# THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION POUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

**Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux,**
***États de la Recherche, mai 2006***

**Antoine Chambert-Loir**

*Antoine Chambert-Loir*
IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.
*E-mail :* antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr
*Url :* http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir

# TABLE DES MATIÈRES

# CHAPITRE 1

# HAUTEURS SUR L'ESPACE PROJECTIF

La méthode de « descente infinie » initiée par Pierre de FERMAT (1601–1665) dans l'étude des équations diophantiennes repose sur trois piliers :

– une notion de *taille* d'une solution d'une telle équation ;
– à partir d'une solution donnée, la construction d'une solution de taille moindre ;
– le fait que ces tailles — usuellement des nombres entiers — ne peuvent diminuer indéfiniment.

Cette méthode a permis à FERMAT d'établir des résultats négatifs, par exemple l'inexistence de triangles rectangles à côtés entiers dont l'aire soit un carré parfait, problème qui se ramène à « l'équation de Fermat » de degré 4. Elle intervient aussi dans la démonstration par Ernst KUMMER (1810–1893) du grand théorème de FERMAT pour les nombres premiers réguliers[(1)]. Plus remarquablement peut-être, elle a aussi permi de prouver des résultats positifs ; pensons par exemple à la démonstration (1747) de Leonhard EULER (1707–1783) que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés (un théorème annoncé par FERMAT lui-même en 1640).

Cette méthode a deux avatars modernes. Le premier, la *théorie des hauteurs*, auxquelles ce texte est consacré, est une version géométrisée de la notion de taille d'une solution d'une équation diophantienne. Elle fut développée à la fin des années 40 par André WEIL (1906–1998) et Douglas Goeffrey NORTHCOTT (1916–2005). C'est en effet l'un des deux ingrédients de la preuve du théorème de MORDELL–WEIL selon lequel les points rationnels d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres forment un groupe abélien de type fini (voir par exemple SERRE (1997)). NORTHCOTT utilisa ce concept de hauteur pour établir des propriétés arithmétiques de certains systèmes dynamiques ; nous y reviendrons amplement.

L'autre ingrédient de la démonstration du théorème de MORDELL–WEIL résulte du théorème de finitude de HERMITE–MINKOWSKI en théorie algébrique des nombres et

[(1)] Ce sont les nombres premiers $p$ qui ne divisent pas le numérateur d'un des nombres de Bernoulli $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$, ou plus conceptuellement, les nombres premiers $p$ tel que le groupe des classes d'idéaux du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ soit d'ordre premier à $p$.

d'un argument de cohomologie galoisienne. Son élaboration moderne, *variétés de descente*, lois de réciprocité et *principes local-global*, sort largement du cadre de cet article. Je renvoie au survol 1992 de J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE pour une première introduction.

Revenons aux hauteurs. Dans les applications modernes à l'arithmétique, il est souvent utile, voire crucial, d'assouplir le strict point de vue « équationnel » des classiques pour mieux exploiter les propriétés géométriques des objets étudiés. On est ainsi plutôt amené à définir la hauteur d'un point de l'espace projectif, voire d'une variété projective, et à étudier le comportement de cette hauteur par des morphismes de variétés algébriques. Il faudra étendre les définitions naïves que l'on peut adopter pour les nombres entiers au cas des nombres algébriques. Nous commençons cependant ce cours par le cas des points rationnels : il fait déjà apparaître les idées principales tout en évitant les complications dues à la théorie algébrique des nombres.

## §1.1. Hauteur d'un point rationnel

### 1.1/1. Définition

Soit donc $k$ un entier naturel et notons $\mathbf{P}^k$ l'espace projectif de dimension $k$. Voyons-le comme *schéma*, c'est-à-dire comme la donnée, pour tout anneau $A$, de l'ensemble $\mathbf{P}^k(A)$ de ses points à coordonnées dans $A$. De fait, nous n'aurons besoin pour l'instant que du cas où $A$ est un corps $F$ : alors, $\mathbf{P}^k(F)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles de l'espace $F^{k+1}$. Un élément $x \in \mathbf{P}^k(F)$ possède ainsi $k+1$ coordonnées $(x_0,\dots,x_k)$ non toutes nulles — celles d'un vecteur directeur quelconque de la droite correspondante — bien définies à un facteur multiplicatif non nul près. Si $(x_0,\dots,x_k)$ est un élément non nul de $F^{k+1}$, on notera $[x_0:\dots:x_k]$ le point correspondant de $\mathbf{P}^k(F)$ ; nous dirons que $(x_0,\dots,x_k)$ en sont des *coordonnées homogènes*.

Considérons dans ce numéro le cas du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Soit ainsi $x$ un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ — on parle de *point rationnel*. Parmi la multiplicité de ses coordonnées homogènes, on peut en choisir certaines plus particulièrement. Il est en effet loisible de multiplier les $x_i$ par un dénominateur commun ; ce sont alors des entiers relatifs. On les divise alors par leur plus grand diviseur commun, de sorte à obtenir une famille $(x_0,\dots,x_k)$ de coordonnées homogènes formée d'entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Observons alors que deux telles familles ne définissent le même point que si elles diffèrent l'une l'autre par multiplication par $\pm 1$.

Cela montre la correction de la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.1. — *Soit $x=[x_0:\dots:x_k]$ un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$, dont les coordonnées homogènes sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. On appelle hauteur exponentielle de $x$ le nombre entier $H(x)=\max(|x_0|,\dots,|x_k|)$. La hauteur logarithmique de $x$ est définie par la formule*

$$h(x)=\log H(x)=\log\max(|x_0|,\dots,|x_k|).$$

Les deux notions de hauteurs, exponentielle et logarithmique, ont leur intérêt suivant les contextes. Dans ce texte, nous appellerons tout simplement hauteur la hauteur logarithmique.

De la définition résulte immédiatement une propriété de *finitude*, facile mais fondamentale.

PROPOSITION 1.1.2. — *Pour tout nombre réel B, l'ensemble des points de* $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ *de hauteur au plus B est fini.*

*Démonstration.* — En effet, un tel point est déterminé par le choix de $k+1$ entiers relatifs $(x_0,\dots,x_k)$, non tous nuls, et vérifiant $|x_i| \leqslant \mathrm{e}^B$ pour tout $i$. Il n'y a qu'un nombre fini de telles familles d'entiers, d'où la proposition. □

Il est en fait possible, voir SCHANUEL (1979), d'établir le comportement asymptotique du nombre $N(B)$ de points de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus $B$ — il est commode ici de considérer la hauteur exponentielle. On trouve

$$\operatorname{card}\{x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})\,;\, H(x) \leqslant B\} \simeq \frac{2^k}{\zeta(k+1)} B^{k+1},$$

où $\zeta$ désigne la fonction zêta de RIEMANN. On doit à Yuri MANIN d'avoir entrevu comment cette asymptotique peut se généraliser à des variétés plus générales. L'exposant $k+1$ doit par exemple être interprété comme l'ordre du pôle de la forme différentielle $d(x_1/x_0)\wedge\cdots\wedge d(x_k/x_0)$ sur $\mathbf{P}^k$ le long de l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Je renvoie à PEYRE (2002) pour une introduction à ce thème.

### 1.1/2. Irrationalité des points prépériodiques

Venons-en maintenant au thème de ces *États de la recherche* et considérons un système dynamique polynomial sur $\mathbf{P}^k$, c'est-à-dire une application $f$ de $\mathbf{P}^k$ dans lui-même qui applique un point $x$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ sur le point $f(x)$ dont des coordonnées homogènes sont

$$[f_0(x_0,\dots,x_k) : f_1(x_0,\dots,x_k) : \cdots : f_k(x_0,\dots,x_k)],$$

où les $f_i$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ (pour le moment). Pour que la définition fasse sens et définisse un *endomorphisme de l'espace projectif*, il est nécessaire et suffisant que les polynômes $f_i$ soient *homogènes* de même degré, disons $d$, et qu'ils n'aient pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^k$. Par là, nous entendons sans zéro commun non seulement dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$, mais aussi dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, condition bien plus forte. Ils sont alors sans facteur commun. Nous dirons pour abréger que $f$ est un *endomorphisme de* $\mathbf{P}^k$ et que $d$ est son degré.

PROPOSITION 1.1.3 (Northcott). — *Soit* $f\colon \mathbf{P}^k \to \mathbf{P}^k$ *un endomorphisme de degré d de* $\mathbf{P}^k$. *Il existe alors un nombre réel c (ne dépendant que de f) tel que tout point* $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ *satisfasse les inégalités*

$$d\,h(x) - c \leqslant h(f(x)) \leqslant d\,h(x) + c.$$

*Démonstration.* — Il est loisible de multiplier les polynômes $f_i$ par un dénominateur commun de leurs coefficients ; ce sont alors des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Considérons l'énoncé suivant : pour tout polynôme $g \in \mathbf{Z}[X_0,\dots,X_k]$, supposé homogène de degré $d$, il existe un nombre réel $c(g)$ tel que l'on ait

$$\left|g(x_0,\dots,x_k)\right| \leqslant c(g)\max(|x_0|,\dots,|x_k|)^d. \tag{1.1.4}$$

Le cas d'un monôme est évident ; par récurrence sur le nombre de monômes de $g$, le cas général en résulte grâce à l'inégalité triangulaire.

Soit $x$ un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de coordonnées homogènes $[x_0:\dots:x_k]$, supposées entières et premières entre elles. Le point $f(x)$ a pour coordonnées homogènes la famille $[f_0(x):\dots:f_k(x)]$. Celles-ci sont entières mais pas forcément premières entre elles ; notons donc $\delta$ leur pgcd (supposé $\geqslant 1$). On a alors

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= \log\max\left(\left|f_0(x)/\delta\right|,\dots,\left|f_k(x)/\delta\right|\right) \\ &\leqslant \log\max(\left|f_0(x)\right|,\dots,\left|f_k(x)\right|) \\ &\leqslant \log\max(c(f_0),\dots,c(f_k)) + d\log\max(|x_0|,\dots,|x_k|) \\ &\leqslant c + dh(x), \end{aligned}$$

où $c = \log\max_i c(f_i)$.

L'autre inégalité est plus subtile. Comme les $f_i$ sont sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, leur seul zéro commun dans $\mathbf{C}^{k+1}$ est $(0,\dots,0)$. Un polynôme $g$ sur $\mathbf{C}^{k+1}$ qui s'annule là où les $f_i$ s'annulent simultanément n'est pas nécessairement une combinaison des $f_i$. Toutefois, le théorème des zéros de HILBERT entraîne que c'est le cas d'une puissance de $g$ :

THÉORÈME 1.1.5 (Théorème des zéros de Hilbert). — *Soit $F$ un corps algébriquement clos, soit $P_1,\dots,P_n$ des polynômes en $k$ variables à coefficients dans $F$. Soit $P \in F[X_1,\dots,X_k]$ un polynôme qui s'annule en tout point $x=(x_1,\dots,x_k)$ de $F^k$ tel que $P_1(x)=\dots=P_n(x)$. Il existe alors un entier $m \geqslant 1$ et des polynômes $Q_1,\dots,Q_n \in F_0[X_1,\dots,X_k]$ tels que $P^m = P_1Q_1+\dots+P_nQ_n$.*

*De plus, si les coefficients des polynômes $P$, $P_1,\dots,P_n$ appartiennent à un sous-corps $F_0$ de $F$, on peut choisir les polynômes $Q_i$ de sorte que leurs coefficients appartiennent à $F_0$.*

*Enfin, si les polynômes $P$ et $P_1,\dots,P_n$ sont homogènes, on peut choisir les polynômes $Q_i$ homogènes.*

*Démonstration.* — La première partie de l'énoncé est le théorème classique dont le lecteur trouvera une démonstration dans tout livre d'algèbre commutative élémentaire.

