire lorsque f et un automorphisme –, et partiellement démontrée dans [DDG] lorsque $\lambda_2(f) \geq 2$.

4.5.1 Lamination stable

Tout courant laminaire T (voir définition 4.14) est localement représentable

$$T = \int_{\alpha \in \mathcal{A}} [\Delta_\alpha] d\nu(\alpha) \tag{4.7}$$

par une moyenne sur une famille de disques holomorphes Δ_α. En général on ne peut pas lui associer une structure laminaire convenable (voir [Du 1,2,4] pour des exemples), mais c'est possible lorque le courant T est *fortement approximable* (i.e. redevable de l'estimée quantitative (4.4)) : c'est le résultat principal de [Du 4] qui assure que si $\mathcal{L}$ est une réunion de disques Δ_α (on dit que $\mathcal{L}$ est une boite de flot), alors $\mathcal{L}$ a une structure de lamination plongée et $T_{|\mathcal{L}}$ est uniformément laminaire. Il s'ensuit que $T_{|\mathcal{L}}$ induit une mesure transverse invariante par holonomie qui est ergodique lorsque T est extrémal (voir Théorème 2.4 dans [Du 5]).

Lorsque $T = T^+$ est le courant canonique f^*-invariant, il résulte du Théorème 4.15 que T^+ est fortement approximable. Nous montrons à présent que les disques Δ_α^+ intervenant dans la représentation laminaire de T^+ (on parle de disques subordonnés à T^+) sont des morceaux de variétés stables.

Soit τ une union finie de disques holomorphes transverses à une boite de flot $\mathcal{L}$. La théorie du slicing assure que la mesure $T^+_{|\mathcal{L}} \wedge [\tau]$ est bien définie pour un choix générique de τ. On note $T^+ \wedge \tau$ la mesure induite sur la transversale τ (elle est invariante par holonomie). Le lemme suivant, dû à R.Dujardin [Du 5], est l'analogue dans ce contexte du lemme de Briend-Duval-Lyubich (Lemme 3.4).

Lemme 4.28 *Soit $\mathcal{L} = \{\Delta_t^+, t \in \tau\}$ une boite de flot subordonnée à T^+ et τ transverse à $\mathcal{L}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ et une transversale $\tau_\varepsilon \subset \tau$ tels que $||T^+ \wedge \tau_\varepsilon|| \geq (1-\varepsilon)||T^+ \wedge \tau||$ et*

$$\mathit{Aire}(f^n \Delta_t^+) \leq \frac{C_\varepsilon n^2}{\lambda^n}, \quad \forall t \in \tau_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esquisse de preuve. Quitte à légèrement bouger τ, on peut supposer que $\mathcal{L}$ ne rencontre pas $\mathcal{C}_f \cup I_f$. Dans ce cas $f(\mathcal{L})$ est une boite de flot pour T^+ et $f\tau$ est transverse à $f(\mathcal{L})$, car f est localement biholomorphe et $f_* T^+ = \lambda^{-1} T^+$ dans $X \setminus (\mathcal{C}_f \cup I_f)$. On en déduit

$$f_*(T^+ \wedge \tau) = f_* T^+ \wedge f\tau = \lambda^{-1} T^+ \wedge f\tau.$$

Quitte à enlever un ensemble de τ-mesure nulle, on peut supposer que τ ne rencontre pas $\cup_{n \geq 0}(I_{f^n} \cup \mathcal{C}_{f^n})$. On a donc comme précédemment $(f^n)_*(T^+ \wedge \tau) = \lambda^{-n} T^+ \wedge f^n \tau$. Deux "disques" $f^n \Delta_{f^{-n} t_i}$ ne peuvent se rencontrer qu'en un nombre fini de points lorsque $t_1 \neq t_2$ varient dans $f^n \tau$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_t \mathrm{Aire} f^n(\Delta_{f^{-n}t}) d(T^+ \wedge f^n \tau)(t) \leq ||T^+|| = 1.$$

Comme $T^+ \wedge f^n \tau = \lambda^n (f^n)_*(T^+ \wedge \tau)$ et $(f^n)^*(\mathrm{Aire} f^n(\Delta_{f^{-n}t})) = \mathrm{Aire}(f^n \Delta_t)$, on en déduit

$$\int_t \mathrm{Aire}(f^n \Delta_t) d(T^+ \wedge \tau)(t) \leq \lambda^{-n}.$$

La plupart des disques Δ_t ont donc une aire qui décroit en λ^{-n} sous itération de f. Nous renvoyons au Lemme 3.2 de [Du 5], pour plus de détails. $\square$

4.5.2 Exposants de Lyapunov

Il résulte du lemme précédent que le plus grand exposant de Lyapunov $\chi^+(\mu_f)$ de μ_f vérifie l'estimation attendue (voir Théorème 4.6 de [Du 5]),

$$\chi^+(\mu_f) \geq \frac{1}{2} \log \lambda > 0.$$

Lorsque f est birationnel, on en déduit bien sûr la majoration $\chi^-(\mu_f) \leq -\frac{1}{2}\log\lambda < 0$, en intervertissant les rôles de f, f^{-1}. Lorsque $2 \leq \lambda_2(f) < \lambda_1(f) = \lambda$, il faut donner un argument supplémentaire pour contrôler $\chi^-(\mu_f)$. En voici un lorsque X est de dimension de Kodaira nulle [DDG].

Proposition 4.29 *Si kod*$(X) = 0$ *alors*

$$\chi^+(\mu_f) + \chi^-(\mu_f) = \frac{1}{2} \log \lambda_2(f).$$

En particulier, lorsque X est projective,

$$\chi^-(\mu_f) \leq -\frac{1}{2} \log[\lambda_1(f)/\lambda_2(f)] < 0 < \frac{1}{2} \log \lambda_1(f) \leq \chi^+(\mu_f).$$

Esquisse de preuve. Rappelons que lorsque X est de dimension de Kodaira nulle, il existe une forme volume ν de jacobien constant, $f^*\nu = \lambda_2(f)\nu$. Elle est définie à l'aide d'une 2-forme holomorphe η telle que $f^*\eta = \zeta\eta$, où $\zeta \in \mathbb{C}$ est tel que $|\zeta|^2 = \lambda_2(f)$ (voir la preuve du Théorème 4.17). Soit $x \in X$ un point μ_f-générique. Il résulte du Théorème de récurrence de Poincaré que $f^n(x)$ est arbitrairement proche de x pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$. L'invariance de la forme η assure que pour ces indices,

$$\frac{1}{n} \log |Jac(f^n)(x)| \simeq \log |\zeta|.$$

Or le Théorème de réduction d'Oseledec-Pesin (voir [KH]) assure que pour un point μ_f-générique, on a

$$\chi^+(\mu_f) + \chi^-(\mu_f) \simeq \frac{1}{n} \log |Jac(f^n)(x)|.$$

L'égalité $\chi^+(\mu_f) + \chi^-(\mu_f) = \log|\zeta| = \frac{1}{2}\log|\lambda_2(f)|$ s'ensuit.

Lorsque X est projective, il résulte de l'estimation $\chi^+ \geq \frac{1}{2}\log\lambda$ que le plus petit exposant de Lyapunov $\chi^-(\mu_f)$ est majoré par $-\frac{1}{2}\log\lambda/\lambda_2(f)$. $\square$

Remarque 4.30 *La démonstration montre en fait que la formule* $\chi^+(\mu) + \chi^-(\mu) = \frac{1}{2}\log\lambda_2(f)$ *est valable pour toute mesure invariante ergodique* μ*. Lorsqu'on l'applique à une combinaison linéaire de masses de Dirac équidistribuées selon un cycle périodique, on en déduit que le produit des valeurs propres est égal à la racine carrée du degré topologique : il ne peut donc y avoir ni cycle attractif, ni domaine de Siegel lorsque le degré topologique est* ≥ 2 *(comparer avec [M 1]). Il s'ensuit également que l'ensemble de Fatou est vide dans une telle situation.*

4.5.3 Entropie et point selles

Le Lemme 4.28 permet d'interpréter les disques $\Delta_t^{\pm}$ subordonnés à $T^{\pm}$ comme des disques stables/instables. Il résulte du Théorème 4.27 que μ_f a une structure de produit local par rapport aux variétés stables/instables. Des arguments classiques permettent alors de montrer que μ_f est d'entropie maximale $\log\lambda$ (voir Théorème 4.6 dans [Du 5]) et que les points périodiques selles s'équidistribuent selon μ_f (voir [BLS 2] et Théorème 5.4 dans [Du 5]).

4.6 Exemples

4.6.1 Endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$

Les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ ont été classifiés par S.Friedland et J.Milnor dans [FrM].

Théorème 4.31 *Soit* $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *un automorphisme polynomial de* $\mathbb{C}^2$ *qui est cohomologiquement hyperbolique. Alors* f *est conjugué à une application de Hénon complexe, i.e. une composition finie d'automorphismes de la forme*

$$h : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z) - aw, z) \in \mathbb{C}^2,\ a \neq 0,$$

où P *est un polynôme de degré* $d \geq 2$*.*

La preuve s'appuie sur le Théorème de Jung qui décrit la structure du groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$. Une preuve simple et élégante en a été donnée par S.Lamy dans [La 1]. La dynamique des applications de Hénon complexes a été abondamment étudiée, notamment par E.Bedford, J.Smillie [BS 1-3], M.Lyubich [BLS 1,2], J.H.Hubbard et ses co-auteurs [Hu], [HOV 1,2], [HPV], N.Sibony et J.E.Fornaess [FS 1-4].

Il est naturel de vouloir considérer d'autres classes d'exemples. On peut s'intéresser aux endomorphismes polynomiaux *birationnels* (l'inverse n'est pas nécessairement polynomial) comme dans [FaG], mais la structure de ce semi-groupe est encore mal comprise (voir [Da], [SY]). On peut au contraire vouloir conserver le caractère propre des automorphismes, mais autoriser un degré topologique plus grand. S.Lamy a partiellement classifié dans [La

2] les endomorphismes polynomiaux propres de $\mathbb{C}^2$ de degré topologique 2 : ils sont conjugués à $\tau \circ h$, où h est un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ et $\tau(z, w) = (z^2, w)$. Il serait intéressant de pousser plus avant cette classification et d'étudier la dynamique de ces applications.

L'auteur a étudié dans [G 3] la dynamique des endomorphismes polynomiaux *quadratiques* de $\mathbb{C}^2$ –i.e. ceux qui induisent une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^2$ tel que $r_1(f) = 2$. On obtient dans ce cas le

Théorème 4.32 *Soit $f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z, w), Q(z, w)) \in \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial quadratique de $\mathbb{C}^2$ (i.e. P, Q sont des polynômes de degré ≤ 2) tel que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Alors f s'écrit, après conjugaison par un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$, sous l'une des deux formes suivantes :*

1. *$f(z, w) = (w + c, zw + c')$, où $c, c' \in \mathbb{C}$. Dans ce cas f est 1-stable dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et on obtient $\lambda_1(f) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2(f) = 1$;*
2. *$f(z, w) = (w+c, w[w-az]+bz+c')$, où $a, b, c, c' \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans ce cas f est 1-stable dans $\mathbb{P}^2$ et on obtient $\lambda_1(f) = 2$, $\lambda_2(f) = 1$.*

Observons que ces endomorphismes sont birationnels et qu'ils vérifient la condition (BD) sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (classe 1) ou sur $\mathbb{P}^2$ (classe 2). Plus généralement, si $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est un endomorphisme polynomial tel que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$, il est naturel de se demander si f vérifie la condition (BD) dans une compactification adéquate. Nous proposons une question plus précise.

Question 4.33 *Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial tel que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Peut-on trouver une compactification $X = \mathbb{C}^2 \cup D_\infty$ de $\mathbb{C}^2$ telle que f s'étende en une transformation de X avec*

$$(\dagger) \qquad f^m(X \setminus I_{f^m}) = q_\infty \text{ est un point fixe superattractif de } f?$$

Ici m désigne le nombre de composantes irréductibles du diviseur D_∞.

Il résulte immédiatement de (†) que f^m est 1-stable dans X et vérifie la condition (BD), puisque $f^{-m}(I_{f^m}) \subset I_{f^m}$. La condition (†) a été vérifiée dans [FaG] pour les transformations birationnelles de $\mathbb{C}^2$ qui sont engendrées par les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ et par l'application $(x, y) \mapsto (x, xy)$. Il y a certes des endomorphismes birationnels polynomiaux qui ne sont pas de ce type (cf [Da]), mais tous les exemples que nous connaissons (voir par exemple ceux explicités dans [SY]) vérifient également (†) dans une compactification adéquate. Voici une observation qui motive également la Question 4.33.

Proposition 4.34 *Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial tel que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$. Supposons que f admette une extension méromorphe 1-stable à $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty$. Alors la droite à l'infini L_∞ est contractée par f sur un point fixe superattractif q_∞.*

Preuve. Notons $f = (P, Q)$ les composantes polynomiales de f dans $\mathbb{C}^2$, avec $\lambda = \max(\deg P, \deg Q)$: c'est le rayon spectral $r_1(f)$ de l'extension méromorphe de f à $\mathbb{P}^2$. L'ensemble d'indétermination I_f de f est localisé à l'infini. La seule droite qui puisse être contractée par f sur un point d'indétermination est la droite L_∞. Puisque f est 1-stable dans $\mathbb{P}^2$, soit celle-ci est contractée sur un point q_∞ qui n'est pas d'indétermination (dans ce cas c'est un point fixe superattractif), soit L_∞ n'est pas contractée : nous allons voir que cela entraîne $\lambda_2(f) \geq \lambda = \lambda_1(f)$.

Supposons donc que L_∞ n'est pas contractée. Alors les parties homogènes de plus haut degré P_λ, Q_λ de P, Q se décomposent en $P_\lambda = R{\cdot}A$ et $Q_\lambda = R{\cdot}B$, où A, B sont des polynômes homogènes premiers entre eux de degré $d \geq 1$, et $(R = 0) \cap L_\infty = I_f$. Nous allons montrer que $\lambda_2(f) \geq \lambda d$.

Soit L, L' deux droites projectives génériques. Alors $L \cdot L'$ est un point générique de $\mathbb{C}^2$ et $\lambda_2(f)$ est le nombre de préimages de ce point, c'est à dire le cardinal de $f^{-1}(L) \cap f^{-1}(L')$ dans $\mathbb{C}^2$. On peut estimer ce cardinal à l'aide du produit d'intersection $f^*[L] \wedge f^*[L']$: celui-ci est de masse totale λ^2 dans $\mathbb{P}^2$, qui se répartit en $\lambda_2(f)$ masses de Dirac en des points de $\mathbb{C}^2$, et $\lambda^2 - \lambda_2(f)$ masses de Dirac aux points d'indétermination de f (localisés à l'infini). Comme l'application $f_\infty := f_{|L_\infty}$ est de degré $d \geq 1$, la courbe $f^{-1}(L)$ intersecte L_∞ en d points qui ne sont pas des points d'indétermination. Si on choisit pour L' une petite perturbation de L_∞, on déduit de la relation d'invariance $f^*[L_\infty] = \lambda[L_\infty]$ que les courbes $f^{-1}(L)$ et $f^{-1}(L')$ s'intersectent en au moins λd points dans $\mathbb{C}^2$. $\square$

La proposition ci-dessus indique également une marche à suivre pour trouver une compactification 1-stable d'un endomorphisme polynomial f de $\mathbb{C}^2$: on commence par considérer son extension méromorphe à $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty$. Si f ne contracte pas la droite L_∞, alors f est 1-stable dans $\mathbb{P}^2$ et $\lambda_2(f) \geq \lambda_1(f)$. Si f contracte L_∞ sur un point q_∞ qui n'est pas un point d'indétermination, alors f est 1-stable dans $\mathbb{P}^2$ et vérifie la condition (BD). Sinon $f(L_\infty \setminus I_f) = m \in I_f$: on éclate alors au point m et on analyse le comportement de la transformation induite dans l'éclaté...

C.Favre et M.Jonsson ont appliqué leur analyse de l'arbre des valuations [FaJ 2] dans le cadre décrit ici et ont réalisé des progrès substantiels en direction d'une réponse positive à la Question 4.33 (voir [FaJ 3]).

4.6.2 Transformations rationnelles pathologiques

Nous présentons à présent quelques exemples de transformations rationnelles qui illustrent la difficulté qu'il peut y avoir à contrôler la dynamique près des points d'indétermination.

Exemple 4.35 *Considérons le tore $Y = E \times E$, où $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\zeta]$ est la courbe elliptique associée à une racine primitive de l'unité ζ d'ordre* $3, 4$ *ou*

6. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & d+2 \\ 1 & d \end{bmatrix},\ d \geq 1,$$

préserve le réseau $\Lambda = \mathbb{Z}[\zeta] \times \mathbb{Z}[\zeta]$. Elle induit donc un endomorphisme holomorphe $g : Y \to Y$ tel que

$$\lambda_2(g) = 4 \text{ et } \lambda_1(g) = \left(\frac{d+1+\sqrt{(d+1)^2+8}}{2} \right)^2 > \lambda_2(g).$$

Soit $\sigma : Y \to Y$ l'homothétie de rapport ζ, et soit $f : X \to X$ la transformation induite par g sur la surface rationnelle X obtenue en désingularisant le quotient $Y/\langle\sigma\rangle$, i.e. en éclatant aux points fixes de σ. Soit a un tel point fixe. Comme g est de degré topologique $\lambda_2(g) \geq 2$, $g^{-1}(a)$ contient d'autres préimages que les points fixes de σ. Chaque point de $g^{-1}(a) \setminus Fix(\sigma)$ correspond, dans X, à un point d'indétermination de f. Comme les g-préimages de tout point s'équidistribuent selon la mesure de Lebesgue ν_Y du tore Y, l'ensemble $(g^{-n}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans Y. On en déduit que l'ensemble

$$I_f^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n} I_{f^n} \text{ est dense dans } X.$$

Observons que f est 1-stable : comme g ne contracte aucune courbe, il en est de même de f, qui vérifie donc le critère de la Proposition 4.4.

C.Favre a donné dans [Fa 1] des exemples de transformations birationnelles 1-stables de $\mathbb{P}^2$ qui ne vérifient pas la condition (BD) (voir également Exemple 5 dans [B]) : ce sont des exemples qui admettent une droite invariante L sur laquelle f est conjuguée à une rotation très irrationnelle. Cette construction a été généralisée dans [DG] pour obtenir des exemples similaires (trois droites invariantes), pour lesquels il est possible de vérifier la condition $g^+ \in L^1(T^- \wedge \omega)$:

Exemple 4.36 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $f = f_{abc} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ défini par*

$$f[x:y:z] = [bcx(-cx+acy+z) : acy(x-ay+abz) : abz(bcx+y-bz)].$$

On vérifie que f est une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ telle que $f^{-1} = f_{a^{-1}b^{-1}c^{-1}}$. Observons que les droites $(x=0), (y=0), (z=0)$ sont invariantes par f,f^{-1} et contiennent tous les points d'indétermination des f^n, $n \in \mathbb{Z}$. On calcule par exemple

$$I_f = \{[a:1:0]; [0:b:1]; [1:0:c]\}.$$

Fixons $b = -2e^{2i\pi\theta}$, $c = 1/2$ et $a = i$. On vérifie dans ce cas que f est 1-stable sur $\mathbb{P}^2$ et g^- est finie aux deux points d'indétermination $[0:b:1], [1:0:c]$. L'action de f sur la droite $(z=0)$ est celle d'une rotation d'angle θ.

Or les points $[i:1:0] \in I_f$ *et* $[-i:1:0] \in I_{f^{-1}}$ *sont sur un même cercle invariant. Lorsque* θ *est choisi judicieusement, l'orbite négative* $\{f^{-n}[i:1:0], n \in \mathbb{N}\}$ *du point* $[i:1:0]$ *passe parfois très près de* $[-i:1:0]$*, de sorte que* $g^-([i:1:0]) = -\infty$*. La condition (BD) n'est donc pas satisfaite. Il est montré cependant dans [DG] que* $g^- \in L^1(T^+)$*.*

4.6.3 Exemples provenant de la Physique

De nombreuses applications birationnelles interviennent en Physique en relation avec la théorie des systèmes intégrables (voir [BTR], [GNR] pour un survol récent). La famille

$$f_a(x,y) = \left(y\frac{x+a}{x-1}, x+a-1\right),\ a \in \mathbb{R},$$

est constituée d'applications birationnelles du plan $\mathbb{R}^2$ qui préservent l'aire (elle préservent une 2-forme méromorphe) et sont réversibles (f_a est conjugée à f_a^{-1} par une involution). Elles ont été étudiées numériquement par de nombreux auteurs (voir [Ab], [BoM]). C.Favre et J.Diller [DF], puis E.Bedford et J.Diller [BDi 1] ont montré comment les méthodes d'analyse et géométrie complexe permettent d'étudier la dynamique de telles applications : elles vérifient notamment la condition (BD), lorsqu'on considère leur complexification et compactification à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On dispose donc d'une mesure d'entropie maximale μ_f. E.Bedford et J.Diller montrent [BDi 1], lorsque $a < 0$, $a \neq -1$, que la mesure μ_f est à support dans $\mathbb{R}^2$, et que (f, μ_f) est conjugué à (σ, ν), où σ est le sous-décalage du nombre d'or et ν désigne son unique mesure d'entropie maximale.

Le lecteur trouvera dans [BDi 3] une étude analogue pour une famille à deux paramètres d'applications birationnelles.

Notons également que de nombreuses transformations rationnelles interviennent (comme opérateurs de renormalisation) dans l'analyse spectrale d'opérateurs différentiels (Laplace, Schrödinger,...) sur des structures modèles self-similaires. On pourra consulter [Sa] à ce sujet.

Chapitre 5

Dimension supérieure

Il est peut-être utile de préciser la stratégie que nous proposons pour démontrer la conjecture énoncée dans l'introduction.

Définition 5.1 *Soit $l \in [1, k]$. On dit que $f : X \to X$ est l-stable si l'action linéaire induite par f^* sur $H^{l,l}(X, \mathbb{R})$ est compatible avec la dynamique, i.e. si $(f^n)^* = (f^*)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Supposons que le degré dynamique $\lambda := \lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques. On peut alors procéder de la façon suivante :

- on cherche un modèle $\tilde{X}$ birationnellement équivalent à X, sur lequel f induit une transformation l-stable. Sur ce modèle $\lambda = r_l(f) = r_{k-l}(f_*)$;
- on essaie de montrer que λ est une valeur propre "distinguée" pour les actions linéaires induites $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{R}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{R})$ et $f_* : H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{R}) \to H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{R})$ (voir Définition 5.3). On note $\alpha^+ \in H^{l,l}_{psef}(X, \mathbb{R})$ et $\alpha^- \in H^{k-l,k-l}_{psef}(X, \mathbb{R})$ des vecteurs propres associés à λ, lorsque ces cônes sont invariants ;
- on cherche à construire des courants invariants canoniques T^+_l, T^-_{k-l} avec $\{T^+_l\} = \alpha^+$, $\{T^-_{k-l}\} = \alpha^-$, puis à établir des propriétés d'extrémalité et de laminarité de ces courants ;
- on cherche enfin à définir $\mu_f = T^+_l \wedge T^-_{k-l}$ et à établir ses principales propriétés ergodiques.

Lorsque $l = k$, toute application est k-stable, sur n'importe quel modèle. L'analyse spectrale est très simple puisque $H^{k,k}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. De plus il n'est pas nécessaire d'intersecter de courants, car T^+_k est déjà de bidegré maximal. Ceci explique en partie pourquoi le cas de grand degré topologique, traité au chapitre 3, est un peu plus simple.

Lorsque $l \leq k - 1$, il y a plusieurs difficultés à surmonter, comme nous l'avons vu au chapitre 4, lorsque la variété X est de dimension deux. Nous nous intéressons à présent aux transformations de petit degré topologique en dimension supérieure. C'est une source de difficultés nouvelles et il semble raisonnable, dans un premier temps, de limiter le champ d'investigations à des classes significatives d'exemples. Nous en considérons dans ce chapitre deux grandes familles :

- les *automorphismes* cohomologiquement hyperboliques : ils sont automatiquement l-stables et la construction de courants invariants est simplifiée par l'absence de points d'indétermination. C'est une direction défrichée récemment par T.-C.Dinh et N.Sibony dans [DS 5,6] ;
- les endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ qui induisent une transformation l-stable sur $X = \mathbb{P}^k$: la géométrie est plus simple et les points d'indétermination sont confinés dans l'hyperplan à l'infini. C'est la direction de recherche adoptée dans [BP],[S],[GS],[CoG], [G 6], [DS 2,7].

5.1 Pourquoi la dimension supérieure ?

Vues les difficultés que nous avons rencontrées au chapitre 4 dans l'étude dynamique des transformations des surfaces, on peut être sceptique à l'idée d'attaquer cette question en dimension supérieure. Il y a pourtant de nombreuses raisons qui justifient cette étude, comme nous l'expliquons à présent.

5.1.1 Transformations produits

C'est une astuce classique dans le monde des systèmes dynamiques d'établir des propriétés ergodiques fines d'un endomorphisme $f : X \to X$ en étudiant des propriétés – a priori – plus grossières de l'endomorphisme produit

$$f \otimes f : (x, y) \in X^2 \mapsto (f(x), f(y)) \in X^2.$$

Si μ_f est une mesure de probabilité invariante pour f, alors $\nu_f(x, y) := \mu_f(x) \otimes \mu_f(y)$ est une mesure de probabilité invariante pour $f \otimes f$, et on a par exemple le résultat suivant :

Proposition 5.2 *la mesure ν_f est ergodique si et seulement si μ_f est faiblement mélangeante.*

Rappelons que μ_f est dite faiblement mélangeante si pour toute paire de boréliens $A, B \subset X$, il existe un ensemble $J = J(A, B) \subset \mathbb{N}$ de densité nulle dans $\mathbb{N}$ tel que $\lim_{J(A,B) \not\ni n \to +\infty} \mu(f^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Lorsque $J(A, B) = \emptyset$, on retrouve la propriété de mélange fort. Nous renvoyons le lecteur à [W] (Théorème 1.24 p 46), pour une preuve de ce résultat élémentaire.