Les deux ajouts s'en déduisent en considérant une base de $F$ comme $F_0$-espace vectoriel et les composantes homogènes des polynômes $Q_i$. □

Appliquons ceci aux polynômes $X_j$, pour $0 \leqslant j \leqslant k$. Il existe donc un entier $t$ et des polynôme $g_{ij}$ à coefficients rationnels tels que $X_i^t = \sum_{i=0}^k f_i g_{ij}$. Quitte à ôter de $g_{ij}$ les termes de degrés autres que $t-d$, on peut supposer que chaque $g_{ij}$ est homogène de degré $t-d$. Soit $D$ un dénominateur commun des coefficients des polynômes $g_{ij}$. La relation

$$Dx_i^t = \sum_{i=0}^{k} f_i(x) D g_{ij}(x) \tag{1.1.6}$$

et l'inégalité (1.1.4) appliquée aux polynômes $Dg_{ij}$ entraîne une majoration de la forme

$$D|x_i|^t \leqslant c_1 \max(\left|f_0(x)\right|,\dots,\left|f_k(x)\right|)\max(|x_0|,\dots,|x_k|)^{t-d},$$

où $c_1$ est un nombre entier. De là en resulte l'inégalité

$$\max(|x_0|,\dots,|x_k|)^t \leqslant c_2 \max(\left|f_0(x)\right|,\dots,\left|f_k(x)\right|)\max(|x_0|,\dots,|x_k|)^{t-d}$$

puis

$$d\log\max(|x_0|,\dots,|x_k|) \leqslant c_3 + \log\max(\left|f_0(x)\right|,\dots,\left|f_k(x)\right|).$$

Comme les $x_i$ sont premiers entre eux, la relation (1.1.6) implique que le pgcd des $f_j(x)$ divise $D$. A fortiori, $\delta \leqslant D$ et

$$dh(x) \leqslant c_3 + \log D + \log\max(\left|f_0(x)/\delta\right|,\dots,\left|f_k(x)/\delta\right|) \leqslant c_4 + h(f(x)),$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

Après cette démonstration, insistons sur le fait que l'inégalité de gauche — la minoration de la hauteur de l'image de $x$ — a requis le théorème des zéros de HILBERT et donc l'hypothèse que les polynômes $f_i$ sont sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. La seule absence de zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ n'aurait pas une telle conséquence algébrique et ne permettrait pas d'établir la minoration voulue, voir par exemple l'exercice 2.3.1 du chapitre 2 pour un contre-exemple explicite.

On doit à NORTHCOTT NORTHCOTT (1950) d'avoir mis en évidence l'importante propriété de finitude énoncée dans la prop. 1.1.2, précisément en vue de la conséquence suivante.

Étant donné un système dynamique $f\colon X \to X$ d'un ensemble $X$, nous dirons qu'un point $x \in X$ est *périodique* pour $f$ s'il existe un entier $n$ tel que $f^n(x) = x$, où $f^n$ désigne le $n$-ième itéré $f \circ \cdots \circ f$ de $f$. Nous dirons qu'un point $x$ est *prépériodique* si l'un de ses itérés est périodique ; cela revient exactement à dire que l'orbite $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ de $x$ est un ensemble fini.

COROLLAIRE 1.1.7 (Northcott). — *Soit $f\colon \mathbf{P}^k \to \mathbf{P}^k$ un endomorphisme de degré $d$ à coefficients rationnels. Supposons $d \geqslant 2$. Il existe un nombre réel $m(f)$ tel que pour tout point $x$ de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ qui est prépériodique pour $f$, c'est-à-dire ceux dont l'ensemble des itérés soit un ensemble fini, on ait $h(x) \leqslant m(f)$. En particulier, il n'y a dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ qu'un nombre fini de points prépériodiques pour $f$.*

*Démonstration.* — Dire que $x$ est prépériodique signifie que l'ensemble $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ est fini, donc qu'il existe des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p(x)}$. Concernant les itérés de $f$, l'encadrement de la prop. 1.1.3 entraîne par récurrence l'inégalité

$$d^n h(x) - c\frac{d^n-1}{d-1} \leqslant h(f^n(x)) \leqslant d^n h(x) + c\frac{d^n-1}{d-1},$$

valable pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout point $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$. Posons $y = f^n(x)$. On a donc $f^p(y) = y$ et

$$h(x) \leqslant \frac{1}{d^n} h(y) + c\frac{1}{d-1} \leqslant h(y) + c\frac{1}{d-1}.$$

De même,

$$h(y) \leqslant \frac{1}{d^p} h(f^p(y)) + c\frac{1}{d-1} \leqslant \frac{1}{d} h(y) + c\frac{1}{d-1},$$

d'où

$$h(y) \leqslant c\frac{d}{(d-1)^2}.$$

Finalement, la hauteur de tout point prépériodique $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ vérifie

$$h(x) \leqslant c\frac{2d-1}{(d-1)^2},$$

ce qui démontre le corollaire. □

On pourra observer que la borne obtenue pour la hauteur d'un point prépériodique est assez explicite. Outre le degré $d$, elle fait intervenir les coefficients de l'endomorphisme $f$ via la constante $c$ de la proposition 1.1.3. Expliciter cette dernière constante est possible, mais subtil : s'il est évident d'expliciter la majoration fournie par cette proposition, la minoration repose sur l'utilisation du théorème des zéros de Hilbert dont les premières versions effectives n'ont été démontrées que dans la fin des années 1980 (voir TEISSIER (1990) pour un survol de ce problème).

### 1.1/3. Hauteur normalisée

Bien d'autres fonctions que la fonction $h$ introduite ici sont d'une utilité comparable pour l'arithmétique. Notons par exemple que le choix d'un autre système de coordonnées sur l'espace projectif (c'est-à-dire la composition avec une homographie) fournirait une autre fonction hauteur $h'$, certes telle que $h' - h$ est bornée en vertu de la proposition 1.1.3. La situation des systèmes dynamiques fournit une variante très commode de la hauteur, systématisée par CALL & SILVERMAN (1993) mais dont le principe remonte à NÉRON et TATE.

Avant de continuer, observons l'exemple simple du système dynamique sur $\mathbf{P}^1$ donné par l'élévation des coordonnées homogènes à la puissance $d$, autrement dit $f([x_0 : x_1]) = [x_0^d : x_1^d]$, soit encore $f_0 = X_0^d$ et $f_1 = X_1^d$. Les points prépériodiques dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont les points $[0 : 1]$, $[1 : 0]$, ainsi que les points de coordonnées homogènes $[1 : \zeta]$, où $\zeta$ est une racine de l'unité. Parmi ces points, seuls $[0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[1 : 1]$ et $[1 : -1]$ sont rationnels. Observons aussi que l'inégalité reliant $h(x)$ et $h(f(x))$ est dans ce cas une *égalité* :

$$h([x_0^d : x_1^d]) = dh([x_0 : x_1]).$$

En modifiant légèrement la hauteur, nous allons généraliser cette égalité.

PROPOSITION 1.1.8. — *Soit $f : \mathbf{P}^k \to \mathbf{P}^k$ un endomorphisme de l'espace projectif donné par des polynômes homogènes de degré $d$ sans zéro commun dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. Supposons*

*$d \geqslant 2$. Il existe alors une unique fonction $\hat{h}\colon \mathbf{P}^k(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ telle que $\hat{h} - h$ soit bornée et telle que $\hat{h}(f(x)) = d h(x)$ pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$.*

*Démonstration.* — Munissons l'espace des fonctions bornées de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{R}$ de la norme uniforme et munissons l'espace affine $E$ des fonctions telles que $\varphi - h$ soit bornée de la distance induite. C'est un espace métrique complet. L'application $T\colon \varphi \mapsto \frac{1}{d}\varphi \circ f$ est linéaire et applique $E$ dans lui-même, car $T(h) - h$ est bornée. Cette application est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle possède donc un unique point fixe dans $E$. □

La fonction $\hat{h}$ est appelée *hauteur normalisée*. Notons la formule

$$\hat{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} h(f^n(x)). \tag{1.1.9}$$

La démonstration directe de la convergence de la la limite permet de donner une démonstration d'apparence un peu plus constructive de la proposition précédente (mais essentiellement identique). La hauteur normalisée vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1.10. — a) *on a $\hat{h}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ ;*
b) *un point $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ vérifie $\hat{h}(x) = 0$ si et seulement s'il est prépériodique ;*
c) *pour tout nombre réel $B$, l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ tels que $\hat{h}(x) \leqslant B$ est fini.*

*Démonstration.* — La propriété *c*) résulte immédiatement de la propriété analogue pour $h$ et de ce que $\hat{h} - h$ est bornée. Comme $h$ est positive ou nulle, la propriété *a*) est manifeste sur la formule (1.1.9) ci-dessus. Elle se déduit aussi, ainsi que la propriété *b*), de l'assertion de finitude.

Soit en effet $x \in \mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$. On a $\hat{h}(f^n(x)) = d^n \hat{h}(x)$. Si $x$ est prépériodique, il existe des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Par suite, $d^n \hat{h}(x) = d^{n+p}\hat{h}(x)$, d'où $\hat{h}(x) = 0$ car $d \geqslant 2$. Inversement, si $\hat{h}(x) \leqslant 0$, les termes de la suite $((f^n(x))$ forment un ensemble de points de hauteur normalisée négative ou nulle, donc fini d'après *c*). Il existe donc des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Autrement dit, $x$ est prépériodique et $\hat{h}(x) = 0$. □

Tels qu'énoncés ci-dessus, c'est-à-dire restreints au cas du corps des nombres rationnels, les résultats précédents ne sont pas suffisants. Concernant par exemple les points prépériodiques, ils ne donnent des renseignements que sur ceux qui possèdent un système de coordonnées homogènes rationnelles, et ceux-ci sont en nombre fini d'après le théorème de finitude. Pourtant, ainsi que le montre l'exemple du système dynamique sur $\mathbf{P}^1$ donné par l'élévation des coordonnées à la puissance $d$, l'ensemble des points prépériodiques (à coordonnées homogènes complexes, voire algébriques) est infini. Ainsi que nous le verrons plus bas, il est même dense pour la topologie de Zariski (prop. 2.2.1 du chapitre 2). De plus, les énoncés précédents ne concernent que l'espace projectif et il convient d'établir les propriétés générales des hauteurs et d'en dégager les applications aux systèmes dynamiques polynomiaux d'une variété algébrique arbitraire.

## §1.2. Hauteur d'un point algébrique

Dans ce paragraphe, j'explique comment définir la hauteur d'un point de l'espace projectif dont un système de coordonnées homogènes est formé de nombres algébriques.

### 1.2/1. Quelques rappels de théorie algébrique des nombres

Notons $\overline{\mathbf{Q}}$ le corps des nombres algébriques : par définition, c'est l'ensemble des nombres complexes qui sont annulés par un polynôme unitaire à coefficients rationnels. Un tel nombre complexe est annulé par un polynôme unitaire de degré minimal : son polynôme minimal ; ce polynôme est irréductible et son degré est appelé degré du nombre algébrique.

On appellera *corps de nombres* un sous-corps $K$ de $\mathbf{C}$ qui est de fimension finie comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel ; cette dimension est aussi appelée degré et notée $[K:\mathbf{Q}]$. Un tel corps $K$ est en fait constitué de nombres algébriques (si $x \in K$, le polynôme minimal de l'endomorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire de multiplication par $x$ dans $K$ annule $x$).

Si $a$ est un nombre algébrique de degré $d$, le sous-anneau $\mathbf{Q}[a]$ engendré par $a$ dans $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{Q}$-algèbre isomorphe à $\mathbf{Q}[X]/(P)$, où $P$ est le polynôme minimal de $a$. Par suite, $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension $d$, et aussi un corps. C'est donc un corps de nombres. Plus généralement, si $a_1,\dots,a_r$ sont des nombres algébriques, le sous-corps de $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}(a_1,\dots,a_r)$, qu'ils engendrent est un corps de nombres. En fait, tout corps de nombres $K$ est de la forme $\mathbf{Q}(a)$ pour un certain élément $a$ (*théorème de l'élément primitif*). Notons $P$ le polynôme minimal de $a$ ; son degré est le degré de $K$. Comme $P$ est irréductible (et $\mathbf{Q}$ de caractéristique zéro), ses racines complexes sont deux à deux distinctes ; notons-les $a_1,\dots,a_D$. Ce sont les conjugués de $a$ (qui est l'un d'entre eux).

Pour tout $i \in \{1,\dots,D\}$, il existe un unique homomorphisme de corps $\sigma_i \colon K \to \mathbf{C}$ qui applique $a$ sur $a_i$. En outre, tout homomorphisme de corps de $K$ dans $\mathbf{C}$ est de cette forme. Rappelons si besoin est qu'un tel homomorphisme est injectif ; on dira que c'est un *plongement* de $K$ dans $\mathbf{C}$. Si $L$ est un sous-corps de $K$ de degré $d$, chacun des $d$ plongements de $L$ dans $\mathbf{C}$ se prolonge en exactement $D/d$ plongements de $K$ dans $\mathbf{C}$. (L'entier $D/d$ est égal à la dimension $[K:L]$ de $K$ comme $L$-espace vectoriel.)