Observons à présent que la conjecture énoncée dans l'introduction est stable par passage au produit $f \otimes f$. Cela résulte notamment du Théorème 2.4.b : si $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$, alors $\lambda_{2l}(f \otimes f) = [\lambda_l(f)]^2 > \max_{j \neq 2l} \lambda_j(f \otimes f)$. Il résulte de plus des inégalités de concavité 2.4.a que

$$\lambda_{2l-1}(f \otimes f) = \lambda_l(f)\lambda_{l-1}(f), \quad \text{donc} \quad \frac{\lambda_{2l}(f \otimes f)}{\lambda_{2l-1}(f \otimes f)} = \frac{\lambda_l(f)}{\lambda_{l-1}(f)},$$

et de même $\lambda_{2l}(f \otimes f)/\lambda_{2l+1}(f \otimes f) = \lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier comment les autres invariants (exposants de Lyapunov, entropie, courants invariants, etc) se comportent par passage au produit.

Lorsque l'on sait construire une mesure canonique invariante μ_f pour f, Il suffit ainsi, d'après la Proposition 5.2, de montrer l'ergodicité de $(f \otimes f, \mu_f \otimes \mu_f)$ pour obtenir le mélange faible.

Dans un esprit similaire, T.C.Dinh a récemment obtenu [Di 2] une estimation de la décroissance des corrélations pour les applications de Hénon complexes $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ en étudiant les propriétés ergodiques de l'endomorphisme produit $(f, f^{-1}) : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$.

5.1.2 Réduction au cas polynomial

Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ une transformation rationnelle. On peut lui associer canoniquement une transformation $F : \mathbb{P}^{k+1} \to \mathbb{P}^{k+1}$ qui a les mêmes caractéristiques dynamiques que f, et dont la restriction à $\mathbb{C}^{k+1}$ est polynomiale. Plus précisément, rappelons que f s'écrit en coordonnées homogènes $f[z_0 : \cdots : z_k] = [P_0(z) : \cdots : P_k(z)]$, où les P_j sont des polynômes homogènes premiers entre eux de degré $r := r_1(f)$. Ils sont uniquement déterminés à une constante multiplicative près. L'endomorphisme polynomial $F : z \in \mathbb{C}^{k+1} \mapsto (P_0(z), \ldots, P_k(z)) \in \mathbb{C}^{k+1}$ rend le diagramme suivant commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ (\mathbb{C}^{k+1})^* & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^{k+1})^* \end{array}$$

Il s'étend en une transformation rationnelle de $\mathbb{P}^{k+1}$, $F[z : t] = [P_0(z) : \cdots : P_k(z) : t^r]$, où l'on a noté $(t = 0)$ l'hyperplan à l'infini, $\mathbb{P}^{k+1} = \mathbb{C}^{k+1} \cup (t = 0)$. L'ensemble d'indétermination I_F est localisé dans l'hyperplan à l'infini, et vérifie $I_F = I_f$ si l'on considère que f agit sur $(t = 0) \simeq \mathbb{P}^k$: la transformation f peut ainsi être considéré comme la restriction de F à $(t = 0)$. Observons que F définit ainsi une transformation 1-stable de $\mathbb{P}^{k+1}$ tel que $\lambda_1(F) = r_1(F) = r$. On suppose bien sûr $r \geq 2$. Plus généralement,

$$\lambda_{j+1}(F) = r\lambda_j(f), \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k.$$

Cela se vérifie aisément grâce au Théorème 2.4, si l'on considère la transformation produit induite par F sur $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^1$, $([z], t) \in \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^1 \mapsto (f[z], t^r) \in \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^1$. Il résulte en effet de 2.4.b que $\lambda_{j+1}(F) = \max(r\lambda_j(f); \lambda_{j+1}(f))$. Mais les inégalités de concavité 2.4.a montrent par ailleurs que $\lambda_{j+1}(f) \leq \lambda_1(f)\lambda_j(f)$ $\leq r\lambda_j(f)$, d'où $\lambda_{j+1}(F) = r\lambda_j(f)$. Il s'ensuit que $\lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques de f si et seulement si $\lambda_{l+1}(F)$ domine strictement tous les degrés $\lambda_j(F)$, $j \neq l + 1$.

Une mesure F-invariante μ_F induit une mesure f-invariante, $\mu_f := \pi_* \mu_F$. Tout cycle f-périodique d'ordre n ayant l valeurs propres de module plus grand que 1 et $k-l$ valeurs propres de module plus petit que 1 [un cycle selle de type $(l, k-l)$] induit r cycles selles d'ordre n pour F et de type $(l+1, k-l)$: il suffit de relever un tel cycle dans $\mathbb{C}^{k+1}$ et de faire agir dessus la multiplication par une racine primitive de l'équation $\zeta^r = 1$.

Les exposants de Lyapunov de (f, μ_f) et (F, μ_F) sont également reliés les uns aux autres de façon très simple : l'un des exposants $\chi_j(\mu_F)$ est égal à $\log r$, les autres prennent exactement les mêmes valeurs que les $\chi_i(\mu_f)$, en particulier $\sum_{j=0}^{k+1} \chi_j(\mu_F) = \log r + \sum_{j=1}^{k} \chi_j(\mu_f)$.

Conclusion. Pour comprendre la dynamique des applications rationnelles $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, notamment pour établir la conjecture, il suffit – au prix d'une augmentation artificielle de la dimension – de considérer ceux qui sont induits par un endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^k$.

5.1.3 Dynamique à paramètre

Nous avons mentionné (voir paragraphe 3.4.3) qu'il est intéressant d'étudier la dynamique de famille de transformations $(f_t)_{t \in M}$ qui dépendent holomorphiquement d'un paramètre $t \in M$. Lorsque la variété M est un ouvert de Zariski d'une variété projective, on peut étudier en famille la dynamique des applications f_t en considérant la transformation $F(x,t) = (f_t(x), t)$.

Considérons par exemple le cas d'endomorphismes polynomiaux $f_t : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ qui dépendent polynomialement d'un paramètre $t \in \mathbb{C}^m$. Alors

$$F : (z,t) \in \mathbb{C}^{k+m} \mapsto (f_t(z), t) \in \mathbb{C}^{k+m}$$

est un endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^{k+m}$ qui préserve les feuilletages ($t_i =$ *constante*) : c'est un produit croisé. On peut considérer son extension méromorphe – notée encore F – à $\mathbb{P}^k$ ou à toute compactification lisse de $\mathbb{C}^k$. L'endomorphisme F n'est pas cohomologiquement hyperbolique mais on peut cependant étudier les courants dynamiques qui interviennent en bidegré (p,p), $p \leq k$, et en déduire des informations sur la dynamique de f_t. Par exemple la fonction de Green dynamique de F,

$$G_F(z,t) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda_1(F)^n} \log^+ ||F^n(z,t)||$$

coïncide avec la fonction de Green dynamique de f_t,

$$G_{f_t}(z) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda_1(f_t)^n} \log^+ ||f_t^n(z)||.$$

Des résultats de régularité (resp. plurisousharmonicité) de $(z,t) \mapsto G_F(z,t)$ (dans l'esprit de la Proposition 1.2, voir [DG]) donnent donc des informations sur la continuité (resp. plurisousharmonicité) de $t \mapsto G_{f_t}$.

5.2 Automorphismes

Nous testons ici la stratégie proposée ci-dessus dans le cas où $f : X \to X$ est un automorphisme cohomologiquement hyperbolique, i.e. $I_f = \emptyset$, $\lambda_k(f) = 1$ et on note $\lambda := \lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$. Comme f est holomorphe, f est l-stable sur X. Nous montrons que λ est une valeur propre distinguée de l'opérateur $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{C}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{C})$ lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 3$.

Nous en déduisons la construction de courants invariants canoniques T_l^+ et T_{k-l}^-, et d'une mesure de probabilité invariante $\mu_f = T_l^+ \wedge T_{k-l}^-$ dont nous montrons qu'elle est mélangeante et d'entropie maximale lorsque X est projective.

Ce problème a été étudié par T.C.Dinh et N.Sibony dans [DS 6], en suivant une méthode originale, qui fournit des informations sur la dimension de Hausdorff du support de μ_f. Nous esquissons leur approche dans le paragraphe 5.2.3

5.2.1 Analyse spectrale

Soit $f : X \to X$ un endomorphisme holomorphe. Nous allons tester la condition suivante :

Définition 5.3 *L'endomorphisme f satisfait la condition* **Spec(f,l)** *si $\lambda_l(f)$ est une valeur propre simple de l'opérateur $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{C}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{C})$ qui domine strictement toutes les autres valeurs propres de cet opérateur.*

Notons que la condition **Spec(f,k)** est trivialement vérifiée. Nous avons vu que la condition **Spec(f,1)** est vérifiée en dimension deux lorsque $\lambda_2(f) < \lambda_1(f)^2$ (Théorème 4.7). C'est encore vrai en dimension supérieure :

Proposition 5.4 *Soit $f : X \to X$ un endomorphisme holomorphe tel que $\lambda_2(f) < \lambda_1(f)^2$. Alors f vérifie la condition* **Spec(f,1)** *et toute valeur propre $\zeta \neq \lambda_1(f)$ de l'opérateur $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ est telle que $|\zeta| \leq \sqrt{\lambda_2(f)} < \lambda_1(f)$.*

Preuve. Comme f est holomorphe, $\lambda_1(f) = r_1(f)$ est le rayon spectral de l'action linéaire $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{C})$. Le cône $H^{1,1}_{nef}(X, \mathbb{R})$ étant préservé, il existe une classe nef $\alpha^+ \neq 0$ telle que $f^*\alpha^+ = \lambda_1(f)\alpha^+$.

Observons que $\alpha^+ \wedge \alpha^+ = 0$, sinon $f^*(\alpha^+ \wedge \alpha^+) = \lambda_1(f)^2 \alpha^+ \wedge \alpha^+$ et donc $\lambda_1(f)^2 \leq \lambda_2(f)$, contredisant notre hypothèse. Supposons que $f^*\beta = \lambda_1(f)\beta + \varepsilon\alpha^+$ pour une classe $\beta \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ et $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Alors $f^*(\beta \wedge \alpha^+) = \lambda_1(f)^2 \beta \wedge \alpha^+$, donc $\beta \wedge \alpha^+ = 0$. De même $\beta \wedge \beta = 0$. Il résulte alors des relations bilinéaires de Hodge-Riemann (voir [GH]) que β est proportionnelle à α^+. Cela montre que $\lambda_1(f)$ est une valeur propre simple.

Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ et $\beta \neq 0$ un vecteur propre associé. Si $\beta \wedge \alpha^+ \neq 0$ alors $f^*(\beta \wedge \alpha^+) = \zeta\lambda_1(f)\beta \wedge \alpha^+$

implique $|\zeta| \le \lambda_2(f)/\lambda_1(f) \le \sqrt{\lambda_2(f)}$. Supposons à présent $\beta \wedge \alpha^+ = 0$. Si $\beta \wedge \beta = 0$, il résulte de l'analyse précédente que β est proportionnel à α^+ et donc $\zeta = \lambda_1(f)$. Lorsque $\zeta \neq \lambda_1(f)$ on a donc $\beta \wedge \beta \neq 0$; dans ce cas $f^*\beta \wedge \beta = \zeta^2 \beta \wedge \beta$ implique $|\zeta| \le \sqrt{\lambda_2(f)}$. $\square$

En appliquant l'analyse précédente à f^{-1}, lorsque f est inversible, on obtient que f vérifie la condition **Spec(f,k-1)** si $\lambda_{k-2}(f) < \lambda_{k-1}(f)^2$. Cela règle le cas des automorphismes des variétés de dimension trois :

Proposition 5.5 *Tout automorphisme f cohomologiquement hyperbolique d'une variété de dimension 3 vérifie la condition* **Spec(f,l)**, *l tel que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$.*

Nous pensons qu'un résultat similaire a lieu lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X \ge 4$. Notons qu'il se peut que f ne vérifie pas la condition **Spec(f,j)**, $j \le l-1$, mais c'est bien la condition **Spec(f,l)** qui importe.