Un entier algébrique est un nombre algébrique qui est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers ; il revient au même d'exiger que son polynôme minimal soit à coefficients entiers. Notons que si $x$ est une racine du polynôme à coefficients entiers $P = a_0X^d + \cdots + a_d$, avec $a_0 \neq 0$, alors

$$0 = a_0^{d-1}P(x) = (a_0x)^d + a_0a_1(a_0x)^{d-1} + \cdots + a_0^{d-1}a_d,$$

ce qui montre que $a_0x$ est un entier algébrique. L'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\overline{\mathbf{Q}}$ dont $\overline{\mathbf{Q}}$ est le corps des fractions. Si $a_1,\dots,a_r$ sont des entiers algébriques, le sous-anneau qu'ils engendrent dans $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}[a_1,\dots,a_r]$, est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini, égal au degré de $\mathbf{Q}(a_1,\dots,a_r)$. Si $K$ est un corps de nombres, l'ensemble des entiers algébriques appartenant à $K$ est de cette forme ; on le notera $\mathbf{Z}_K$.

Soit $K$ un corps de nombres. La *norme* d'un élément $a$ de $K$, notée $N_K(a)$, voire $N(a)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $K$, est définie comme le déterminant de l'endomorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire de $K$ donné par la multiplication par $a$. Il y a plusieurs façons de la calculer.

Soit d'abord $P$ le polynôme minimal de $a$ et $d$ son degré. Soit $(x_1,\dots,x_r)$ une base de $K$ vu comme $\mathbf{Q}(a)$-espace vectoriel. Alors, la famille $(a^i x_j)$, pour $0 \leqslant i \leqslant d-1$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, est une base de $K$ sur $\mathbf{Q}$. En particulier, $D = dr$. Dans cette base, la multiplication par $a$ est diagonale par blocs, chacun étant la matrice compagnon $C_P$ du polynôme $P$. On a ainsi $N(a) = (\det C_P)^r$. Le déterminant de $C_P$ est égal au produit des racines complexes de $P$ ; ces racines ne sont autres que les conjugués $a_1,\dots,a_d$ de $a$. Si $(\sigma_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant d$, désigne la famille des plongements de $\mathbf{Q}(a)$ dans $\mathbf{C}$, on a donc

$$N(a) = \big(\prod_{i=1}^{d} \sigma_i(a)\big)^r = \prod_{\sigma\colon K\hookrightarrow \mathbf{C}} \sigma(a).$$

Supposons de plus que $a$ soit un entier algébrique non nul. Alors, $a\mathbf{Z}_K$ est un sous-$Z$-module de rang $D$ de $K$. D'après le théorème des diviseurs élémentaires, il existe une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}_K$, disons $(x_1,\dots,x_D)$, et des nombres entiers $u_1,\dots,u_D$ tels que $(u_1 x_1,\dots,u_D x_D)$ soit une $\mathbf{Z}$-base de $a\mathbf{Z}_K$. Comme le déterminant de la matrice de passage d'une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}_K$ à une autre est égal à $\pm 1$, le déterminant de la multiplication par $a$ est égal au produit $u_1 \dots u_D$, ou à l'opposé. D'autre part, $u_1 \dots u_D$ apparaît comme le cardinal du $\mathbf{Z}$-module — en fait de l'anneau — quotient $\mathbf{Z}_K/a\mathbf{Z}_K$. D'où la seconde formule,

$$N(a) = \pm \operatorname{card}(\mathbf{Z}_K/a\mathbf{Z}_K).$$

Si $I$ est un idéal non nul de $\mathbf{Z}_K$, l'anneau quotient $\mathbf{Z}_K/I$ est fini (si $a \in I$, l'anneau $\mathbf{Z}_K/I$ est un quotient de l'anneau $\mathbf{Z}_K/(a)$) ; par définition, son cardinal est appelée la *norme* de $I$. La formule précédente pour $N(a)$ se généralise en $N(aI) = |N(a)|\, N(I)$, pour $a \in \mathbf{Z}_K$ et $I$ un idéal de $\mathbf{Z}_K$.

Si $L$ est un corps de nombres qui contient $K$ et $a$ un élément de $K$, on a $N_L(a) = N_K(a)^\delta$, où $\delta = [L:K]$ désigne le quotient du degré de $L$ par celui de $K$. Plus généralement, si $I$ est un idéal non nul de $\mathbf{Z}_K$, l'idéal $I\mathbf{Z}_L$ de $\mathbf{Z}_L$ est de norme $N_K(I)^\delta$. (Si $I = a_1\mathbf{Z}_K + \dots + a_r\mathbf{Z}_K$, notons que $I\mathbf{Z}_L = a_1\mathbf{Z}_L + \dots + a_r\mathbf{Z}_L$.)

### 1.2/2. Définition de la hauteur

Soit $x$ un point de $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit $[x_0 : \dots : x_k]$ des coordonnées homogènes de $x$, où $x_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ pour tout $i$. Soit $K$ un corps de nombres contenant les $x_i$ ; notons $D$ le degré de $K$ et $\sigma_1,\dots,\sigma_D$ les $D$ homomorphismes de $K$ dans $\mathbf{C}$. Quitte à multiplier les $x_i$ par un même entier naturel non nul, on peut supposer que ce sont des entiers algébriques, donc des éléments de $\mathbf{Z}_K$. On définit alors la hauteur de $x$ par l'expression

$$h(x) = -\frac{1}{D}\log N_K(x_0\mathbf{Z}_K + \dots + x_k\mathbf{Z}_K) + \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{D} \log\max(\big|\sigma_j(x_0)\big|,\dots\big|\sigma_j(x_k)\big|). \tag{1.2.1}$$

La correction de cette définition dépend de deux vérifications supplémentaires : l'indépendance vis à vis du choix du corps de nombres $K$ et des coordonnées homogènes $x_0, \dots, x_k$. Notons $h_K(x_0, \dots, x_k)$ le membre de droite de l'équation (1.2.1) et commençons par démontrer qu'il ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées homogènes. Si $(x'_0, \dots, x'_k)$ est un second système de coordonnées homogènes définissant le point $x$, sujettes aux conditions $x'_i \in \mathbf{Z}_K$ pour tout $i$, il existe un élément $u \in K^*$ tel que $x'_i = ux_i$ pour tout $i$. Écrivons $u$ comme une fraction $a/b$ d'éléments de $\mathbf{Z}_K$, on voit que l'on a $bx'_i = ax_i$ pour tout $i$.

Notons alors que

$$N_K(ax_0\mathbf{Z}_K + \dots + ax_k\mathbf{Z}_K) = |N_K(a)|\, N_K(x_0\mathbf{Z}_K + \dots + x_k\mathbf{Z}_K)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{D} \log\max(\left|\sigma_j(ax_0)\right|, \dots \left|\sigma_j(ax_k)\right|) &= \sum_{j=1}^{D} \log\left|\sigma_j(a)\right| + \sum_{j=1}^{D} \log\max(\left|\sigma_j(x_0)\right|, \dots \left|\sigma_j(x_k)\right|) \\ &= \log|N_K(a)| + \sum_{j=1}^{D} \log\max(\left|\sigma_j(x_0)\right|, \dots \left|\sigma_j(x_k)\right|).\end{aligned}$$

Par suite, $h_K(ax_0, \dots, ax_k) = h_K(x_0, \dots, x_k)$. De même, $h_K(bx'_0, \dots, bx'_k) = h_K(x'_0, \dots, x'_k)$, d'où l'indépendance par rapport au choix des coordonnées homogènes.

La démonstration de l'indépendance de la hauteur par rapport au choix du corps de nombres est plus simple. Si $K$ et $K'$ sont des corps de nombres contenant chacun un système de coordonnées homogènes du point $x$, le corps $L$ engendré par ces deux corps en est un également, qui contient à la fois $K$ et $K'$.

Soit $E$ le degré de $L$ ; c'est un multiple de $D$. De fait, la restriction à $K$ d'un homomorphisme $\sigma \colon L \to \mathbf{C}$ est un plongement de $K$ dans $\mathbf{C}$ et chacun des $D$ plongements de $K$ dans $\mathbf{C}$ s'étend d'exactement $E/D$ manières distinctes en un plongement de $E$ dans $\mathbf{C}$. Par conséquent, dans la formule définissant $h_L(x_0, \dots, x_k)$, la somme

$$\sum_{\sigma\colon L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log\max(|\sigma(x_0)|, \dots, |\sigma(x_k)|)$$

reprend $E/D$ fois chaque terme de la somme correspondante sur le corps $K$. Compte tenu des facteurs de normalisation $1/D$ et $1/E$, ces parties des deux formules donnent le même résultat. La démonstration de l'égalité $h_K(x_0, \dots, x_k) = h_L(x_0, \dots, x_k)$ est donc déterminée, compte tenu de l'égalité de normes d'idéaux

$$N_L(x_0\mathbf{Z}_L + \dots + x_k\mathbf{Z}_L) = N_K(x_0\mathbf{Z}_K + \dots + x_k\mathbf{Z}_K)^{E/D}.$$

Une conséquence de la formule définissant la hauteur est son invariance sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. On définit en effet une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ en posant $\sigma(x) = [\sigma(x_0) : \dots : \sigma(x_k)]$ pour tout point $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$, de coordonnées homohènes $[x_0 : \dots : x_k]$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$.

PROPOSITION 1.2.2. — *Pour tout $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et tout automorphisme $\alpha \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, on a $h(\alpha(x)) = h(x)$.*

*Démonstration.* — Soit $x$ un point de $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit $K$ une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ contenant un système $[x_0 : \cdots : x_k]$ de coordonnées homogènes de $x$. Par définition, $K$ est stable par tout automorphisme $\alpha \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et $\alpha|_K$ est un automorphisme de $K$, ainsi que de son anneau d'entiers $\mathbf{Z}_K$. Il en résulte que l'idéal $x_0\mathbf{Z}_K + \cdots + x_k\mathbf{Z}_K$ a même norme que son image $\alpha(x_0)\mathbf{Z}_K + \cdots + \alpha(x_k)\mathbf{Z}_K$ par $\alpha$. De même, les plongements de $K$ dans $\mathbf{C}$ sont tous obtenus par composition d'un plongement fixe par les éléments de $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Par conséquent, les termes des sommes

$$\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow \mathbf{C}} \log\max(|\sigma(x_0)|,\dots,|\sigma(x_k)|) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow \mathbf{C}} \log\max(|\sigma(\alpha(x_0))|,\dots,|\sigma(\alpha(x_k))|)$$

ne diffèrent que par l'ordre. La proposition en résulte. □

Les paragraphes suivants donnent des variantes de la définition de la hauteur, ainsi que des exemples.

### 1.2/3. Propriété de Bézout pour les nombres algébriques

Il n'est pas vrai que l'anneau des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Z}}$ soit un anneau principal. Ce n'est en effet même pas un anneau noethérien : l'idéal $I$ de $\overline{\mathbf{Z}}$ formé des éléments dont une puissance est un multiple de 2 n'est par exemple pas de type fini. Montrons par l'absurde qu'il n'est pas principal : soit $a \in I$ tel que $I = (a)$. Comme $2^{1/m} \in I$, $2^{1/m}$ est multiple de $a$. Comme $2^{(m-1)/m} = 2/2^{1/m}$ n'est pas multiple de 2 dans $\overline{\mathbf{Z}}$, $a^{m-1}$ n'est pas multiple de 2. Comme $m$ est arbitraire, aucune puissance de $a$ n'est multiple de 2, ce qui est absurde.

En revanche, il est vrai que les idéaux de type fini de $\overline{\mathbf{Z}}$ sont principaux. Cela résulte de ce que le groupe des classes d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres est de torsion. Par suite, quitte à considérer une extension convenable $L$ de $K$, on peut choisir les coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ d'un point $x$ de $\mathbf{P}^k(K)$ comme suit : ce sont des éléments de $\mathbf{Z}_L$ et l'idéal $x_0\mathbf{Z}_L + \cdots + x_k\mathbf{Z}_L$ de $\mathbf{Z}_L$ est égal à $\mathbf{Z}_L$. Dans la formule (1.2.1), cela fait disparaître le premier terme.

### 1.2/4. Valuations et hauteurs

Les idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres ne sont pas toujours faciles à manipuler, notamment parce qu'ils ne sont pas nécessairement principaux. Le premier terme de la hauteur qui met en jeu la norme d'un idéal est parfois malcommode. Dans ce paragraphe, nous l'écrivons comme une somme de termes formellement analogues au second terme, mais où apparaissent d'autres corps que le corps des nombres complexes.

DÉFINITION 1.2.3. — *Soit $F$ un corps. Une* valeur absolue *sur $F$ est une application $|\cdot| : F \to \mathbf{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes : pour tous $a$ et $b$ dans $F$,*

a) $|ab| = |a|\,|b|$ *(multiplicativité) ;*
b) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ *(inégalité triangulaire) ;*
c) $|a| = 0$ *équivaut à* $a = 0$.

Pour la théorie algébrique des nombres, la classification des valeurs absolues sur **Q** est d'une importance capitale. Donnons-en des exemples. Il y a déjà la restriction à **Q** de la valeur absolue usuelle. qu'on note parfois $|\cdot|_\infty$ pour la distinguer de celles que je bientôt définir. Notons que cette valeur absolue $|\cdot|_\infty$ est *archimédienne*, car pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$ et tout $M > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $|na| > M$ (axiome d'Archimède).

D'autre part, soit $p$ un nombre premier. Tout nombre rationnel non nul $a$ s'écrit de manière unique sous la forme $p^n u$, avec $n \in \mathbf{Z}$, et $u \in \mathbf{Q}$ est le quotient de deux entiers relatifs premiers à $p$. Posons alors $|a|_p = p^{-n}$. Posons aussi, comme il se doit, $|0|_p = 0$. Cela définit une valeur absolue sur **Q** que l'on appelle la *valeur absolue $p$-adique*. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas évidente ; écrivons donc $a = p^n \frac{a'}{a''}$ et $b = p^m \frac{b'}{b''}$, avec $n$, $m \in \mathbf{Z}$, $a'$, $a''$, $b'$, $b''$ des nombres entiers premiers à $p$. Supposons aussi, ce qui est loisible, $n \leqslant m$. Alors,

$$a + b = p^n \left( \frac{a'}{a''} + p^{m-n} \frac{b'}{b''} \right) = p^n \frac{a'b'' + p^{m-n} b'a''}{a''b''}.$$

Dans cette dernière fraction, le dénominateur est premier à $p$, mais pas forcément le numérateur. Par suite, $a + b$ s'écrit sous la forme $p^s \frac{c'}{c''}$ avec $s \geqslant n$ et

$$|a + b|_p = p^{-s} \leqslant p^{-n} = \max(p^{-n}, p^{-m}) = \max(|a|_p, |b|_p).$$

Ainsi, $|\cdot|_p$ vérifie une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire : on dit que c'est une *valeur absolue ultramétrique*. En particulier, pour tout $a \in \mathbf{Q}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|na|_p \leqslant |a|_p$ : cete valuation ne vérifie pas l'axiome d'Archimède.

THÉORÈME 1.2.4 (Ostrowski). — *Les valeurs absolues sur le corps* **Q** *des nombres rationnels sont les suivantes :*

– *la valeur absolue dite triviale pour laquelle* $|0| = 0$ *et* $|a| = 1$ *si* $a \neq 0$ *;*
– *les puissances* $|\cdot|_\infty^s$*, pour tout nombre réel* $s \geqslant 1$*, de la valeur absolue archimédienne ;*

*et, pour tout nombre premier p,*

– *les puissances* $|\cdot|_p^s$*, pour tout nombre réel* $s > 0$*, de la valeur absolue $p$-adique.*

Une valeur absolue sur un corps définit une distance et donc une topologie. Deux valeurs absolues définissent la même topologie si et seulement si l'une est une puissance (non nulle) de l'autre. La valeur absolue triviale fournit la topologie discrète. Par suite, dans la liste ci-dessus, on ne s'intéressera qu'aux valeurs absolues $p$-adiques standard et à la valeur absolue archimédienne standard. Elles sont reliées par la *formule du produit*, qui n'est autre qu'une reformulation de la décomposition en facteurs premiers.

PROPOSITION 1.2.5. — *Pour tout* $a \in \mathbf{Q}^*$, $|a|_\infty \prod_p |a|_p = 1$.

*Démonstration.* — Soit $a = \varepsilon \prod_p p^{n_p}$ la décomposition en facteurs premiers de $a$, avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ et $n_p \in \mathbf{Z}$ pour tout nombre premier $p$, presque tous étant nuls. Alors, pour tout nombre premier $p$, on a $|a|_p = p^{-n_p}$, tandis que $|a|_\infty = \prod_p p^{n_p}$. Le produit de toutes ces quantités est bien égal à 1. □

Fixons une valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbf{Q}$. Si $K$ est un corps de nombres, il y a en général plusieurs façons d'étendre la valeur absolue donnée en une valeur absolue sur $\mathbf{Q}$. Prenons par exemple la valeur absolue archimédienne et le corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Du point de vue algébrique, indépendamment de l'ordre usuel sur les nombres réels, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont indissociables ; on peut donc prolonger la valeur absolue de deux façons différentes, en posant $\left|a+b\sqrt{2}\right|'_\infty = \left|a+b\sqrt{2}\right|$ ou $\left|a+b\sqrt{2}\right|''_\infty = \left|a-b\sqrt{2}\right|$, pour $a$ et $b$ dans $\mathbf{Q}$.

Toujours dans le cas de la valeur absolue archimédienne, mais dans le cas d'un corps de nombres $K$ général, les différentes extensions à $K$ de la valeur absolue archimédienne de $\mathbf{Q}$ correspondent exactement aux valeurs absolues $|\cdot|_\sigma$ définies par $|a|_\sigma = |\sigma(a)|$, où $\sigma$ parcourt l'ensemble des plongements de $K$ dans $\mathbf{C}$. (Deux plongements conjugués définissent la même valeur absolue.)

Dans le cas des valeurs absolues $p$-adiques, un corps, que l'on note $\mathbf{C}_p$, joue le même rôle que $\mathbf{C}$ pour la valeur absolue archimédienne. Observons que $\mathbf{R}$ est le complété du groupe abélien $\mathbf{Q}$ pour la topologie définie par la valeur absolue archimédienne, qu'il est muni d'une valeur absolue (celle que tout le monde connaît, la seule qui étend celle de $\mathbf{Q}$) et que $\mathbf{C}$ est sa clôture algébrique, muni de l'*unique* valeur absolue qui étend la valeur absolue archimédienne sur $\mathbf{R}$.

Si $p$ est un nombre premier, on commence par définir le complété $\mathbf{Q}_p$ de $\mathbf{Q}$ pour la topologie définie par la valeur absolue $p$-adique. C'est un corps et sa topologie est compatible avec la structure de corps. Ensuite, on considère une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ : comme $\mathbf{Q}_p$ est complet, on démontre que $\overline{\mathbf{Q}_p}$ possède une *unique* valeur absolue, toujours notée $|\cdot|_p$ qui étend la valeur absolue $p$-adique sur $\mathbf{Q}$. Ce corps n'est cependant pas complet pour la topologie $p$-adique — on note alors $\mathbf{C}_p$ son complété muni de la valeur absolue $|\cdot|_p$ qui étend la valeur absolue $p$-adique. C'est un corps complet par construction, et algébriquement clos par théorème.

Si $K$ est un corps de nombres, les extensions à $K$ de la valeur absolue $p$-adique sur $\mathbf{Q}$ sont de la forme $a \mapsto |\sigma(a)|_p$, où $\sigma$ décrit l'ensemble des plongements de $K$ dans $\mathbf{C}_p$. (L'image d'un tel plongement est bien sûr contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et deux plongements qui diffèrent par composition d'un automorphisme de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ fournissent la même valeur absolue.)

PROPOSITION 1.2.6. — *Soit $K$ un corps de nombres et soit $x \in \mathbf{P}^k(K)$ un point de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ (appartenant à $K$). Alors,*

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log\max(|\sigma(x_0)|_p, \dots, |\sigma(x_k)|_p). \tag{1.2.7}$$

La sommation sur « $p \leqslant \infty$ » signifie que l'on somme sur les nombres premiers $p$ et sur un symbole supplémentaire $\infty$, avec $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{C}$. Dans la formule précédente, on peut aussi regrouper les termes selon les valeurs absolues induites sur le corps $K$ par les plongements qui indexent cette somme.

Notons ainsi $M_K$ l'ensemble des valeurs absolues sur $K$ qui étendent une des valeurs absolues $p$-adique ou archimédienne sur $K$. Un élément de $M_K$ est appelé *place* du corps $K$. Pour chaque valeur absolue $|\cdot|_v \in M_K$, soit $p_v$ le nombre premier ou l'infini correspondant à la valeur absolue induite sur le sous-corps $\mathbf{Q}$ de $K$ et soit $\varepsilon_v$ le nombre de plongements $\sigma$ de $K$ dans $\mathbf{C}_{p_v}$ induisant cette valeur absolue sur $K$, autrement dit tels que l'on ait $|x|_v = |\sigma(x)|_{p_v}$ pour tout $x \in K$.

Avec les notations de la proposition, on a ainsi

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \log \max(|x_0|_v, \dots, |x_k|_v). \tag{1.2.8}$$

Sous-jacent à la véracité de la formule précédente est le fait que le membre de droite ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes définissant le point. De même que l'énoncé analogue avec la première définition de la hauteur découlait d'une relation entre la norme d'un élément et ses valeurs absolues archimédiennes, cela résulte de la *formule du produit* qui relie toutes les valeurs absolues d'un élément non nul d'un corps de nombres : pour tout $a \in K^*$,

$$\prod_{v \in M_K} |a|_v^{\varepsilon_v} = \prod_{p \leqslant \infty} \prod_{\sigma \colon K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} |\sigma(a)|_p = 1. \tag{1.2.9}$$

En fait, le facteur indexé par $p$ dans l'équation précédente est donné par

$$\prod_{\sigma K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} |\sigma(a)|_p = |N_K(a)|_p,$$

où $N_K(a)$ est la norme de $a$. Cela ramène la formule du produit dans le corps de nombres $K$ à celle, déjà mentionnée (prop. 1.2.5), dans le corps des nombres rationnels.

### 1.2/5. Mesure de Mahler et hauteur

Considérons ici le cas de la droite projective $\mathbf{P}^1$. Notons $\infty$ le point de coordonnées homogènes $[0:1]$. Un point $x$ de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ a deux coordonnées homogènes $[x_0 : x_1]$ ; si $x \neq \infty$, $x_0 \neq 0$ et $\xi = x_1/x_0$ est un élément de $\overline{\mathbf{Q}}$. Dire que $x \in \mathbf{P}^1(K)$, pour un sous-corps $K$ de $\mathbf{C}$, signifie exactement que $\xi \in K$.

La hauteur du point $\infty$ est égale à 0. Si $\xi$ est un nombre algébrique, on note (abusivement) $h(\xi)$ la hauteur du point $[1:\xi]$ et on dit aussi que c'est la hauteur de $\xi$. Montrons comment elle est reliée au polynôme minimal de $\xi$. Il nous faut tout d'abord rappeler une définition : La *mesure de Mahler* d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ est donnée par la formule

$$\mathrm{M}(P) = \exp\left(\int_0^1 \log\left|P(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t})\right| dt\right). \tag{1.2.10}$$

PROPOSITION 1.2.11. — *Soit $\xi$ un nombre algébrique, soit $P$ son polynôme minimal et soit $d$ son degré. On a*

$$h(\xi) = \frac{1}{d} \log \mathrm{M}(P).$$

*Démonstration.* — Par définition

$$h(\xi) = h([1:\xi]) = \frac{1}{d} \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma \colon K \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(1, |\sigma(\xi)|_p),$$

où la somme est sur l'ensemble des nombres premiers et le symbole $\infty$ ; notons $h_p(\xi)$ la somme correspondante, de sorte que $h(\xi) = \sum_{p\leqslant\infty} h_p(\xi)$.