Exemple 5.6 *Soit $X = \mathbb{C}^k/\Lambda$ un tore complexe compact de dimension $k \ge 1$. Soit $f = f_A : X \to X$ un endomorphisme induit par $z \in \mathbb{C}^k \mapsto A \cdot z \in \mathbb{C}^k$, où $A \in GL(k, \mathbb{C})$ préserve le réseau Λ.*

On note $\{a_1, \dots, a_k\} = Spec(A)$ les valeurs propres de la matrice A rangées par ordre décroissant, $|a_1| \ge \dots \ge |a_k|$. L'endomorphisme f est cohomologiquement hyperbolique si et seulement si aucune valeur propre a_i n'est de module 1 (voir Exemple 2.18). Soit $l \in [1, k]$ tel que $|a_l| > 1 > |a_{l+1}|$ (avec la convention $a_{k+1} = 0$). Alors

$$\lambda_j(f) = \prod_{i=1}^{j} |a_i|^2, \text{ donc } \lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f).$$

L'endomorphisme f vérifie la condition **Spec(f,l)** *: soit (η_i) une base de 1-formes holomorphes sur X trigonalisant l'action de f^* sur $H^{1,0}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^k$,*

$$f^*\eta_i = a_i \eta_i + \varepsilon_i \eta_{i-1},\ \varepsilon_i \in \{0, 1\},\ 1 \le i \le k.$$

Alors $\lambda_l(f)$ est une valeur propre simple de $f^* : H^{l,l}(X, \mathbb{C}) \to H^{l,l}(X, \mathbb{C})$ associée au vecteur propre $\eta_1 \wedge \overline{\eta_1} \wedge \dots \wedge \eta_l \wedge \overline{\eta_l}$, et toute autre valeur propre est de module strictement plus petit.

Notons que l'endomorphisme f ne vérifie pas nécessairement la condition Spec(f,j), $j \le l-1$: on peut avoir par exemple $|a_1| = |a_2| > 1$.

Supposons à présent que f vérifie la condition **Spec(f,l)**, l tel que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$. Comme f^* préserve le cône $H^{l,l}_{psef}(X, \mathbb{C})$, on en déduit l'existence d'une classe $\alpha^+ \in H^{l,l}_{psef}(X, \mathbb{C})$ – unique à constante multiplicative près – telle que $f^*\alpha^+ = \lambda_l(f)\alpha^+$. Par dualité de Serre, on a un résultat analogue pour l'action duale $f_* : H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{C}) \to H^{k-l,k-l}(X, \mathbb{C})$. On normalise alors le choix des classes invariantes $\alpha^+ \in H^{l,l}_{psef}(X,\mathbb{C})$, $\alpha^- \in H^{k-l,k-l}_{nef}(X,\mathbb{C})$ et d'une classe de Kähler $\{\omega\} \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ en imposant

$$\alpha^+ \cdot \alpha^- = \alpha^+ \cdot \{\omega^{k-l}\} = \alpha^- \cdot \{\omega^l\} = 1.$$

Le point important ici est que la canonicité de α^+, α^- assure que le produit $\alpha^+ \cdot \alpha^-$ est strictement positif : il suffit de vérifier que $\lambda^{-n}(f^n)^*\{\omega^l\}$ converge vers un multiple strictement positif de α^+.

Une autre conséquence intéressante de la condition **Spec(f,l)** est liée à l'extrémalité des courants invariants que nous construisons un peu plus loin.

Proposition 5.7 *Si f vérifie la condition* **Spec(f,l)***, alors α^+ est une classe extrémale dans le cône $H^{l,l}_{psef}(X,\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $\eta \in H^{l,l}_{psef}(X,\mathbb{R})$ une classe pseudoeffective telle que $0 \leq \eta \leq \alpha^+$. Nous devons montrer que η est proportionnelle à α^+. Une telle classe se décompose en $\eta = c\alpha^+ + \sum_{i=1}^s \tau_i$, où $0 \leq c \leq 1$ et les classes τ_i appartiennent aux sous-espaces caractéristiques de $f^* : H^{l,l}(X,\mathbb{C}) \to H^{l,l}(X,\mathbb{C})$ associés à la valeur propre ζ_i, $|\zeta_i| < \lambda_l(f)$. Comme $f_*f^*\tau = \lambda_k(f)\tau$, il vient

$$||(f^n)^*\tau_i|| \simeq n^{m_i}\zeta_i^n||\tau_i|| \text{ et } ||(f^n)_*\tau_i|| \simeq n^{m_i}\left(\frac{\lambda_k(f)}{\zeta_i}\right)^n ||\tau_i||.$$

Or la suite de classes pseudoeffectives $\lambda^n\lambda_k^{-n}(f^n)_*\eta$ est dominée par α^+, c'est donc que $\tau_i = 0$ pour tout i. □

5.2.2 La mesure canonique

Nous construisons ici une mesure canonique invariante lorsque $f : X \to X$ est un automorphisme cohomologiquement hyperbolique qui vérifie la condition **Spec(f,l)**, l tel que $\lambda_l(f) > \max_{j\neq l}\lambda_j(f)$ (par exemple lorsque $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$). On fixe dans la suite $\alpha^+ \in H^{l,l}_{nef}(X,\mathbb{R})$, $\alpha^- \in H^{k-l,k-l}_{nef}(X,\mathbb{R})$ et ω une forme de Kähler telles que

$$(f^{\pm})^*\alpha^{\pm} = \lambda\alpha^{\pm} \text{ et } \alpha^+ \cdot \{\omega^{k-l}\} = \alpha^- \cdot \{\omega^l\} = \alpha^+ \cdot \alpha^- = 1.$$

Construction des courants invariants. Soit θ^+ une forme lisse fermée de bidegré (l,l) qui représente α^+. Soit R^+ une forme lisse de bidegré $(l-1,l-1)$ telle que $\lambda^{-1}f^*\theta^+ = \theta^+ + dd^cR^+$. Quitte à changer R^+ en $R^+ + C\omega^{l-1}$, on peut supposer que $0 \leq R^+ \leq C\omega^{l-1}$. La positivité des formes et des courants peut être ici interprétée au sens faible ou fort, cela n'a pas d'importance (voir [De] pour les définitions et propriétés de base des courants positifs). On itère alors cette équation fonctionnelle en prenant son image inverse par f^n, ce qui donne

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta^+ = \theta^+ + dd^cR_n^+, \;\; R_n^+ := \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^j}(f^j)^*R^+.$$

La suite $(R_n)^+$ est une suite croissante de formes différentielles positives qui converge au sens des courants car sa masse est uniformément majorée :

$$||R_n^+|| := \int_X R_n^+ \wedge \omega^{k-l+1} \leq C \sum_{j\geq 0} \frac{1}{\lambda^j} \delta_{l-1}(f^j, \omega) < +\infty,$$

car $\lambda = \lambda_l(f) > \lambda_{l-1}(f)$. On en déduit que la suite $\lambda^{-n}(f^n)^*\theta^+$ converge au sens des courants vers un courant fermé de bidegré (l, l),

$$T_l^+ := \theta^+ + dd^c R_\infty^+, \text{ avec } R_\infty^+ = \sum_{j\geq 0} \lambda^{-j}(f^j)^* R^+ \geq 0.$$

Notons que le courant T_l^+ est *invariant*, $f^*T_l^+ = \lambda T_l^+$, et *positif* car limite de la suite de formes positives $\lambda^{-n}(f^n)^*\omega^l$, comme on le vérifie en décomposant $\{\omega^l\}$ dans une base qui trigonalise l'action de f^* sur $H^{l,l}(X, \mathbb{C})$: on utilise ici de façon décisive la condition **Spec(f,l)**. Plus généralement, si Θ est une (l, l)-forme lisse fermée, alors

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\Theta \longrightarrow cT_l^+ \text{ avec } c = \{\Theta\} \cdot \alpha^-.$$

On construit de même un courant positif fermé T_{k-l}^- de bidegré $(k - l, k - l)$ tel que $f_*T_{k-l}^- = \lambda T_{k-l}^-$,

$$T_{k-l}^- = \theta^- + dd^c R_\infty^-, \quad R_\infty^- := \sum_{j\geq 0} \frac{1}{\lambda^j}(f^{-j})^* R^- \geq 0,$$

où θ^- est une $(k - l, k - l)$-forme lisse fermée représentant α^- et $R^- \geq 0$ est une $(k - l - 1, k - l - 1)$-forme lisse telle que $\lambda^{-1}(f^{-1})^*\theta^- = \theta^- + dd^c R^-$: on utilise ici l'hypothèse $\lambda = \lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$. Rappelons que $\lambda = \lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques si et seulement si $\lambda_l(f) > \max[\lambda_{l-1}(f), \lambda_{l+1}(f)]$. Cela résulte des inégalités de concavité 2.4.a.

L'existence de potentiels positifs $R_\infty^\pm \geq 0$ assure, comme dans le Théorème 3.1, de bonnes propriétés d'intégrabilité des courants T_l^+, T_{k-l}^- :

Lemme 5.8 *Soit T un courant positif fermé de bidegré (p, p) sur X qui admet la décomposition $T = \theta + dd^c R$, où θ est une (p, p)-forme lisse et R est un $(p-1, p-1)$-courant* **positif**. *Alors toute fonction quasiplurisousharmonique est intégrable par rapport à la mesure trace $T \wedge \omega^{k-p}$.*

Preuve. C'est l'observation déja faite au Théorème 3.1.1 : soit φ une fonction qpsh sur X ; quitte à translater et dilater φ, on peut supposer que $\varphi \leq 0$ et $dd^c\varphi \geq -\omega$. Une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_X (-\varphi) T \wedge \omega^{k-p} &= \int_X (-\varphi)\theta \wedge \omega^{k-p} + \int_X R \wedge (-dd^c\varphi) \wedge \omega^{k-p} \\ &\leq \int_X (-\varphi)\theta \wedge \omega^{k-p} + \int_X R \wedge \omega^{k-p+1} < +\infty, \end{aligned}$$

car les fonctions qpsh sont intégrables par rapport aux mesures lisses. □

Voici une conséquence importante de la condition **Spec(f,l)** :

Théorème 5.9 *Le courant T_l^+ (resp. T_{k-l}^-) est un point extrémal du cône convexe des courants positifs fermés de bidegré (l,l) (resp. $(k-l,k-l)$).*

La preuve est dans le même esprit que celle du Théorème 4.18. Il faut commencer par s'assurer que tout courant positif fermé dominé par T_l^+ est cohomologue à un multiple de α^+ (c'est le contenu de la Proposition 5.7), puis mettre en place un résultat de convergence uniforme des images inverses (resp. directes) normalisées. Ce dernier point est plus délicat lorsque $l \geq 2$, car les potentiels des courants de bidegré (l,l) ne sont pas uniques. Nous renvoyons le lecteur au Théorème 4.1 de [DS 6] pour une preuve (voir également [G 6], [DS 7] pour un contexte proche).

Construction de μ_f. Nous définissons à présent la mesure invariante canonique $\mu_f = T_l^+ \wedge T_{k-l}^-$: il est possible de donner un sens à ce produit d'intersection car les courants T_l^+, T_{k-l}^- sont très bien approximés par les formes lisses $\lambda^{-n}(f^{\pm n})^*\theta^{\pm}$.

Proposition 5.10 *Les suites de mesures*

$$\lambda^{-n}(f^n)^*\theta^+ \wedge T_{k-l}^-,\ T_l^+ \wedge \lambda^{-n}(f^{-n})^*\theta^- \quad et \quad \lambda^{-2n}(f^n)^*\omega^l \wedge (f^{-n})^*\omega^{k-l}$$

convergent toutes vers une même mesure de probabilité μ_f.

Preuve. Posons $\theta_n^{\pm} = \lambda^{-n}(f^{\pm n})^*\theta^{\pm}$, $\mu_n = \theta_n^+ \wedge T_{k-l}^-$ et $\nu_n = \theta_n^+ \wedge \theta_n^-$. Observons que $\mu_n = \theta^+ \wedge T_{k-l}^- + dd^c(R_n^+ \wedge T_{k-l}^-)$. Or $R_n \wedge T_{k-l}^-$ est une suite croissante de courants positifs dont la masse est uniformément bornée,

$$||R_n^+ \wedge T_{k-l}^-|| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^j} \int_X (f^j)^*\omega^{l-1} \wedge T_{k-l}^- \wedge \omega \leq C' \sum_{j \geq 0} \frac{\delta_{l-1}(f^j, \omega)}{\lambda^j} < +\infty.$$

On en déduit que μ_n converge vers une mesure μ_f telle que

$$\mu_f = \theta^+ \wedge T_{k-l}^- + dd^c(S), \text{ avec } S := \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\lambda^j}(f^j)^* R_+ \wedge T_{k-l}^- \geq 0.$$

Observons que $\mu_n - \nu_n = dd^c(\theta_n^+ \wedge \sum_{j \geq n} \lambda^{-j}(f^j)_* R^-)$, or

$$||\theta_n^+ \wedge \sum_{j \geq n} \lambda^{-j}(f^j)_* R^-)|| \leq C' \sum_{j \geq n} \frac{\delta_{l+1}(f^j, \omega)}{\lambda^j} \longrightarrow 0,$$

donc les suites ν_n et μ_n ont la même limite. Les autres suites se traitent de façon similaire. En particulier la mesure limite μ_f est une mesure de probabilité, car limite des mesures positives lisses $\lambda^{-2n}(f^n)^*\omega^l \wedge (f^{-n})^*\omega^{k-l}$ dont la masse tend vers 1. □

Théorème 5.11 *La mesure μ_f est une mesure invariante mélangeante qui intègre les fonctions qpsh. Elle est d'entropie maximale si X est projective,*

$$h_{top}(f) = h_{\mu_f}(f) = \log \lambda_l(f).$$

Preuve. Observons que $f_*\mu_n = \mu_{n+1}$, donc la mesure μ_f est invariante. Elle se décompose en

$$\mu_f = \theta^+ \wedge \theta^- + dd^c([C\omega^l + \theta^+] \wedge R_\infty^- + S) - C\omega^l \wedge T_{k-l}^- + C\omega^l \wedge \theta^-,$$

où S est un courant positif et $C \geq 0$ est choisie de sorte que la forme $C\omega^l + \theta^+$ soit positive. Il résulte alors d'une double application du Lemme 5.8 que les mesures $\theta^+ \wedge T_{k-l}^-$ et $[C\omega^l + \theta^+] \wedge \theta^- + dd^c([C\omega^l\theta^+] \wedge R_\infty^- + S)$ intègrent les fonctions qpsh. Il en est donc de même de μ_f.