Posons $P = a_0X^d + \cdots + a_d$. Nous allons d'abord montrer que pour tout nombre premier $p$, on a $h_p(\xi) = -d\log|a_0|_p$. Notons en effet $\xi_1,\dots,\xi_d$ les racines de $P$ dans $\mathbf{C}_p$. Ce ne sont autres que les images de $\xi$ par les différents plongements du corps $\mathbf{Q}(\xi)$ dans $\mathbf{C}_p$. Supposons, ce qui est loisible, que $|\xi_1|_p \geqslant |\xi_2|_p \geqslant \cdots \geqslant |\xi_d|_p$ et soit $r$ le plus grand entier tel que $|\xi_r|_p = |\xi_1|_p$. Les relations coefficients-racines s'écrivent

$$\frac{a_k}{a_0} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}$$

et entraînent la majoration

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right|_p \leqslant |\xi_1|_p\dots|\xi_k|_p \leqslant \prod_{i=1}^{d} \max(1,|\xi_i|_p).$$

Pour $k = r$, cette inégalité est une égalité car le terme $\xi_1\dots\xi_r$ est de valeur absolue strictement supérieure à tous les autres. Par suite,

$$\max(|a_0|_p,\dots,|a_d|_p) = |a_0|_p \prod_{i=1}^{d} \max(1,|\xi_i|_p).$$

Enfin, comme les coefficients $a_0,\dots,a_d$ sont premiers entre eux, l'un d'entre eux n'est pas multiple de $p$ et le membre de gauche de l'égalité précédente est égal à 1.

Passons maintenant au terme $h_\infty$. D'après la formule de JENSEN, on a, pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$,

$$\int_0^1 \log\left|e^{2i\pi t}-\alpha\right|\,dt = \log\max(1,|\alpha|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha|\leqslant 1\,; \\ \log|\alpha| & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par conséquent,

$$\log \mathrm{M}(P) = \log|a_0| + \sum_{j=1}^{d} \log\max(1,\left|\xi_j\right|) = \log|a_0| + d h_\infty(\xi).$$

On a donc finalement

$$d h(\xi) = \sum_{p\leqslant\infty} -\log|a_0|_p + \log\mathrm{M}(P) = \log\mathrm{M}(P)$$

compte tenu de la formule du produit (prop. 1.2.5). □

## §1.3. Fonctorialité

Ce paragraphe explique le comportement de la hauteur sous l'effet d'un morphisme.

### 1.3/1. Exemples

Commençons par des exemples très simples.

Soit $S\colon \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^{km+k+m}$ le plongement de Segre, associant au couple $(x, y)$ de points de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ et $[y_0 : \cdots : y_m]$ le point de $\mathbf{P}^{km+k+m}$ dont un système de coordonnées homogènes est la famille $(x_i y_j)$, indexée par l'ensemble des couples $(i, j)$ tels que $0 \leqslant i \leqslant k$ et $0 \leqslant j \leqslant m$, disons ordonnée par l'ordre lexicographique.

Pour toute valeur absolue $|\cdot|$ sur un corps $F$, tout $(x_0, \ldots, x_k) \in F^{k+1}$ et tout $(y_0, \ldots, y_m) \in F^{m+1}$, on a évidemment

$$\max_{\substack{0\leqslant i\leqslant k\\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|x_i y_j\right| = \max_{0\leqslant i\leqslant k} |x_i| \max_{0\leqslant j\leqslant m} \left|y_j\right|.$$

La définition de la hauteur par la formule (1.2.7) entraîne alors l'égalité

$$h(S(x, y)) = h(x) + h(y), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}}) \text{ et tout } y \in \mathbf{P}^m(\overline{\mathbf{Q}}). \tag{1.3.1}$$

Le plongement de Veronese de degré $d$, $V_d\colon \mathbf{P}^k \to \mathbf{P}^K$, associe à un point $x$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ le point $V_d(x)$ dont un système de coordonnées homogènes est donné par la famille des monômes $x_0^{d_0} \ldots x_n^{d_k}$, où $(d_0, \ldots, d_k)$ parcourt toutes les suites d'entiers naturels de somme $d$. Il y a $\binom{k+d}{k}$ telles suites, d'où $K = \binom{k+d}{k} - 1$. Pour toute valeur absolue sur un corps $F$ et tout $(x_0, \ldots, x_k) \in F^{k+1}$, on a

$$\left|x_0^{d_0} \ldots x_k^{d_k}\right| = |x_0|^{d_0} \ldots |x_k|^{d_k} \leqslant \max(|x_0|, \ldots, |x_k|)^d,$$

l'égalité étant atteinte lorsque $d_r = d$ et $|x_r|$ maximal. On a ainsi

$$h(V_d(x)) = d\,h(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}}). \tag{1.3.2}$$

Considérons enfin la projection linéaire $p\colon \mathbf{P}^k \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ qui applique un point $x$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_k]$ sur le point $p(x)$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_m]$, $m$ et $k$ étant des entiers tels que $1 \leqslant m < k$. Son domaine de définition est exactement le complémentaire du sous-espace projectif $E$ défini par l'annulation des $m+1$ premières coordonnées homogènes. Pour $x \notin E$, l'inégalité évidente

$$\max(|x_0|, \ldots, |x_m|) \leqslant \max(|x_0|, \ldots, |x_k|)$$

entraîne l'inégalité

$$h(p(x)) \leqslant h(x) \quad \text{pour tout } x \in (\mathbf{P}^n \setminus E)(\overline{\mathbf{Q}}). \tag{1.3.3}$$

En revanche, notons qu'il n'y a pas d'inégalité dans l'autre sens. Par exemple, considérons la projection $p$ de $\mathbf{P}^2$ dans $\mathbf{P}^1$ donnée par $p([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1]$ ; pour $x = [1 : 0 : n]$, avec $n \in \mathbf{Z}^*$, on a $h(x) = \log|n|$ et $h(p(x)) = h([1 : 0]) = 0$.

### 1.3/2. Comportement par morphisme

PROPOSITION 1.3.4. — *Soit* $f\colon \mathbf{P}^k \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ *une application rationnelle définie par* $m+1$ *polynômes* $(f_0,\dots,f_m)$ *en* $n+1$ *variables, à coefficients dans* $\overline{\mathbf{Q}}$ *homogènes de degré* $d$ *et sans facteur commun. Notons* $Z$ *le lieu d'indétermination de* $f$*, lieu des zéros communs dans* $\mathbf{P}^n$ *des polynômes* $f_0,\dots,f_m$*.*

a) *Il existe un nombre réel* $c_1$ *tel que pour tout* $x \in (\mathbf{P}^k \setminus Z)(\overline{\mathbf{Q}})$*,* $h(f(x)) \leqslant d h(x) + c_1$*.*

b) *Pour toute sous-variété fermée* $X$ *de* $\mathbf{P}^k$ *qui ne rencontre pas* $Z$*, il existe un nombre réel* $c_X$ *tel que* $h(f(x)) \geqslant d h(x) - c_X$ *pour tout* $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$*.*

*Démonstration.* — Démontrons d'abord *a*).

Observons d'abord le lemme suivant : soit $F$ un corps muni d'une valeur absolue et soit $\varphi$ un polynôme homogène de degré $d$ à coefficients dans $F$. Il existe un nombre réel $C$ tel que pour tout corps valué $K$ contenant $F$ et dont la valuation prolonge celle de $F$ et toute famille $(x_0,\dots,x_k)$ d'éléments de $K$,

$$\left|\varphi(x_0,\dots,x_k)\right| \leqslant C \max(|x_0|,\dots,|x_k|)^d.$$

Cela est évident pour un monôme et s'en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire, par récurrence sur le nombre de monômes de $\varphi$. Si la valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique, on peut en outre choisir pour $C$ le maximum des valeurs absolues des monômes qui constituent $\varphi$.

Soit maintenant $F$ un corps de nombres contenant les coefficients des polynômes $f_i$. Quitte à multiplier les polynômes $f_i$ par un même entier non nul, on peut en outre supposer que les coefficients des $f_i$ sont des entiers algébriques. Par conséquent, pour tout nombre premier $p$, les valeurs absolues $p$-adiques de ces coefficients sont au plus 1 et l'on aura, pour tout corps de nombres $K$ contenant $F$, tout nombre premier $p$, tout plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ et tout $x = (x_0,\dots,x_k) \in K^{k+1}$, l'inégalité

$$\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p) \leqslant \max(|\sigma(x_0)|_p,\dots,|\sigma(x_k)|_p)^d.$$

Pour les valeurs absolues archimédiennes, il existe de même, pour tout plongement $\sigma_0\colon F \hookrightarrow \mathbf{C}$ un nombre réel $C_{\sigma_0} > 0$ tel que l'on ait

$$\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_\infty,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_\infty) \leqslant C_{\sigma_0} \max(|\sigma(x_0)|_\infty,\dots,|\sigma(x_k)|_\infty)^d$$

pour tout corps de nombres $K$ qui contient $F$, tout plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ qui prolonge $\sigma_0$ et tout élément $(x_0,\dots,x_k) \in K^{k+1}$.

Soit $K$ un corps de nombres contenant $F$ et soit $x$ un point de $\mathbf{P}^k(K)$ ; choisissons-lui un système de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$ dans $K$. Supposons que $f$ soit défini en $x$, c'est-à-dire que $f_0(x),\dots,f_m(x)$ ne soient pas tous nuls. La définition de la hauteur implique alors la majoration

$$\begin{aligned}
h(f(x)) &= h([f_0(x):\dots:f_m(x)]) \\
&= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{p\leqslant\infty}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}_p}\log\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p) \\
&\leqslant \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{p<\infty}\sum_{K\hookrightarrow\mathbf{C}_p} d\log\max(|\sigma(x_0)|_p,\dots,|\sigma(x_k)|_p) \\
&\quad+\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}}\big(\log C_{\sigma|_F}+d\log\max(|\sigma(x_0)|_\infty,\dots,|\sigma(x_k)|_\infty)\big) \\
&\leqslant d h([x_0:\dots:x_k])+\max_{\sigma\colon F\hookrightarrow\mathbf{C}}\log C_\sigma.
\end{aligned}$$

L'assertion *a*) ainsi démontrée, passons à la seconde partie de la proposition. Soit $(P_j)$ une famille de polynômes homogènes à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ définissant la sous-variété $X$. La sous-variété de $\mathbf{P}^k$ définie par les polynômes $P_j$ d'une part et $f_0,\dots,f_m$ d'autre part est égale à $X\cap Z$, donc est vide. D'après le théorème des zéros de Hilbert, dans sa version homogène, l'idéal $(P_j,f_i)$ engendré par ces polynômes contient une puissance de l'idéal $(X_0,\dots,X_k)$. Il existe ainsi un entier $t$ et, pour tout $n\in\{0,\dots,k\}$ des polynômes $G_{jn}$ et $H_{in}$ tels que

$$X_n^t=\sum_j P_jG_{jn}+\sum_{i=0}^m f_iH_{in}.$$

Il est loisible de supposer les polynômes $G_{jn}$ et $H_{in}$ homogènes, quitte à ne conserver que les monômes de $G_{jn}$ de degré $t-\deg(P_j)$ et ceux de $H_{in}$ de degré $t-d$.

Pour tout point $x=[x_0:\dots:x_k]$ de $X(\overline{\mathbf{Q}})$, on a alors

$$x_n^t=\sum_j P_j(x)G_{jn}(x)+\sum_{i=0}^m f_i(x)H_{in}(x)=\sum_{i=0}^m f_i(x)H_{in}(x)$$

puisque, par hypothèse, $P_j(x)=0$ pour tout $j$. Soit $N$ un nombre entier non nul tel que les coefficients des polynômes $NH_{in}$ soient entiers algébriques, éléments d'un corps de nombres $F$ contenant aussi les coefficients des $f_i$.

Par un argument similaire au *a*), on en déduit que pour tout corps de nombres $K$ contenant $F$, tout nombre premier $p$, tout plongement de $K$ dans $\mathbf{C}_p$, et tout point $[x_0:\dots:x_k]\in X(F)$, on ait la majoration

$$|N\sigma(x_n)|_p^t\leqslant\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p)\max_{i,n}(|\sigma(H_{in}(x))|_p).$$

Alors,

$$|N|_p|\sigma(x_n)|_p^t\leqslant\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p)\max(|\sigma(x_0)|,\dots,|\sigma(x_n)|)^{t-d},$$

d'où une majoration

$$\max(|\sigma(x_0)|_p,\dots,|\sigma(x_n)|_p)^d\leqslant|N|_p^{-1}\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p).$$

Pour les valeurs absolues archimédiennes, il existe de même un nombre réel $C > 0$ tel que

$$\max(|\sigma(x_0)|_\infty,\dots,|\sigma(x_n)|_\infty)^d \leqslant C\,|N|_\infty^{-1}\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_\infty,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_\infty),$$

pour tout corps de nombres $K$ contenant $F$, tout point $x = [x_0 : \cdots : x_k] \in X(K)$ et tout plongement de $K$ dans $\mathbf{C}$

Mettant bout à bout ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} dh([x_0:\cdots:x_k]) \leqslant \log C + \sum_{p\leqslant\infty} \log|N|_p^{-1} \\ + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{p\leqslant\infty}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}_p} \log\max(\left|\sigma(f_0(x))\right|_p,\dots,\left|\sigma(f_m(x))\right|_p). \end{aligned}$$

Autrement dit, $dh(x) \leqslant \log C + h(f(x))$, ainsi qu'il fallait démontrer. □

### 1.3/3. Hauteurs, plongements, fibrés en droites

Considérons maintenant une variété projective $X$, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. À tout plongement $\varphi$ de $X$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^k$ est associée une fonction hauteur sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$, définie par $h_\varphi(x) = h_{\mathbf{P}^k}(\varphi(x))$ pour $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, où $h_{\mathbf{P}^k}$ désigne la hauteur sur $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ construite précédemment. Cette définition ne requiert que le fait que $\varphi$ soit une application régulière et s'étend donc *verbatim* aux morphismes $\varphi$ de $X$ dans un espace projectif. En fait, nous allons voir que $h_\varphi$ ne dépend essentiellement que du fibré en droites $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ sur $X$ déduit du fibré tautologique $\mathscr{O}(1)$ sur l'espace projectif.

LEMME 1.3.5. — *Soit $X$ une variété projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^k$ et $\psi\colon X \to \mathbf{P}^m$ des morphismes de $X$ dans des espaces projectifs. Si $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ et $\psi^*\mathscr{O}(1)$ sont isomorphes, la différence $h_\varphi - h_\psi$ des hauteurs associées à $\varphi$ et $\psi$ est une fonction* bornée *sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

*Démonstration.* — Notons $\mathscr{L}$ le fibré en droites $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ ; par construction, il est engendré par ses sections globales et définit un morphisme $\alpha$ de $X$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^s$ associé à une base de l'espace vectoriel de ses sections globales — c'est le morphisme fourni par le système linéaire complet associé à $\mathscr{L}$. Il existe alors des applications rationnelles définies par des polynômes homogènes de degré 1, $\varphi'\colon \mathbf{P}^s \dashrightarrow \mathbf{P}^k$ et $\psi'\colon \mathbf{P}^s \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ telles que $\varphi = \varphi'\circ\alpha$ et $\psi = \psi'\circ\alpha$. En outre, le lieu d'indétermination de $\varphi'$ et $\psi'$ ne rencontre pas $\alpha(X)$. (De manière équivalente, les images réciproques par $\varphi$ et $\psi$ du système linéaire des hyperplans de $\mathbf{P}^k$, resp. $\mathbf{P}^m$, sont, par définition de $\mathscr{L}$, des sous-systèmes linéaires de celui associé à $\mathscr{L}$, et sont sans point-base.) D'après la prop. 1.3.4, la fonction $h_{\mathbf{P}^s} - h_{\mathbf{P}^k}\circ\varphi'$ est bornée sur $\alpha(X)(\overline{\mathbf{Q}})$, de même que la fonction $h_{\mathbf{P}^s} - h_{\mathbf{P}^m}\circ\psi'$. Par conséquent,

$$h_\varphi - h_\psi = h_{\mathbf{P}^k}\circ\varphi'\circ\alpha - h_{\mathbf{P}^m}\circ\psi'\circ\alpha$$

est bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. □

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{R}$ et soit $\mathscr{F}_b$ son sous-espace vectoriel constitué des fonctions bornées. Notons $\mathscr{M}(X)$ l'ensemble des morphismes de $X$ dans un espace projectif et $\operatorname{Pic}(X)$ le groupe abélien des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur $X$.

À $\varphi \in \mathscr{M}(X)$, nous pouvons associer d'une part la fonction $h_\varphi$, ou plutôt sa classe $[h_\varphi]$ modulo $\mathscr{F}_b$, et d'autre part la classe d'isomorphisme $[\varphi^*\mathscr{O}(1)]$ du fibré en droite $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ sur $X$. D'après le lemme ci-dessus, $[h_\varphi]$ ne dépend que de $[\varphi^*\mathscr{O}(1)]$. Plus précisément, on a le théorème :

THÉORÈME 1.3.6. — *Il existe un unique homomorphisme de groupes $\eta$ de* $\operatorname{Pic}(X)$ *dans $\mathscr{F}/\mathscr{F}_b$, noté $\mathscr{L} \mapsto \eta_{\mathscr{L}}$, qui, pour tout morphisme $\varphi$ de $X$ dans un espace projectif, applique la classe d'isomorphisme du fibré en droites* $\varphi^*\mathscr{O}(1)]$ *sur la classe de la fonction $h_\varphi$ modulo l'espace $\mathscr{F}_b$ des fonctions bornées sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

*Démonstration.* — Un tel homomorphisme est prescrit sur les classes de fibrés en droites de la forme $\varphi^*\mathscr{O}(1)$, où $\varphi$ est un morphisme, *a fortiori* sur les fibrés en droites très amples qui sont de cette forme en prenant pour $\varphi$ un plongement. Comme tout élément de $\operatorname{Pic}(X)$ est la différence de deux classes de fibrés en droites très amples, il n'y a au plus qu'un tel homomorphisme.

Notons $\operatorname{Pic}^+(X)$ le sous-monoïde de $\operatorname{Pic}(X)$ formé des classes de diviseurs engendrés par leurs sections globales. Ce sont exactement les images réciproques du faisceau $\mathscr{O}(1)$ par un morphisme de $X$ dans un espace projectif. D'après le lemme ci-dessus, il existe donc une unique application de $\operatorname{Pic}^+(X)$ dans $\mathscr{F}/\mathscr{F}_b$ qui associe à la classe de $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ celle de la fonction $h_\varphi$, pour tout morphisme $\varphi$ de $X$ dans un espace projectif. Notons $D \mapsto \eta_D$ cette application.

Montrons qu'elle est additive. Soit donc $\varphi$ et $\psi$ des morphismes de $X$ dans des espaces projectif $\mathbf{P}^k$ et $\mathbf{P}^m$ et considérons la composition

$$\alpha\colon X \xrightarrow{(\varphi,\psi)} \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^m \xrightarrow{S} \mathbf{P}^{km+k+m},$$

où $S$ désigne le plongement de Segre. Le comportement du morphisme de Segre vis à vis des hauteurs implique l'égalité $h_\alpha = h_\varphi + h_\psi$. D'autre part, le fait qu'il soit défini par des polynômes homogènes de bidegré $(1,1)$ implique que $S^*\mathscr{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel externe des deux fibrés $\mathscr{O}(1)$. Par suite, $\alpha^*\mathscr{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel $\varphi^*\mathscr{O}(1)\otimes\psi^*\mathscr{O}(1)$. Si $D$ et $E$ désignent les classes de $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ et $\psi^*\mathscr{O}(1)$, $\eta_{D+E}$ est donc la classe de $h_\alpha = h_\varphi + h_\psi$, laquelle est la somme des classes $\eta_D$ et $\eta_E$.

L'existence d'un homomorphisme de groupes $\eta\colon \operatorname{Pic}(V) \to \mathscr{F}/\mathscr{F}_b$ vérifiant les propriétés exigées par le théorème résulte maintenant d'un argument élémentaire de différence. □

Soit $X$ une variété projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $X$. On appellera *hauteur relative à $\mathscr{L}$* toute fonction de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{R}$ dont la classe modulo les fonctions bornées est égale à $\eta_{\mathscr{L}}$. Deux telles fonctions diffèrent d'une fonction bornée. Si $\mathscr{L}$ est ample (ou plus généralement engendré par ses sections globales), toute hauteur relative à $\mathscr{L}$ est minorée.

Une conséquence de la construction est la propriété suivante :

PROPOSITION 1.3.7. — *Soit $f\colon X\to Y$ un morphisme de variétés algébriques définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$, soit $\mathscr{M}$ un fibré en droites sur $Y$. Pour toute hauteur $h_{\mathscr{M}}$ relative à $\mathscr{M}$ sur $Y$, $h_{\mathscr{M}}\circ f$ est une hauteur relative à $f^*\mathscr{M}$ sur $X$.*

*Démonstration.* — Par un argument de différence, il suffit de traiter le cas d'un fibré très ample. On peut donc supposer qu'il existe un plongement $\varphi$ de $Y$ dans un espace projectif tel que $\mathscr{M}\simeq\varphi^*\mathscr{O}(1)$. Alors, $\psi=\varphi\circ f$ est un morphisme de $X$ dans un espace projectif et l'on a $\psi^*\mathscr{O}(1)\simeq f^*\mathscr{M}$. Par définition, $h_\psi=h_\varphi\circ f$ est donc une hauteur relative à $f^*\mathscr{M}$. Comme $h_{\mathscr{M}}$ est une hauteur relative à $\mathscr{M}$, $h_{\mathscr{M}}-h_\varphi$ est une fonction bornée, ce qui implique que $h_{\mathscr{M}}\circ f-h_\psi$ est bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. □

## §1.4. Finitude

Le théorème principal de ce paragraphe généralise la proposition 1.1.2.

THÉORÈME 1.4.1. — *Pour tout entier $d\geqslant 1$ et tout nombre réel $B$, l'ensemble des points $x\in\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ définis sur un corps de nombres de degré au plus $d$ et dont la hauteur est au plus $B$ est fini.*

Quelques commentaires sur l'expression « définis sur un corps de nombres de degré au plus $d$ » et sur le corps de définition d'un point de l'espace projectif. Soit $x\in\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ et soit $[x_0:\dots:x_k]$ un système de coordonnées homogènes de $x$, dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Dire que $x$ est défini sur un corps de nombres $K$ signifie que $x\in\mathbf{P}^k(K)$, autrement dit que $x$ admet un système $[\xi_0:\dots:\xi_k]$ de coordonnées homogènes dans $K$. De la proportionalité des deux systèmes résulte que $x$ est défini sur $K$ si et seulement si $x_i/x_j\in K$ pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\{0,\dots,k\}$ tels que $x_j\neq 0$. Dit autrement, si, disons $x_0\neq 0$, le corps $\mathbf{Q}(x_1/x_0,\dots,x_k/x_0)$ est le plus petit corps de nombres sur lequel $x$ soit défini. On l'appelle le corps de définition de $x$ et on le note $\mathbf{Q}(x)$.

La théorie de Galois fournit une autre façon de voir ce corps. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ des automorphismes de $\overline{\mathbf{Q}}$ agit sur $\mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ via, rappelons-le, sur son action sur les coordonnées homogènes : si $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et $x=[x_0:\dots:x_k]\in\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, $\sigma(x)=[\sigma(x_0):\dots:\sigma(x_k)]$. Le stabilisateur du point $x$ est exactement le sous-groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(x))$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Notons $d$ le degré du corps $\mathbf{Q}(x)$ et soit $\sigma_1,\dots,\sigma_d$ une famille de représentants de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ modulo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(x))$. (Leurs restrictions au corps $\mathbf{Q}(x)$ sont exactement les $d$ homomorphismes de corps de $\mathbf{Q}(x)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$.) L'orbite de $x$ sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est alors formée des $d$ points $\sigma_1(x),\dots,\sigma_d(x)$, que l'on appelle les conjugués de $x$.

*Démonstration.* — Pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\{0,\dots,k\}$, notons $p_{ij}$ la projection de $\mathbf{P}^k$ sur $\mathbf{P}^1$ donnée par $[x_0:\dots:x_k]\mapsto[x_i:x_j]$ ; elle est définie hors du sous-espace projectif $P_{ij}$ de codimension 2 donné par l'annulation des coordonnées homogènes $x_i$ et $x_j$.

Si $x\in(\mathbf{P}^n\setminus P_{ij})(\overline{\mathbf{Q}})$, on a démontré que $h(p_{ij}(x))\leqslant h(x)$. En outre, $p_{ij}(x)$ est défini sur $\mathbf{Q}(x)$, ainsi qu'il résulte de la description du corps de définition d'un point de l'espace projectif rappelée ci-dessus.