Le mélange, comme dans le Théorème 4.23, est une conséquence de l'extrémalité des courants T_l^+, T_{k-l}^- (Théorème 5.9).

L'entropie de μ_f est majorée par $h_{top}(f) = \log \lambda_l(f)$ d'après le principe variationnel et le Théorème 2.8. La minoration s'appuie sur les travaux de Y.Yomdin (voir [Sm], [BS 2] pour une utilisation de ces travaux dans le contexte des applications de Hénon complexes, et le Théorème 3.2 de [G 6] pour la dimension supérieure). $\square$

Bilan. Soit $f : X \to X$ un automorphisme cohomologiquement hyperbolique sur une variété projective de dimension trois. Quitte à changer f en f^{-1}, nous pouvons supposer que $\lambda := \lambda_1(f)$ est le degré dynamique dominant. Alors f vérifie la condition **Spec(f,1)** (Proposition 5.4), donc la demi-droite canonique $\mathbb{R}^+\alpha^+$ est extrémale (Proposition 5.7). On sait donc construire des courants invariants canoniques T_1^+, T_2^- extrémaux (Théorème 5.9), et une mesure de probabilité invariante canonique qui est mélangeante et d'entropie maximale (Théorème 5.11). Il reste à estimer ses exposants de Lyapunov (indiquons le tout récent travail [DeT 5] qui donne cette estimation lorsque l'on sait calculer l'entropie métrique) et préciser la nature des points selles de f. Cela passe vraisemblablement par une meilleure compréhension de la nature géométrique des courants T_1^+, T_2^- dans l'esprit de ce qui a été exposé en dimension deux (voir paragraphe 4.3.3). Les travaux récents de T.C.Dinh [Di 1] et H.deThelin [DeT 4] vont dans ce sens. Notons enfin que le lemme 4.28 de R.Dujardin est valable en toute dimension.

5.2.3 L'approche de Dinh-Sibony

Soit $f : X \to X$ un automorphisme cohomologiquement hyperbolique d'une variété kählérienne compacte. Nous supposons pour simplifier l'exposition que X est de dimension trois. Quitte à changer f en f^{-1}, on peut donc supposer que

$$\lambda := \lambda_1(f^{-1}) = \lambda_2(f) > \lambda_1(f) > 1.$$

Il résulte de la Proposition 5.4 que λ est une valeur propre distinguée de l'opérateur $f_* : H^{1,1}(X,\mathbb{C}) \to H^{1,1}(X,\mathbb{C})$. Nous avons construit précédemment des courants invariants canoniques T_1^- et T_2^+ de bidegrés respectifs $(1,1),(2,2)$, et montré que la mesure $\mu_f := T_1^- \wedge T_2^+$ est dynamiquement intéressante.

Nous indiquons à présent quelques éléments de l'approche de T.C.Dinh et N.Sibony [DS 6] qui permet de montrer que μ_f ne charge pas les ensembles de petite dimension de Hausdorff. Précisons que cette approche fonctionne en toute dimension.

L'idée de la méthode est de construire par récurrence sur p, des courants positifs fermés invariants $\hat{T} = T \wedge S_T$ de bidegré $(p+1,p+1)$, en partant d'un courant positif fermé invariant T de bidegré (p,p). A chaque étape, le courant S_T est invariant, de bidegré $(1,1)$, fermé, à potentiels höldériens, et tel que $T \wedge S_T$ est positif. Le point de départ $(p=1)$ est le courant T_1^-, celui d'arrivée $(p=k-1)$ est la mesure μ_f.

Il s'agit donc de faire de l'analyse sur un courant positif fermé invariant T. Cela nécessite de contrôler l'action des opérateurs f^*, f_* sur les espaces de cohomologie de tels courants : on introduit

$$N^{1,1}(T,\mathbb{R}) := \left\{ \alpha \in H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \,/\, \alpha \wedge \{T\} = 0 \text{ dans } H^{p+1,p+1}(X,\mathbb{R}) \right\}.$$

On introduit également $N_\nu^{1,1}(T,\mathbb{R})$ le sous-espace constitué des classes $\alpha = \{S\}$ qui peuvent être représentées par un courant (non nécessairement positif) ayant un potentiel ν-höldérien. On considère alors les espaces

$$H^{1,1}(T,\mathbb{R}) := H^{1,1}(X,\mathbb{R})/N^{1,1}(T,\mathbb{R}) \text{ et } H_\nu^{1,1}(T,\mathbb{R}) := H^{1,1}(X,\mathbb{R})/N_\nu^{1,1}(T,\mathbb{R}).$$

Lorsque T est invariant, $f^*T = \lambda_T T$, $\lambda_T > 0$, l'opérateur f^* préserve $N^{1,1}(T,\mathbb{R})$ et $N_\nu^{1,1}(T,\mathbb{R})$ et induit donc un opérateur sur les espaces $H^{1,1}(T,\mathbb{R})$, $H_\nu^{1,1}(T,\mathbb{R})$.

Définition 5.12 *Soit T un courant positif fermé de bidegré (p,p) qui est f-invariant, $f^*T = \lambda_T T$, $\lambda_T > 0$. Soit l un entier tel que $0 \leq l+p \leq k$.*

Le $l^{\text{ième}}$ degré dynamique de T est

$$\lambda_l(f,T) := \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_X T \wedge (f^n)^*\omega^l \wedge \omega^{k-p-l} \right]^{1/n}.$$

Observons que $\lambda_l(f,T) = \lambda_l(f)$ lorsque T est de bidegré $(0,0)$. En général on a seulement une inégalité : on montre comme au Théorème 2.4 que

1. $\lambda_l(f,T) \leq \lambda_1(f)$;
2. $\lambda_l(f,T) \leq \lambda_1(f,T)^l$;
3. $\lambda_{k-p}(f,T) = \lambda_T^{-1}$.

Lorsque $T = T_1^-$, $p = 1$ et $k = 3$, il vient $\lambda_T = \lambda_1(f^{-1})^{-1}$ et on obtient

$$\lambda_1(f,T)^2 \geq \lambda_2(f,T) = \lambda_T^{-1} = \lambda_1(f^{-1}) > 1,$$

donc $\lambda_1(f,T_1^-) > 1$: c'est la condition qui va permettre (cf Théorème 5.13) de construire un courant $S_{T_1^-}$ courant de bidegré $(1,1)$ à potentiels höldériens, tel que

$$T' := T_1^- \wedge S_{T_1^-} \geq 0 \text{ et } T_1^- \wedge f^* S_{T_1^-} = \lambda_1(f,T_1^-) T_1^- \wedge S_{T_1^-}.$$

Autrement dit, le courant $S_{T_1^-}$ est positif et f-invariant uniquement par "restriction" au courant T_1^-. Observons que T' est un courant positif fermé invariant de bidegré $(2,2)$, avec

$$\lambda_{T'} = \frac{\lambda_1(f,T_1^-)}{\lambda_1(f^{-1})} \leq \frac{\lambda_1(f)}{\lambda_1(f^{-1})} < 1,$$

car f est cohomologiquement hyperbolique. On en déduit

$$\lambda_1(f,T') = \lambda_{T'}^{-1} > 1.$$

Une nouvelle application du Théorème 5.13 permet alors d'obtenir la mesure de probabilité invariante

$$\mu_f := T' \wedge S_{T'} = T_1^- \wedge S_{T_1^-} \wedge S_{T'} \geq 0.$$

Celle-ci ne charge pas les ensembles de petite dimension de Hausdorff, car chacun des courants $T_1^-, S_{T_1^-}, S_{T'}$ est à potentiels höldériens (voir corollaire 1.4). La canonicité des constructions permet de montrer qu'il s'agit bien de la mesure construite en 5.2.2.

Il reste à établir l'existence des courants S_T, ce que nous faisons à présent. On fixe ω une forme de Kähler sur X.

Théorème 5.13 *Soit T un courant positif fermé de bidegré (p,p) sur X, $1 \leq p \leq k-1$, qui est invariant, $f^*T = \lambda_T T$ avec $\lambda_T > 0$.*

Si $\lambda_1(f,T) > 1$ alors il existe un entier $l_T \in \mathbb{N}$ et un courant fermé S_T de bidegré $(1,1)$ à potentiels höldériens tels que

$$T \wedge \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{l_T} \lambda_1(f,T)^j} (f^j)^* \omega \right) \longrightarrow \hat{T} := T \wedge S_T,$$

où $\hat{T}$ est un courant positif fermé non nul de bidegré $(p+1,p+1)$. Le courant S_T est invariant sur T, au sens où

$$T \wedge f^* S_T = T \wedge \lambda_1(f,T) S_T.$$

Notons que le courant S_T n'est pas nécessairement positif, mais que $\hat{T} = T \wedge S_T$ l'est. Le produit d'intersection est bien défini car S est à potentiels ν-Hölder, donc bornés [BT]. L'exposant $\nu > 0$ est, comme dans la Proposition 1.2, contrôlé par le rapport $\log \lambda_1(f,T)/\chi_{top}(f)$. Observons enfin que le courant $\hat{T}$ est lui aussi invariant,

$$f^*\hat{T} = \lambda_T \lambda_1(f,T)\hat{T}.$$

Lorsque $p = k-1$, $\hat{T}$ est donc une mesure invariante car $\lambda_1(f,T) = \lambda_{k-p}(f,T) = \lambda_T^{-1}$ (égalité 3. de la page précédente).

Esquisse de preuve. Soit l le plus grand entier tel que les classes $\{\omega\}, f^*\{\omega\}, \ldots, (f^l)^*\{\omega\}$ soient linéairement indépendantes dans $H^{1,1}_\nu(T,\mathbb{R})$. On note E le sous-espace engendré par ces classes : il est stable sous l'action de l'opérateur f^*, et le rayon spectral de $f^* : E \to E$ est égal à $\lambda_1(f,T)$. L'entier l_T de l'énoncé correspond à la non-diagonalisibilité de cette action (la norme de $(f^n)^*_{|E}$ croît comme $n^{l_T}\lambda_1(f,T)^n$). Nous supposons pour simplifier l'exposition que $l = 0$, donc $l_T = 0$ et $f^*\{\omega\} = \lambda_1(f,T)\omega$.

Il existe donc R un $(1,1)$-courant positif fermé à potentiels höldériens et $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne, tels que

$$\frac{1}{\lambda_1(f,T)} f^*\omega = \omega + dd^c u + R, \quad \text{avec} \quad T \wedge R = 0.$$

En appliquant l'opérateur $(f^{n-1})^*$ à cette equation fonctionnelle on obtient

$$\frac{1}{\lambda_1(f,T)^n}(f^n)^*\omega = \omega + dd^c u_n + R_n, \quad T \wedge R_n = 0, \quad \text{et} \quad u_n := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_1(f,T)^j} u \circ f^j.$$

On montre, comme dans la Proposition 1.2 que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction höldérienne u_∞, et on pose

$$S_T := \omega + dd^c u_\infty.$$

Observons que S_T n'est a priori ni positif, ni invariant (on n'a aucun contrôle sur les termes d'erreurs R_n), mais $\hat{T} := T \wedge S_T$ est positif, comme limite de courants positifs, et invariant (le terme d'erreur s'annulant sur T).

Lorsque $l_T \geq 1$, il est nécessaire de considérer des moyennes de Césaro. La construction de S_T procède de la même idée, mais les détails techniques sont plus délicats et nous renvoyons le lecteur à la Proposition 2.4 et au Théorème 3.1 de [DS 6] pour plus de détails. $\square$

5.3 Endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$

Nous considérons ici le cas des transformation rationnelles qui sont l-stables sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. Quitte à travailler dans $\mathbb{P}^{k+1}$, il suffit de considérer le cas d'endomorphismes qui sont polynomiaux dans une carte affine (voir paragraphe 5.1.2). Nous commençons par considérer le cas des automorphismes. Les techniques mises en jeu sont proches de celles esquissées précédemment, nous nous contentons donc d'énoncer les principaux résultats et donnons quelques exemples.

5.3.1 Automorphismes réguliers

N.Sibony a introduit dans [S] une classe d'exemples dynamiquement intéressants qui contient les automorphismes étudiés par E.Bedford et V.Pambuccian dans [BP].