Supposons établi le théorème lorsque $n = 1$ ; alors, l'ensemble des projections $p_{ij}(x)$, pour $x \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ défini sur un corps de degré au plus $d$ et de hauteur au plus $B$, est fini. Autrement dit, les quotients $x_i/x_j$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, d'où la finitude annoncée.

Il reste à montrer le cas $n = 1$. Introduisons un morphisme $\theta$ de $(\mathbf{P}^1)^d$ dans $\mathbf{P}^d$ donnée par

$$\theta([x_0^{(1)} : x_1^{(1)}], \dots, [x_0^{(d)} : x_1^{(d)}]) = [z_0 : \cdots : z_d],$$

où les $z_j$ sont définis par la relation

$$\prod_{i=1}^d (x_0^{(i)} + T x_1^{(i)}) = \sum_{j=0}^d z_j T^j,$$

où $T$ est une indéterminée. En d'autres termes, on a, pour $j \in \{0, \dots, d\}$,

$$z_j = \sum_{\substack{\varepsilon\colon \{1,\dots,d\}\to\{0,1\} \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_d = j}} x_{\varepsilon_1}^{(1)} \dots x_{\varepsilon_d}^{(d)},$$

versions homogènes des fonctions symétriques élémentaires puisque

$$\frac{z_j}{z_0} = \sum_{i_1<\cdots<i_j} \xi^{(i_1)} \dots \xi^{(i_j)},$$

où $\xi^{(i)} = x_1^{(i)}/x_0^{(i)}$.

Le fibré en droite $\theta^*\mathscr{O}(1)$ est isomorphe au produit tensoriel externe des fibrés $\mathscr{O}(1)$ sur chacune des copies de $\mathbf{P}^1$, car $\theta$ est définie par des formes de multidegré $(1, \dots, 1)$. Il en résulte qu'à une fonction bornée près,

$$\sum_{i=1}^d h(x^{(i)}) \approx h(\theta(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}))$$

pour tout $(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})^d$.

Soit maintenant $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ dont le corps de définition $\mathbf{Q}(x)$ est de degré $d$. Notons $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$ les éléments de son orbite sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et appliquons la relation au $d$-uplet $[x] = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$. Comme la hauteur est invariante sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (prop. 1.2.2) il en résulte l'exitence d'un nombre réel $c$ tel que

$$dh(x) - c \leqslant h(\theta([x])) \leqslant dh(x) + c,$$

pour $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$.

Le point important est que $\theta([x])$ est, par construction même, invariant sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. C'est donc un point de $\mathbf{P}^d(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus $dh(x) \leqslant dB + c$. (De fait, lorsque $x_0 \neq 0$, $\theta([x])$ n'est autre que la collection des coefficients du polynôme minimal de $x_1/x_0$.)

Comme l'ensemble des points de $\mathbf{P}^d(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus $dB$ est fini (proposition 1.1.2), l'ensemble des $\theta([x])$, pour $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur au plus $B$ et définis sur une extension de degré $d$ de $\mathbf{Q}$ est fini. L'application $\theta$ n'est pas injective mais ses fibres ont cardinal au plus $d!$. En effet, la connaissance de $(z_0, \dots, z_d)$ détermine celle de $(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(d)})$ à l'ordre près : ce sont les opposés des inverses des racines du polynôme $\sum z_j T^j$. Plus précisément, la connaissance de $\theta([x])$, c'est-à-dire, si $x_0 \neq 0$, du polynôme minimal de $x_1/x_0$, détermine $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ à un choix parmi $d$ près : celui d'une racine de ce polynôme de degré $d$.

Par conséquent, l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur au plus $B$ et définis sur une extension de degré $d$ de $\mathbf{Q}$ est fini, ce qu'il fallait démontrer. □

COROLLAIRE 1.4.2. — *Soit $X$ une variété projective sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites ample sur $X$. Notons $h_{\mathscr{L}}$ une hauteur relative à $\mathscr{L}$ sur $X$. Pour tout entier $d$ et tout nombre réel $B$, l'ensemble des points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ définis sur une extension de degré au plus $d$ et de hauteur au plus $B$ est fini.*

*Démonstration.* — Par définition, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\mathscr{L}^{\otimes m}$ soit très ample, c'est-à-dire isomorphe au fibré en droite $\varphi^*\mathscr{O}(1)$, où $\varphi$ est un plongement de $X$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^k$. Par construction de la machine des hauteurs, $mh_{\mathscr{L}} - h_\varphi$ est une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. Comme $\varphi$ est injectif, on voit que l'assertion résulte de l'énoncé de finitude sur $\mathbf{P}^k$. □

## §1.5. Hauteurs locales et fonctions de Green

La formule (1.2.7) qui définit la hauteur d'un point de l'espace projectif à coefficients dans un corps de nombres $K$ est une somme indexée sur les différents plongements de $K$ dans les corps $\mathbf{C}_p$, où $p$ parcourt l'ensemble des nombres premier et $\infty$. Cependant, chacun de ces termes n'est pas une fonction sur l'espace projectif car ils dépendent du choix des coordonnées homogènes ; seule leur somme n'en dépend plus, en vertu de la formule du produit.

La théorie des fonctions de Green permet d'exprimer la hauteur d'un point comme somme de termes locaux (« *hauteurs locales* ») bien définis.

### 1.5/1. Définition

Soit $K$ un corps valué complet et algébriquement clos, soit $X$ une variété projective définie sur $K$ et soit $D$ un diviseur de Cartier effectif sur $X$. (Rappelons qu'il s'agit d'un sous-schéma fermé qui est localement définie par une équation non-diviseur de zéro.)

On appelle *fonction de Green* relativement à $D$ sur $X$ toute fonction continue $\lambda_D \colon (X \setminus D)(K) \to \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

– si $D$ est très ample, il existe un plongement de $X$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ tel que $D = X \cap H_0$, où $H_0 = \{x_0 = 0\}$, et tel que la fonction donnée par

$$x \mapsto \lambda_D(x) + \log \frac{|x_0|}{\max(|x_0|,\dots,|x_n|)}$$

s'étende (de manière unique car $X \setminus D(K)$ est dense dans $X(K)$) en une fonction continue et bornée sur $X(K)$.

– si $D = E - F$ est la différence de deux diviseurs très amples, il existe des fonctions de Green $\lambda_E$ et $\lambda_F$ relativement à $E$ et $F$ comme ci-dessus telles que $\lambda_D = \lambda_E - \lambda_F$ sur $(X \setminus (E \cup F))(K)$.

LEMME 1.5.1. — *L'ensemble des fonctions de Green relativement à un diviseur de Cartier $D$ est un espace affine sous l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $X(K)$.*

*Démonstration.* — Soit $D$ et $E$ des diviseurs très amples et soit $\lambda_D$, $\lambda_E$ des fonctions de Green définies par des plongements $\varphi$ et $\psi$. On vérifie que la composition de $(\varphi, \psi)$ et d'un plongement de Segre $S$ définit la fonction $\lambda_D + \lambda_E$, à une fonction continue bornée près.

Par un argument élémentaire, il suffit alors de démontrer que la différence de deux hauteurs locales associées à un diviseur très ample s'étend en une fonction continue bornée sur $X(K)$. Soit $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^n$ et $\psi\colon X \to \mathbf{P}^m$ des plongements tels que $D = \varphi^* H_0 = \psi^* H_0$, où $H_0$ est l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$ dans $\mathbf{P}^n$, resp. d'équation $y_0 = 0$ dans $\mathbf{P}^m$. En particulier, ces deux plongements sont associés à un plongement $\alpha\colon X \to \mathbf{P}^s$ défini par le système linéaire complet associé à $D$ composés avec des projections linéaires $\varphi'$ et $\psi'$ dont les centres ne rencontrent pas $\alpha(X)$. Par hypothèse, $\varphi'_0 - \psi'_0$ s'annule identiquement sur $\alpha(X)$. En outre, les formes linéaires $(\varphi'_0, \dots, \varphi'_n)$ définissant $\varphi'$, resp. $[\psi'0 : \dots : \psi'_m]$ définissant $\psi'$ ne s'annulent pas simultanément sur $\alpha(X)$. Il en résulte que l'application

$$\mu\colon y = [y_0 : \dots : y_s] \mapsto \log \frac{\max(|\varphi'_0(y)|, \dots, |\varphi'_n(y)|)}{\max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|)}$$

est bien définie — numérateur et dénominateur sont homogènes — et continue sur $\alpha(X)$. Si $K$ est localement compact, en l'occurrence si $K = \mathbf{C}$, elle est alors bornée. Dans le cas général, il faut une fois de plus utiliser le théorème des zéros de Hilbert.

L'existence d'une *majoration*

$$\max(|\varphi'_0(y)|, \dots, |\varphi'_n(y)|) \leqslant c \max(|y_0|, \dots, |y_s|)$$

est évidente. Soit $(P_j)$ une famille de polynômes homogènes définissant $\alpha(X)$. La famille $(P_j, \psi'_i)$ n'ayant pas de zéro commun, il existe des polynômes $Q_{jk}$ et $H_{ik}$, et un entier $t$ tels que

$$Y_k^t = \sum_k Q_{jk} P_j + \sum_{i=0}^m \psi'_i H_{ik}.$$

On peut supposer ces polynômes homogènes ; les polynômes $H_{ik}$ sont homogènes de degré $t-1$. De cela découle une majoration Par suite, il existe un nombre réel $c$ tel que

$$|y_k|^t \leqslant c \max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|) \max_{i,k} |H_{ik}(y)|.$$

Comme $H_{ik}$ est de degré $t-1$, il existe en outre une majoration $|H_{ik}(y)| \ll \max(|y_0|, \dots, |y_s|)^{t-1}$. Finalement, on en déduit une *minoration*

$$\max(|\psi'_0(y)|, \dots, |\psi'_m(y)|) \geqslant c' \max(|y_0|, \dots, |y_s|).$$

Le fait que $\mu$ soit bornée est alors évident. □

PROPOSITION 1.5.2. — *Soit $X$ une variété projective sur $K$, soit $D$ et $E$ des diviseurs de Cartier sur $X$ et soit $\lambda_D$, $\lambda_E$ des fonctions de Green pour $D$ et $E$ respectivement. Alors, les fonctions $\lambda_D+\lambda_E$ et $\lambda_D-\lambda_E$ sont les restrictions à $X\setminus(D\cup E)(K)$ de fonctions de Green pour $D+E$ et $D-E$ respectivement.*

*Démonstration.* — Compte tenu de la définition, il suffit de traiter le cas de $D+E$ sous l'hypothèse que $D$ et $E$ sont très amples, associés à des plongements $\varphi\colon X\hookrightarrow \mathbf{P}^k$ et $\psi\colon X\hookrightarrow\mathbf{P}^m$ tels que $D$ est défini par $x_0=0$ dans $\varphi(X)$ et $E$ est défini par $y_0=0$ dans $\psi(X)$. Considérons la composition $\alpha$ de $(\varphi,\psi)$ et du plongement de Segre $S\colon \mathbf{P}^k\times\mathbf{P}^m\hookrightarrow\mathbf{P}^{kmk+m}$, donné par $S([x_0:\cdots:x_k],[y_0:\cdots:y_m])=[x_0y_0:\cdots:x_ky_m]$. Dans $\alpha(X)$, l'équation $z_0=0$ définit le diviseur de Cartier $D+E$. L'assertion résulte alors de l'égalité

$$\log\frac{|x_0y_0|}{\max(|x_iy_j|)}=\log\frac{|x_0|}{\max(|x_i|)}+\log\frac{|y_0|}{\max(|y_j|)},$$

valable pour tout couple de points $(x,y)\in\mathbf{P}^k(K)\times\mathbf{P}^m(K)$ tels que $x_0\neq0$ et $y_0\neq0$. □

PROPOSITION 1.5.3. — *Soit $f\colon X\to Y$ un morphisme entre variétés projectives sur $K$, soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$, soit $E$ un diviseur de Cartier sur $Y$. On suppose que $D=f^*E$. Si $\lambda_E$ est une fonction de Green relativement à $E$ sur $Y$, alors $\lambda_E\circ f$ est une fonction de Green relativement à $D$ sur $X$.*