Définition 5.14 *Soit $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ un automorphisme polynomial non affine. On dit que f est régulier lorsque l'extension méromorphe de f à $\mathbb{P}^k$ vérifie $I_f \cap I_{f^{-1}} = \emptyset$.*

Il s'agit d'une généralisation pluridimensionnelle des applications de Hénon complexes : celles-ci correspondent précisément aux automorphismes réguliers lorsque $k = 2$. On vérifie (voir [S]) que

- f induit une transformation l-stable de $\mathbb{P}^k$, avec $l = \dim_{\mathbb{C}} I_{f^{-1}} + 1$;
- $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$ si $1 \leq j \leq l$ et $\lambda_j(f) = \lambda_{k-1}(f)^{k-j}$ si $l \leq j \leq k$. En particulier le degré $\lambda_l(f) = \lambda_1(f)^l = \lambda_{k-1}(f)^{k-l}$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques ;
- il existe des courants invariants canoniques T_l^+, T_{k-l}^- qui admettent des potentiels suffisamment réguliers pour pouvoir définir leur intersection potentialiste $\mu_f = T_l^+ \wedge T_{k-l}^-$.

Exemple 5.15 *Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ défini par*

$$f(z_1, \ldots, z_k) = (P_{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1}) + a_k z_k, \ldots, P_1(z_1) + a_2 z_2, a_1 z_1),$$

où $a_j \in \mathbb{C}^*$ et les P_j sont des polynômes de degré $d \geq 2$ tels que $\deg_{z_j} P_j = d$. On vérifie que f est un automorphisme de $\mathbb{C}^k$. Son extension méromorphe à $\mathbb{P}^k$ – encore notée f – est telle que $I_f = (z_1 = \cdots = z_{k-1} = t = 0)$ est réduit à un point qui n'appartient pas à $I_{f^{-1}} = \{z_k = t = 0\}$. Ici $(t = 0)$ désigne l'hyperplan à l'infini. Ainsi f est régulier avec dans ce cas $l = k - 1$.

En intervertissant les rôles de f, f^{-1}, on obtient des exemples tels que $l = k - 1$. Pour fabriquer des exemples tels que $2 \leq l \leq k - 2$, lorsque $k \geq 4$, on peut utiliser l'observation suivante : soit $f_i : \mathbb{C}^{k_i} \to \mathbb{C}^{k_i}$, $i = 1, 2$, des automorphismes réguliers de $\mathbb{C}^{k_i}$ avec $\lambda_1(f_1) = \lambda_1(f_2)$. Posons $l_i = 1 + \dim_{\mathbb{C}} I_{f_i^{-1}}$. Alors le produit direct $f = f_1 \times f_2$ définit un automorphisme polynomial régulier de $\mathbb{C}^k$, $k = k_1 + k_2$, tel que $\dim_{\mathbb{C}} I_{f^{-1}} = l_1 + l_2 - 1$.

Théorème 5.16 *Soit $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ un automorphisme polynomial régulier. Alors la mesure $\mu_f := T_l^+ \wedge T_{k-l}^-$ est mélangeante et d'entropie maximale,*

$$h_{\mu_f}(f) = h_{top}(f) = \log \lambda_l(f) > 0.$$

Ce résultat est établi par l'auteur dans [G 6]. Le mélange découle comme pour le Théorème 4.23 de l'extrémalité des courants T_l^+, T_{k-l}^-. Notons que cette propriété d'extrémalité a été démontrée indépendamment par T.-C.Dinh et N.Sibony [DS 7].

Il est naturel de se demander si tous les automorphismes polynomiaux cohomologiquement hyperboliques sont -conjugués à- des automorphismes réguliers. C'est le cas en dimension 2 (voir [FrM]). Ce n'est plus vrai en dimension supérieure. On peut s'en rendre compte en analysant les automorphismes quadratiques de $\mathbb{C}^3$ qui ont été partiellement classifiés par J.-E.Fornaess et H.Wu [FW], [Mae] (voir Proposition 5.23 ci-après).

5.3.2 Automorphismes faiblement réguliers

Soit $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ un automorphisme polynomial. On note

$$X_f := \overline{f^k((t=0) \setminus I_{f^k})},$$

où $(t = 0)$ désigne l'hyperplan à l'infini, $\mathbb{P}^k = \mathbb{C}^k \cup (t = 0)$. La notion suivante est introduite dans [GS] :

Définition 5.17 *On dit que f est faiblement régulier si $I_f \cap X_f = \emptyset$.*

Tout automorphisme régulier est faiblement régulier car dans ce cas $X_f = I_{f^{-1}}$ (voir Proposition 2.5.3 dans [S]). Un produit direct d'automorphismes réguliers f_1, f_2 (resp. faiblement réguliers) est un automorphisme faiblement régulier (mais il n'est régulier que lorsque $\lambda_1(f_1) = \lambda_1(f_2)$).
On vérifie dans ce cas (voir section 2 dans [GS]) que

- f induit une transformation l-stable sur $\mathbb{P}^k$ avec $l = \dim_{\mathbb{C}} X_f + 1$;
- l'ensemble X_f est un attracteur ;
- il existe un courant invariant T_l^+ canonique tel que $f^*T_l^+ = \lambda_l(f)T_l^+$;
- $\dim_{\mathbb{C}} I_f = k - l - 2$, donc $\lambda_l(f) = \lambda_1(f)^l$ mais $\lambda_{l+1}(f) < \lambda_1(f)^{l+1}$.

Théorème 5.18 *Soit f un automorphisme polynomial faiblement régulier de $\mathbb{C}^k$ tel que $\lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$, $l = \dim_{\mathbb{C}} X_f + 1$. Alors il existe un courant positif fermé T_{k-l}^- de bidegré $(k-l, k-l)$, tel que $f_*T_{k-l}^- = \lambda T_{k-l}^-$ et*

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*\omega^{k-l} \longrightarrow T_{k-l}^-,$$

où ω désigne la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$.

Remarque 5.19 *Ce résultat, obtenu dans [GS] sous des hypothèses non-optimales, est démontré dans [G 6] dans le cas général.*

Notons que l'hypothèse $\lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$ entraîne, grâce aux inégalités de concavité 2.4.a, que $\lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques. Observons également que cette hypothèse est toujours satisfaite pour les automorphismes quadratiques de $\mathbb{C}^3$ (voir Proposition 5.23).

Comme X_f est un attracteur, le courant T^-_{k-l} admet de bons potentiels. Plus précisément, il résulte de sa construction qu'on peut l'écrire

$$T^-_{k-l} = \Theta + dd^c(\mathcal{T}^-_\infty),$$

où Θ est une forme lisse fermée de bidegré $(k-l, k-l)$ qui est cohomologue à ω^{k-l} , et $\mathcal{T}^-_\infty$ est un courant de bidegré $(k-l-1, k-l-1)$ qui peut être choisi *positif* hors d'un voisinage arbitrairement petit de l'attracteur X_f. C'est l'analogue de la construction faite au paragraphe 5.2.2 : la condition **Spec(f,l)** est ici trivialement vérifiée puisque $H^{l,l}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, mais le prix à payer de cette simplification cohomologique est la présence de points d'indétermination.

On peut montrer [G 6] que le courant T^-_{k-l} est extrémal et que la mesure $\mu_f := T^+_l \wedge T^-_{k-l}$ est bien définie (variante du Lemme 5.8). Le calcul de l'entropie de μ_f s'avère délicat en général. Lorsque I_f est f^{-1}-attirant, la mesure μ_f est à support compact dans $\mathbb{C}^k$, ce qui simplifie son étude. Nous obtenons ainsi [G 6] :

Théorème 5.20 *Soit $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ un automorphisme faiblement régulier. Supposons $\lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$ et que l'ensemble I_f est un attracteur pour f^{-1}.*

Alors la mesure $\mu_f = T^+_l \wedge T^-_{k-l}$ est une mesure de probabilité invariante qui ne charge pas les hypersurfaces. C'est une mesure mélangeante d'entropie maximale,

$$h_{\mu_f}(f) = h_{top}(f) = \log \lambda_l(f).$$

Nous renvoyons le lecteur aux Théorèmes 3.1 et 3.2 dans [G 6] pour une démonstration de ce résultat. Nous pensons qu'il n'est pas nécessaire de supposer que l'ensemble I_f est un attracteur.

Question 5.21 *Est-ce que les résultats du Théorème 5.20 subsistent lorsque I_f n'est pas un attracteur ?*

On vérifie (cf Théorème 4.1 de [CoG]) que l'ensemble I_f est *souvent*, mais pas toujours, f^{-1}-attirant pour les automorphismes polynomiaux quadratiques de $\mathbb{C}^3$ dont les degrés dynamiques sont deux à deux distincts, i.e. qui sont cohomologiquement hyperboliques.

5.3.3 Le cas des endomorphismes

La plupart des résultats précédents s'étendent au cas des endomorphismes polynomiaux non inversibles de $\mathbb{C}^k$ qui sont faiblement réguliers, moyennant une hypothèse technique sur l'ensemble critique (hypothèse (H4) dans [G 6]).

L'extrémalité de T^-_{k-l} est connue uniquement dans le cône des courants positifs invariants (Théorème 2.6 dans [G 6]) ; celle-ci entraîne l'ergodicité de la mesure μ_f (c'est l'analogue du Théorème 4.23), et on peut établir le mélange faible en considérant l'automorphisme produit $f \otimes f$.

Il est probable que T_{k-l}^- soit fortement extrémal. La difficulté à le prouver résulte de la mauvaise compréhension que nous avons des courants de bidegré $(k-l, k-l)$, lorsque $k-l>1$. Lorsque $k-l=1$ et $k=2$, le courant T_{k-l}^- est effectivement fortement extrémal comme il est montré dans [G 1], Théorème 5.2 : dans le cas de bidegré $(1,1)$, les potentiels des courants sont des fonctions (uniques à constante additive près), ce qui facilite énormément leur analyse dynamique.

Nous renvoyons le lecteur à [G 6] pour la formulation précise des résultats.

5.4 Exemples

5.4.1 Automorphismes cohomologiquement hyperboliques

Le tore complexe $X=(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i])^k$, $k\geq 2$, admet de nombreux automorphismes d'entropie positive, induits par une matrice $A\in GL(k,\mathbb{Z})$. Les automorphismes cohomologiquement hyperboliques sont ceux pour lesquels la matrice A n'a aucune valeur propre de module 1 (automorphismes d'Anosov). On vérifie aisément que $\lambda_l(f)>\max_{j\neq l}\lambda_j(f)$ est une valeur propre distinguée de l'opérateur $f^*: H^{l,l}(X,\mathbb{C})\to H^{l,l}(X,\mathbb{C})$ (condition **Spec(f,l)**) : la stratégie proposée pour construire μ_f fonctionne donc bien dans ce cas. Nous renvoyons le lecteur à l'Appendix de [GV] pour la classification des automorphismes d'entropie positive sur les tores complexes compacts de dimension deux.

B.Mazur donne dans [Maz] des exemples d'automorphisme d'entropie positive sur certaines surfaces $K3$. Sa construction fonctionne en toute dimension comme l'ont observé T.C.Dinh et N.Sibony [DS 6].

Exemple 5.22 *Soit $P(z^0,\dots,z^k)$ un polynôme multihomogène de multidegré $(2,\dots,2)$ en $z^0=(x_0,y_0),\dots,z^k=(x_k,y_k)$, i.e. tel que*

$$P(\lambda_0 z^0,\dots,\lambda_k z^k)=\lambda_0^2\cdots\lambda_k^2 P(z^0,\dots,z^k),\ \textit{pour tout}\ \lambda_0,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}^*.$$

Un tel polynôme définit une hypersurface X de dimension k et de multidegré $(2,\dots,2)$ dans l'espace $(\mathbb{P}^1)^{k+1}=\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1$. Cette hypersurface est une variété de Calabi-Yau lisse pour un choix générique de P. Considérons

$$\pi_i : X\subset(\mathbb{P}^1)^{k+1}\to(\mathbb{P}^1)^k$$

la projection parallèlement à la i^e coordonnée. C'est un revêtement holomorphe de degré 2 sur $(\mathbb{P}^1)^k$, qui permet de définir $\sigma_i : X\to X$ l'involution holomorphe qui échange les deux préimages de π_i. Soit enfin

$$f:=\sigma_0\circ\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_k : X\to X.$$

Alors f est un automorphisme cohomologiquement hyperbolique. On trouvera une preuve de ce fait dans [Ca 1], lorsque $k=2$.

Le lecteur trouvera d'autres exemples dans [BK 3], [Ca 1,4], [Ke], [M 3].

5.4.2 Automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$

Les automorphismes polynomiaux quadratiques de $\mathbb{C}^3$ ont été classifiés par J.E.Fornaess et H.Wu dans [FW] (voir également [Mae]). Cette classification a été précisée dans [CoG] :

Proposition 5.23 *Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un automorphisme polynomial quadratique cohomologiquement hyperbolique. Alors après conjugaison, et quitte à changer f en f^{-1} ou f^2, on obtient que*
- *f est 1-stable dans $\mathbb{P}^3$ et $\lambda_1(f) > \max_{j\neq 1} \lambda_j(f)$;*
- *f est soit régulier, soit faiblement régulier.*

Notons que pour un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^3$, on a $\lambda_3(f) = 1$ et $\lambda_2(f) = \lambda_1(f^{-1})$. Les automorphismes cohomologiquement hyperboliques sont donc ceux tels que $\lambda_1(f) \neq \lambda_1(f^{-1})$.

Nous renvoyons le lecteur au Théorème 4.1 de [CoG] pour une preuve ainsi qu'un énoncé plus précis. Ce résultat montre qu'il est nécessaire de considérer la notion plus générale d'automorphisme faiblement régulier et que les automorphismes quadratiques de $\mathbb{C}^3$ vérifient les hypothèses du Théorème 5.18. La plupart vérifient également l'hypothèse supplémentaire du Théorème 5.20, mais pas tous comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.24 *Considérons*

$$f(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (xy + az, x^2 + by, x) \in \mathbb{C}^3,$$

où $a, b \in \mathbb{C}^*$. C'est un automorphisme quadratique de $\mathbb{C}^3$ On vérifie aisément que l'inverse f^{-1} de f satisfait les hypothèses du Théorème 5.18 : f^{-1} est faiblement régulier avec $l = 1$, $\lambda_1(f^{-1}) = 3 > \lambda_2(f^{-1}) = \lambda_1(f) = 2$. Cependant $I_{f^{-1}}$ n'est pas toujours f-attirant. En effet la droite $(x = z = 0)$ est invariante,

$$f(0, y, 0) = (0, by, 0), \quad f^{-1}(0, y, 0) = (0, b^{-1}y, 0).$$

Elle rencontre l'hyperplan à l'infini en un point qui est à la fois d'indétermination pour f et pour f^{-1}. Il s'ensuit que $I_{f^{-1}}$ n'est pas f-attirant si $|b| \leq 1$. On vérifie aisément que $I_{f^{-1}}$ est f-attirant lorsque $|b| > 1$.

Le lecteur intéressé trouvera dans [BP], [S], [G 1,3,6], [GS], [CoG], [DS 2] d'autres exemples d'automorphismes et d'endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ qui sont cohomologiquement hyperboliques et satisfont les hypothèses supplémentaires des résultats énoncés plus haut.

Bibliographie

Ab N.ABARENKOVA & J-Ch.ANGLES d'AURIAC & S.BOUKRAA & J.-M.MAILLARD : Real topological entropy versus metric entropy for birational measure-preserving transformations. Phys. D **144** (2000), no. 3-4, 387–433.

ABT M.ABATE & F.BRACCI & F.TOVENA : Index theorems for holomorphic self-maps. Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 2, 819–864.

A E.AMERIK : On endomorphisms of projective bundles. Manuscripta Math. **111** (2003), no. 1, 17–28.

AC 1 E.AMERIK & F.CAMPANA : Exceptional points of an endomorphism of the projective plane. Math. Z. **249** (2005), no. 4, 741–754.

AC 2 E.AMERIK & F.CAMPANA : Fibrations méromorphes sur certaines variétés de classe canonique triviale. Prépublication arxiv/math.AG/0510299.

ARV E.AMERIK & M.ROVINSKY & A.Van de VEN : A boundedness theorem for morphisms between threefolds. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 2, 405–415.

BPV W.BARTH & C.PETERS & A.VAN de VEN : Compact complex surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 4. Springer-Verlag, Berlin (1984). x+304 pp. I

BaBe G.BASSANELLI & F.BERTELOOT : Bifurcation currents in holomorphic dynamics on $\mathbb{P}^k$. A paraître au Journal de Crelle.

Bea 1 A.BEAUVILLE : Complex algebraic surfaces. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. Second edition. London Mathematical Society Student Texts, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. x+132 pp.

Bea 2 A.BEAUVILLE : Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. Internat. Math. Res. Notices (2001) no. 1, 53–58.

B E.BEDFORD : On the dynamics of birational mappings of the plane. J.of Korean Math.Soc. **40** (2003), no3, 373-390.

BDi 1 E.BEDFORD & J.DILLER : Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane : the goldenmean subshift. Am.J.of Math. **127** (2005), 595-646.

BDi 2 E.BEDFORD & J.DILLER : Energy and Invariant Measures for Birational Surface Maps. Duke Math.J. **128** (2005), no 2, 331-368.

BDi 3 E.BEDFORD & J.DILLER : Dynamics of a two parameter family of plane birational maps : maximal entropy. Preprint arXiv math.DS/0505062.

BK 1 E.BEDFORD & K.KIM : Periodicities in Linear Fractional Recurrences. Preprint arXiv math.DS/0509645.

BK 2 E.BEDFORD & K.KIM : Degree growth of matrix inversion : birational maps of symmetric, cyclic matrices. Preprint arXiv math.DS/0512507.

BK 3 E.BEDFORD & K.KIM : Dynamics of rational surfaces automorphisms : linear fractional recurrences. Prépublication (2006).

BLS 1 E.BEDFORD & M.LYUBICH & J.SMILLIE : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. Invent. Math. **112** (1993), no. 1, 77–125.

BLS 2 E.BEDFORD & M.LYUBICH & J.SMILLIE : Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. Invent. Math. **114** (1993), 277-288

BP E.BEDFORD & V.PAMBUCCIAN : Dynamics of shift-like polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^N N$. Conform. Geom. Dyn. **2** (1998), 45–55

BS 1 E.BEDFORD & J.SMILLIE : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity. Invent. Math. **103** (1991), no. 1, 69–99.

BS 2 E.BEDFORD & J.SMILLIE : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. Math. Ann. **294** (1992), no. 3, 395–420.

BS 3 E.BEDFORD & J.SMILLIE : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. V. Critical points and Lyapunov exponents. J. Geom. Anal. **8** (1998), no. 3, 349–383.

BT E.BEDFORD & A.TAYLOR : A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math. **149** (1982), no. 1-2, 1–40.

BTR M.BERNARDO & T.T.TRUONG & G.ROLLET : The discrete Painlevé I equations : transcendental integrability and asymptotic solutions. J. Phys. A **34** (2001), no. 15, 3215–3252.

BeD F.BERTELOOT & C.DUPONT : Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green. Comment. Math. Helv. **80** (2005), 433-454.

BeL F.BERTELOOT & J.-J.LOEB : Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$. Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 2, 175–188.

BeM F.BERTELOOT & V.MAYER : Rudiments de dynamique holomorphe. Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France (2001), vi+160 pp.

BiDeM I.BINDER & L.DeMARCO : Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of $\mathbb{C}^n$. Int. Math. Res. Not. (2003), no. 11, 613–625.

BDM A.BONIFANT & M.DABIJA & J.MILNOR : Elliptic curves as attractors in $\mathbb{P}^2$. Preprint (2004).

BGS J.-B.BOST & H.GILLET & C.SOULÉ : Heights of projective varieties and positive Green forms. J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 4, 903–1027.

BFJ S.BOUCKSOM & C.FAVRE & M.JONSSON : Degree growth of meromorphic surface maps. preprint arXiv math.DS/0608267.

BoM S.BOUKRAA & J.-M.MAILLARD : Factorization properties of birational mappings. Physica A **220** (1995), 403-470.

Bo R.BOWEN : Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **153** 1971 401–414. Erratum, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 509–510.

Br J.-Y.BRIEND : La propriété de Bernoulli pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), no. 2, 323–327.

BCS J.-Y.BRIEND & S.CANTAT & M.SHISHIKURA : Linearity of the exceptional set for maps of $\mathbb{P}^k$. Math. Ann. **330** (2004), no. 1, 39–43.

BrD 1 J.-Y.BRIEND & J.DUVAL : Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{C}\mathrm{P}^k$. Acta Math. **182** (1999), no. 2, 143–157.

BrD 2 J.-Y.BRIEND & J.DUVAL : Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **93** (2001), 145–159.

BrKa M.BRIN & A.KATOK : On local entropy. Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), 30–38, Lecture Notes in Math., **1007**, Springer, Berlin, 1983.

Bro H.BROLIN : Invariant sets under iteration of rational functions. Ark. Mat. **6** (1965), 103–144.

Buf 1 X.BUFF : On the Bieberbach conjecture and holomorphic dynamics. Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 3, 755–759.

Buf 2 X.BUFF : La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ (d'après Briend et Duval). Séminaire Bourbaki, novembre 2004.

BuC X.BUFF & A.CHERITAT : Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **341** (2005), 669-674.

BuD R.BURTON & M.DENKER : On the central limit theorem for dynamical systems. Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), no. 2, 715–726.

Bu G.BUZZARD : Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 2, 389–417.

Buz J.BUZZI : The coding of non-uniformly expanding maps with application to endomorphisms of $\mathbb{P}^k$. Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 4, 1015–1024.

Ca 1 S.CANTAT : Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. Acta Math. **187** (2001), no. 1, 1–57.

Ca 2 S.CANTAT : Endomorphismes des variété homogènes. Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 237–262.

Ca 3 S.CANTAT : Exemples de Lattès et de Kummer. Prépublication 2005.

Ca 4 S.CANTAT : Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux.

CF S.CANTAT & C.FAVRE : Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. J. Reine Angew. Math. **561** (2003), 199–235.

CL S.CANTAT & S.LEBORGNE : Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires. I.M.R.N. **56** (2005), 3479-3510. .

CG L.CARLESON & T.GAMELIN : Complex dynamics. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993. x+175 pp.

Ci E.M.CIRKA : Complex analytic sets. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 46. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. xx+372 pp.

Co D.COMAN : On the dynamics of a class of quadratic polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$. Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), no. 1, 55–67.

CoG D.COMAN & V.GUEDJ : Invariant currents and dynamical Lelong numbers. J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 2, 199–213.

CFS I.P.CORNFELD & S.V.FOMIN & Ya.G.SINAI : Ergodic theory. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 245. Springer-Verlag, New York, 1982. x+486 pp.

Da D.DAIGLE : Birational endomorphisms of the affine plane. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 2, 329–358.

De J.-P.DEMAILLY : Complex analytic and differential geometry. Free accessible book (http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html).

DeM L.DeMARCO : Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity. Math. Ann. **326** (2003), no. 1, 43–73.

DPU M.DENKER & F.PRZYTYCKI & M.URBANSKI : On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere. Ergod.Th. & Dyn.Syst. **16** (1996), no 2, 255-266.

DeT 1 H.deTHELIN : Sur la laminarité de certains courants. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 2, 304–311.

DeT 2 H.deTHELIN : Un phénomène de concentration de genre. Math. Ann. **332** (2005), 483-498.

DeT 3 H.deTHELIN : Sur la construction de mesures selles. A paraître aux Ann. Inst. Fourier.

DeT 4 H.deTHELIN : Un critère de laminarité locale en dimension quelconque. Prépublication arxiv/math.CV/0512028.

DeT 5 H.deTHELIN : Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes. Prépublication arXiv math.DS/0609628.

Dil 1 J.DILLER : Dynamics of birational maps of P^2. Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), no. 3, 721–772.

Dil 2 J.DILLER : Birational maps, positive currents, and dynamics. Michigan Math. J. **46** (1999), no. 2, 361–375.

Dil 3 J.DILLER : Invariant measure and Lyapunov exponents for birational maps of $\mathbb{P}^2$. Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 4, 754–780.

DDG J.DILLER & R.DUJARDIN & V.GUEDJ : Dynamics of surfaces endomorphisms. Prépublication (2006).

DF J.DILLER & C.FAVRE : Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1135–1169.

DG J.DILLER & V.GUEDJ : Regularity of dynamical Green functions. Preprint arXiv math.CV/0601216.

DJS J.DILLER & D.JACKSON & A.SOMMESE : Invariant curves for birational surface maps. A paraître aux T.A.M.S..

Dina E.I.DINABURG : A correlation between topological entropy and metric entropy. Dokl. Akad. Nauk SSSR **190** 1970 19–22.

Di 1 T.C.DINH : Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires. J. Geom. Anal. **15** (2005), no. 2, 207–227.

Di 2 T.C.DINH : Decay of correlation for Hénon maps. Acta Math. **195** (2005), 253–264.

DiD T.C.DINH & C.DUPONT : Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes. J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 4, 613–627.

DS 1 T.C.DINH & N.SIBONY : Dynamique des applications d'allure polynomiale. J. Math. Pures Appl. (9) 82 (2003), no. 4, 367–423.

DS 2 T.C.DINH & N.SIBONY : Dynamique des applications polynomiales semi-régulières. Ark. Mat. **42** (2004), no. 1, 61–85.

DS 3 T.C.DINH & N.SIBONY : Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. Annals of Math. **161** (2005).

DS 4 T.C.DINH & N.SIBONY : Regularization of currents and entropy. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 6, 959–971.

DS 5 T.C.DINH & N.SIBONY : Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte. Duke Math. J. **123** (2004), no. 2, 311–328.

DS 6 T.C.DINH & N.SIBONY : Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds. J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 291–312.

DS 7 T.C.DINH & N.SIBONY : Dynamics of regular birational maps in $\mathbb{P}^k$. J. Funct. Anal. **222** (2005), no. 1, 202–216

DS 8 T.C.DINH & N.SIBONY : Value distribution of meromorphic transforms and applications. Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 221–258.

DS 9 T.C.DINH & N.SIBONY : Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps. Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), no. 5, 754–768.

DH A.DOUADY & J.H.HUBBARD : On the dynamics of polynomial-like mappings. Ann. Sci.E.N.S. (4) **18** (1985), no. 2, 287–343.

Du 1 R.DUJARDIN : Laminar currents in $\mathbb{P}^2$. Math. Ann. **325** (2003), no. 4, 745–765.

Du 2 R.DUJARDIN : Sur l'intersection des courants laminaires. Publ. Mat. **48** (2004), no. 1, 107–125.

Du 3 R.DUJARDIN : Hénon-like mappings in $\mathbb{C}^2$. Amer. J. Math. **126** (2004), no. 2, 439–472.

Du 4 R.DUJARDIN : Structure properties of laminar currents on $\mathbb{P}^2$. J. Geom. Anal. **15** (2005), no. 1, 25–47.

Du 5 R.DUJARDIN : Laminar currents and birational dynamics. Duke Math. J. **131**, no. 2 (2006), 219-247.

DuF R.DUJARDIN & C.FAVRE : Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. Prépublication arXiv math.DS/0601612.

Dup C.DUPONT : Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de $\mathbb{C}^n$. Manuscripta Math. **111** (2003), no. 3, 357–378.

Dup 2 C.DUPONT : Formule de Pesin et applications méromorphes, à paraître dans Bull. Braz. Math. Soc. (2005)

Fa 1 C.FAVRE : Points périodiques d'applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 4, 999–1023.

Fa 2 C.FAVRE : Multiplicity of holomorphic functions. Math. Ann. **316** (2000), no. 2, 355–378.

Fa 3 C.FAVRE : Les applications monomiales en deux dimensions. Michigan Math. J. **51** (2003), no. 3, 467–475.

FaG C.FAVRE & V.GUEDJ : Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs. Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 2, 881–934.

FaJ 1 C.FAVRE & M.JONSSON : Brolin's theorem for curves in two complex dimensions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), no. 5, 1461–1501.

FaJ 2 C.FAVRE & M.JONSSON : The valuative tree. Lecture Notes in Mathematics, **1853**. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+234 pp.

FaJ 3 C.FAVRE & M.JONSSON : Eigenvaluations. Preprint ArXiv math.DS/0410417.

FLM A.FREIRE & A.LOPEZ & R.MANE : An invariant measure for rational maps. Bol. Soc. Brasil. Mat. **14** (1983), no. 1, 45–62.

F J.-E.FORNAESS : Dynamics in several complex variables. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 87. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. viii+59 pp.

FS 1 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Complex Hénon mappings in $\mathbb{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains. Duke Math. J. **65** (1992), no. 2, 345–380.

FS 2 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Complex dynamics in higher dimension. I. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992). Astérisque No. 222 (1994), 5, 201–231.

FS 3 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Complex dynamics in higher dimensions. Notes partially written by Estela A. Gavosto. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 131–186, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

FS 4 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Complex dynamics in higher dimension. II. Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992), 135–182, Ann. of Math. Stud., 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

FS 5 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Dynamics of $\mathbb{P}^2$ (examples). Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998), 47–85, Contemp. Math., 269, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

FW J.-E.FORNAESS & H.WU : Classification of degree 2 polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$. Publ. Mat. **42** (1998), no. 1, 195–210.

Fr S.FRIEDLAND : Entropy of polynomial and rational maps. Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 2, 359–368

FrM S.FRIEDLAND & J.MILNOR : Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), no. 1, 67–99.

Fu Y.FUJIMOTO : Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38** (2002), no. 1, 33–92.

Ga E.GAVOSTO : Attracting basins in $\mathbb{P}^2$. J. Geom. Anal. **8** (1998), no. 3, 433–440.

Gh E.GHYS : Holomorphic Anosov systems. Invent. Math. **119** (1995), no. 3, 585–614.

GV E.GHYS & A.VERJOVSKY : Locally free holomorphic actions of the complex affine group. Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), 201–217, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.

GNR B.GRAMMATICOS & F.NIJHOFF & A.RAMANI : Dicrete Pailevé equations. The Painlevé property, 413–516, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999.

GH P.-A.GRIFFITHS & J.HARRIS : Principles of algebraic geometry. Wiley, New-York (1978).

Gr 1 M.GROMOV : On the entropy of holomorphic maps. Manuscrit (1977), publié dans L'Enseignement Mathématique **49** (2003), 217-235.

Gr 2 M.GROMOV : Convex sets and Kähler manifolds. Advances in differential geometry and topology, 1–38, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1990.

G 1 V.GUEDJ : Dynamics of polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$. Amer. J. Math. **124** (2002), no. 1, 75–106.

G 2 V.GUEDJ : Equidistribution towards the Green current. Bull. Soc. Math. France **131** (2003), no. 3, 359–372.

G 3 V.GUEDJ : Dynamics of quadratic polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$. Michigan Math. J. **52** (2004), no. 3, 627–648.

G 4 V.GUEDJ : Decay of volumes under iteration of meromorphic mappings. Ann.Inst.Fourier (Grenoble) **54** (2004), no7, 2369-2386.

G 5 V.GUEDJ : Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. Annals of Mathematics **161** (2005), no3.

G 6 V.GUEDJ : Courants extrémaux et dynamique complexe. Ann.Sc.ENS **38** (2005),407-426.

G 7 V.GUEDJ : Entropie topologique des applications méromorphes. Ergodic Th. & Dyn.Syst. **25** (2005), 1847-1855.

GS V.GUEDJ & N.SIBONY : Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^k$. Ark. Mat. **40** (2002), no. 2, 207–243.

GZ 1 V.GUEDJ & A.ZERIAHI : Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds. J.Geom.Anal. **15** (2005) no 4, 607-639.

GZ 2 V.GUEDJ & A.ZERIAHI : Monge-Ampère operators on compact Kähler manifolds. Prépublication, arXiv :math.CV/0504234.

HaPr B.HASSELBLATT & J.PROPP : Degree-growth of monomial maps. Prépublication arXiv math.DS/0604521.

HH D.HEICKLEN & C.HOFFMAN : Rational maps are d-adic Bernoulli. Ann. of Math. (2) 156 (2002), no. 1, 103–114.

He S.HEINEMANN : Julia sets for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{C}^n$. Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 6, 1275–1296.

Hu J.H.HUBBARD : The Hénon mapping in the complex domain. Chaotic dynamics and fractals (Atlanta, Ga., 1985), 101–111, Notes Rep. Math. Sci. Engrg., 2, Academic Press, Orlando, FL, 1986.

HOV 1 J.H.HUBBARD & R.W.OBERSTE-VORTH :Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. **79** (1994), 5–46.

HOV 2 J.H.HUBBARD & R.W.OBERSTE-VORTH : Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials. Real and complex dynamical systems (Hillerd, 1993), 89–132, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 464, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

HP 1 J.H.HUBBARD & P.PAPADOPOL : Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$. Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), no. 1, 321–365.

HP 2 J.H.HUBBARD & P.PAPADOPOL : Newton's method applied to two quadratic equations in $\mathbb{C}^2$ viewed as a global dynamical system. A paraître aux Memoirs of the A.M.S.

HPV J.H.HUBBARD & P.PAPADOPOL & V.VESELOV : A compactification of Hénon mappings in $\mathbb{C}^2$ as dynamical systems. Acta Math. **184** (2000), no. 2, 203–270.

IM V.A.ISKOVSKIKH & Yu.I.MANIN : Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. Mat. Sb. (N.S.) **86** (128) (1971), 140–166.

Ja D.JACKSON : Invariant curves for birational maps. PhD Thesis, Univ. of Notre Dame (2005).

J 1 M.JONSSON : Dynamics of polynomial skew products on $\mathbf{C}^2$. Math. Ann. **314** (1999), no. 3, 403–447.

J 2 M.JONSSON : Ergodic properties of fibered rational maps. Ark. Mat. **38** (2000), no. 2, 281–317.

KH A.KATOK & B.HASSELBLATT : Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii+802 pp.

Ke J.KEUM : Automorphisms of a generic Jacobian Kummer surface. Geom. Dedicata **76** (1999), no. 2, 177–181.

KO S.KOBAYASHI & T.OCHIAI : Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type. Invent. Math. 31 (1975), no. 1, 7–16.

La 1 S.LAMY : Une preuve géométrique du théorème de Jung. Enseign. Math. (2) **48** (2002), no. 3-4, 291–315.

La 2 S.LAMY : Sur la structure du groupe d'automorphismes de certaines surfaces affines. Publ. Mat. 49 (2005), no. 1, 3–20.

Laz R.LAZARSFELD : Positivity in algebraic geometry. I,II. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics 3rd Series, 48 & 49.

L F.LEDRAPPIER : Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles. C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **299** (1984), no. 1, 37–40.

Le 1 P.LELONG : Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France **85** (1957) 239–262.

Le 2 P.LELONG : Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés. Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1971-1972, pp. 112–131. Lecture Notes in Math., Vol. 332, Springer, Berlin, 1973.

Ly M.LYUBICH : Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), no. 3, 351–385.

Mae K.MAEGAWA : Classification of quadratic polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$ from a dynamical point of view. Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 2, 935–951.

Mn R.MAÑE : The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps. Dynamical systems, Valparaiso (1986), 86–117, Lecture Notes in Math., **1331**, Springer, Berlin, 1988.

Ma A.MANNING : The dimension of the maximal measure for a polynomial map. Annals of Math. **119** (1984), 425-430.

Maz B.MAZUR : The topology of rational points. Experiment. Math. **1** (1992), no. 1, 35–45.

M 1 C.McMULLEN : Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks. J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

M 2 C.McMULLEN : Algebra and Dynamics. Notes de cours, Harvard (mars 2004).

M 3 C.McMULLEN : Dynamics on blowups of the projective plane. Prépublication (2005).

Mi 1 J.MILNOR : Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1999). viii+257 pp.

Mi 2 J.MILNOR : On Lattès maps. Preprint arXiv math.DS/0402147.

MiP M.MISIUREWICZ & F.PRZYTYCKI : Topological entropy and degree of smooth mappings. Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 6, 573–574.

MNTU S.MOROSAWA & Y.NISHIMURA & M.TANIGUCHI & T.UEDA : Holomorphic dynamics. Translated from the 1995 Japanese original and revised by the authors. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 66. Cambridge University Press, Cambridge, (2000). xii+338 pp.

Na N.NAKAYAMA : Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. Kyushu J. Math. **56** (2002), no. 2, 433–446.

N S.NEWHOUSE : The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **50**, (1979), 101–151.

Pa PAN : Sur le degré dynamique des transformations de Cremona du plan qui stabilisent une courbe irrationnelle non-elliptique. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **341** (2005), no. 7, 439–443.

PS K.H.PARANJAPE & V.SRINIVAS : Self-maps of homogeneous spaces. Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 425–444.

Pe Y.PESIN : Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL (1997), xii+304 pp.

P F.PRZYTYCKI : Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map. Invent. Math. **80** (1985), no. 1, 161–179.

R D.RUELLE : An inequality for the entropy of differentiable maps. Bol. Soc. Brasil. Mat. **9** (1978), no. 1, 83–87.

RS A.RUSSAKOVSKII & B.SHIFFMAN : Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), no. 3, 897–932.

Sa C.SABOT : Spectral properties of self-similar lattices and iteration of rational maps. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. **92** (2003), vi+104 pp.

Se O.SESTER : Hyperbolicité des polynômes fibrés. Bull. Soc. Math. France **127** (1999), no. 3, 393–428.

Sh B.SHIFFMAN : Applications of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps. Value distribution theory (Proc. Tulane Univ. Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1972–1973), Part A, pp. 63–95, Dekker, New York, 1974.

Shi M.SHISHIKURA : The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 2, 225–267.

SY V.SHPILRAIN & J.-T.YU : Birational morphisms of the plane. Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 9, 2511–2515.

S N.SIBONY : Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. In Dynamique et géométrie complexes, Panorama et Synthèses (1999).

SW N.SIBONY & P.M.WONG : Some remarks on the Casorati-Weierstrass theorem. Ann. Polon. Math. **39** (1981), 165–174.

Sk H.SKODA : Prolongement des courants, positifs, fermés de masse finie. Invent. Math. **66** (1982), no. 3, 361–376.

Sm J.SMILLIE : The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. Ergodic Theory Dynam. Systems **10** (1990), no. 4, 823–827.

Su D.SULLIVAN : Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. Invent. Math. **36** (1976), 225–255.

U T.UEDA : Fatou sets in complex dynamics on projective spaces. J. Math. Soc. Japan **46** (1994), no. 3, 545–555.

Vi M.VIANA : Stochastic dynamics of deterministic systems, volume 21. IMPA (1997).

Vo D.VOLNY : On limit theorems and category for dynamical systems. Yokohama Math. J. **38** (1990), no. 1, 29–35.

W P.WALTERS : An introduction to ergodic theory. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ix+250 pp.

Y Y.YOMDIN : Volume growth and entropy. Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300.

Z A.ZDUNIK : Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. Invent. Math. **99** (1990), no. 3, 627–649.

Zi M.ZINSMEISTER : Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes. Panoramas et Synthèses, 4. Société Mathématique de France, Paris, 1996. vi+96 pp

Vincent Guedj
Laboratoire Emile Picard
UMR 5580, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 04 (FRANCE)
guedj@picard.ups-tlse.fr