*Démonstration.* — Il suffit de traiter le cas où $E$ est très ample, associé à un plongement $\psi$ de $Y$ dans $\mathbf{P}^m$ et tel que $E$ soit défini par l'équation $y_0=0$ dans $\psi(Y)$. Soit $D'$ un diviseur de Cartier très ample sur $X$, associé à un plongement $\varphi$ de $X$ dans $\mathbf{P}^k$ de sorte que $D'$ soit défini par l'équation $x_0=0$ dans $\varphi(X)$. Introduisons alors la composition $\alpha$ de $(\varphi,\psi\circ f)\colon X\to\mathbf{P}^k\times\mathbf{P}^m$ et du plongement de Segre vers $\mathbf{P}^{km+k+m}$. C'est un plongement et l'équation $z_0=0$ définit $D'+f^*E=D'+D$ dans $\alpha(X)$. Pour $x\in X$ de coordonnées homogènes $[x_0:\cdots:x_k]$ et d'images $y=f(x)=[y_0:\cdots:y_m]$ dans $Y$ et $z=\alpha(x)=[z_0:\cdots:z_{km+k+m}]$ dans $\mathbf{P}^{km+k+m}$, on a alors

$$\log\frac{|z_0|}{\max(|z_i|)}=\log\frac{|x_0|}{\max(|x_i|)}+\log\frac{|y_0|}{\max(|y_j|)}.$$

Si $\lambda_{D'}$ est une fonction de Green pour $D'$, il en résulte que $\lambda_{D'}+\lambda_E\circ f$ est une fonction de Green pour $D'+f^*E$ ; par conséquent, $\lambda_E\circ f$ est une fonction de Green pour $E$.(2) □

### 1.5/2. Cas du corps C

Le fibré en droites $\mathscr{O}(D)$ a pour sections locales les fonctions méromorphes $f$ ayant au plus $D$ comme pôle, c'est-à-dire telles que $\operatorname{div}(f)+D$ soit effectif. Si $D$ est effectif, la fonction régulière constante 1 définit en particulier une section globale de ce fibré en droites que l'on note $\mathbf{1}_D$ et dont le diviseur n'est autre que $D$.

Supposons que le corps valué soit le corps des nombres complexes. Soit $X$ une variété projective complexe, soit $D$ un diviseur de Cartier de $X$ et soit $\lambda_D\colon (X\setminus D)(\mathbf{C})\to\mathbf{R}$ une fonction continue. Pour que $\lambda_D$ soit une hauteur locale relativement à $D$, il faut

(2) Voir l'exercice 1.6.11 pour un point de détail nécessaire à une preuve complète.

et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert fini $(U_1,\dots,U_k)$ tel que $D$ soit défini par une équation $f_i$ sur $U_i$ et que la fonction $\lambda_D+\log\left|f_i\right|$ s'étende en une fonction continue sur $U_i$. Il revient ainsi au même d'exiger qu'il existe une *métrique hermitienne continue* sur le fibré en droites $\mathscr{O}(D)$ telle que $\log\|\mathbf{1}_D\| = \lambda_D$.

Notons par exemple que la métrique hermitienne de référence que nous avons choisie sur le fibré $\mathscr{O}(1)$ de l'espace projectif $\mathbf{P}^k$ est donnée par la formule

$$\|a_0X_0+\cdots+a_kX_k\|([x_0:\cdots:x_k]) = \frac{|a_0x_0+\cdots+a_kx_k|}{\max(|x_0|,\dots,|x_k|)}.$$

Ce n'est pas tout à fait la métrique de Fubini-Study, laquelle est donnée par

$$\|a_0X_0+\cdots+a_kX_k\|([x_0:\cdots:x_k]) = \frac{|a_0x_0+\cdots+a_kx_k|}{(|x_0|^2+\cdots+|x_k|^2)^{1/2}}.$$

On voit que l'on peut ainsi définir la notion de fonction de Green $\mathscr{C}^\infty$, parallèlement à celle de métrique hermitienne $\mathscr{C}^\infty$.

La formule classique $dd^c\log|z|^{-2}+\delta_0=0$ en une variable, ou la formule de Poincaré-Lelong $dd^c\log\left|f\right|^{-2}+\delta_{\operatorname{div}(f)}=0$ entraînent que $dd^cg_D+\delta_D$ est une forme différentielle de type $(1,1)$, lisse, pourvu que $g_D$ soit une fonction de Green $\mathscr{C}^\infty$. On a noté $\delta_D$ le courant d'intégration sur $D$, défini, au choix, ou bien par intégration des formes sur la partie lisse de $D$, ou bien par résolution des singularités. C'est un courant positif fermé sur $X$, de bidegré $(1,1)$.

On retrouve alors la définition standard en géométrie d'Arakelov telle que posée par GILLET & SOULÉ (1990).

DÉFINITION 1.5.4. — *Soit $X$ une variété projective complexe (lisse) et soit $Z$ une sous-variété intègre de $X$ de codimension $p$. On appelle courant de Green pour $Z$ tout courant $g_Z$ sur $X(\mathbf{C})$ tel que $dd^cg_Z+\delta_Z$ soit une forme lisse de type $(p,p)$.*

Revenons aux fonctions de Green associées à un diviseur $D$. Soit $g_D$ une telle fonction de Green, supposons-la lisse, ou au moins de classe $\mathscr{C}^2$, de sorte qu'est définie la forme différentielle $\omega_D = dd^cg_D+\delta_D$.

Alors $\bigwedge^k\omega_D$ est une forme de type $(k,k)$ sur $X(\mathbf{C})$ à laquelle on associe naturellement une mesure sur $X(\mathbf{C})$.

On vérifie par une nouvelle application de la formule de Poincaré-Lelong que cette forme $\omega_D$ et cette mesure $\bigwedge^k\omega_D$ ne dépendent du couple $(D,g_D)$ que par l'intermédiaire du fibré hermitien qu'il définit. Elles coïncident d'ailleurs avec la forme de Chern de ce fibré hermitien et sa puissance extérieure maximale.

Dans le cas d'un corps $p$-adique, la situation est plus délicate pour un certain nombre de raisons :

– $\mathbf{C}_p$ n'est pas localement compact ;
– l'opérateur aux dérivées partielles $dd^c$ n'existe pas, pas plus d'ailleurs que les courants ;
– les mesures naturelles n'existent pas.

La théorie de ZHANG (1995*b*) fournit néanmoins une bonne notion de métrique $p$-adique. On résout (simultanément) ces trois problèmes à l'aide de la théorie des espaces analytiques introduits par BERKOVICH (1990), cf. GUBLER (1998, 2003) et CHAMBERT-LOIR (2006).

### 1.5/3. Décomposition de la hauteur en termes locaux

Soit $X$ une variété projective sur un corps de nombres $K$ et soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$. Il s'agit d'écrire la hauteur d'un point de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'appartient pas à $D$, relativement au fibré $\mathscr{O}(D)$, comme une somme de termes locaux indexée par l'ensemble $M_K$ des places de $K$.

Si $v$ est une place de $K$, nous noterons $\mathbf{C}_v$ le corps valué complet algébriquement clos $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_p$ correspondant et $\varepsilon_v$ le nombre de plongements de $K$ dans $\mathbf{C}_v$ qui induisent cette valeur absolue. L'adhérence $K_v$ de $K$ dans $\mathbf{C}_v$ est un corps valué complet (égal à $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}_p$ pour $p$ un nombre premier, ou une extension finie d'un de ces corps). Nous noterons $\overline{K_v}$ la clôture algébrique de $K_v$ dans $\mathbf{C}_v$.

Soit $v$ une place de $K$. Soit $g_v$ une fonction de Green sur $X(\mathbf{C}_v)$ relativement à $D$ (nous dirons aussi que $g_v$ est une fonction de Green $v$-adique). On définit une *hauteur locale* relativement à $D$ de la façon suivante. Soit $P \in (X \setminus D)(\overline{K_v})$ ; soit $n$ son degré sur $K$ et soit $P_1, \dots, P_n$ ses conjugués dans $X(\mathbf{C}_v)$. On pose

$$h_v(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_v(P_i).$$

Si $D$ est effectif et très ample, nous dirons qu'une famille $(g_v)$ de fonctions de Green $v$-adiques relativement à $D$, indexée par l'ensemble $M_K$ des places de $K$ est *élémentairement admissible* si pour presque toute place $v$, $g_v$ est définie par un même plongement (défini sur $K$) de $X$ dans un espace projectif dont $D$ est une section hyperplane. Dans le cas général, $D$ est la différence $E_F$ de deux diviseurs effectifs très amples et nous dirons qu'une famille $(g_v)$ est *admissible* si l'on a $g_v = g_{E,v} - g_{F,v}$ pour tout $v$, où $(g_{E,v})_v$ et $(g_{F,v})_v$ sont des familles élémentairement admissibles de fonctions de Green pour $E$ et $F$ respectivement.

Le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, montre que l'ensemble des familles admissibles de fonctions de Green est stable par les opérations standard de la géométrie algébrique.

LEMME 1.5.5. — *Soit $X$ une variété algébrique projective sur un corps de nombres $K$.*

a) *Soit $(g_v)$ et $(g'_v)$ des familles de fonctions de Green (élémentairement) admissible relativement à des diviseurs $D$ et $D'$. La famille $(g_v + g'_v)$ est une fonction de Green (élémentairement) admissible relativement à $D + D'$.*

b) *Soit $X'$ une variété algébrique projective, intègre, définie sur $K$, soit $f : X' \to X$ un morphisme et soit $D$ un diviseur sur $X$ tel que $f(X') \not\subset D$. Si $(g_v)$ est une famille de fonctions de Green (élémentairement) admissible relativement à $D$, $(g_v \circ f)$ est une famille de fonctions de Green (élémentairement) admissible relativement au diviseur $f^*D$.*

PROPOSITION 1.5.6. — *Soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$, soit $h_D$ une hauteur pour $D$ et soit $(g_v)$ une famille admissible de fonctions de Green pour le diviseur $D$. Alors, la série $h(x) = \sum_{v\in M_K} \varepsilon_v h_v(x)$ est une somme finie pour tout $x \in (X \setminus D)(\overline{\mathbf{Q}})$ ; de plus, $h - h_D$ est bornée sur $(X \setminus D)(\overline{\mathbf{Q}})$.*

*Démonstration.* — Par linéarité, on se ramène au cas où le diviseur $D$ est très ample et où $(g_v)$ est une famille élémentairement admissible de fonctions de Green. Soit $\varphi\colon X \hookrightarrow \mathbf{P}^k$ un plongement de $X$ dans un espace projectif dont $D$ est la section hyperplane $\{X_0 = 0\}$ et définissant presque toutes les fonctions de Green. Pour toute place $v$ et tout point $x \in (X \setminus D)(\mathbf{C}_v)$, le point $\varphi(x)$ a des coordonnées homogènes $[x_0 : \ldots : x_k]$ avec $x_0 \neq 0$ ; posons alors

$$g_v^0(x) = g_v(x) + \log \frac{|x_0|_v}{\max(|x_0|_v, \ldots, |x_k|_v}.$$

Par définition, pour toute place $v$, la fonction $g_v^0$ est bornée, et est identiquement nulle pour presque toute place $v$.

Soit alors $K'$ un corps de nombres contenant $K$ et soit $x \in (X \setminus D)(K')$, de conjugués $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ sur $K$. Si $\varphi(x)$ a pour coordonnées homogènes $[x_0 : \ldots : x_k]$, on a donc $x_0 \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
h_\varphi(x) = h_{\mathbf{P}^k}(\varphi(x)) &= \frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma\colon K' \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log\max\big(|\sigma(x_0)|, \ldots, |\sigma(x_k)|_p\big) \\
&= -\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_{p \leqslant \infty} \sum_{\sigma\colon K' \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \frac{|\sigma(x_0)|}{\max\big(|\sigma(x_0)|, \ldots, |\sigma(x_k)|_p\big)} \\
&= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^{n} \sum_{v\in M_K} (g_v^0(x^{(i)}) - g_v(x^{(i)}) \\
&= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^{n} \sum_{v\in M_K} g_v^0(x^{(i)}) + \frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v\in M_K} \sum_{i=1}^{n} g_v(x^{(i)}) \\
&= -\frac{1}{n[K : \mathbf{Q}]} \sum_{i=1}^{n} \sum_{v\in M_K} g_v^0(x^{(i)}) + \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v\in M_K} \hat{h}_v(x).
\end{aligned}$$

La proposition résulte alors de ce que la première somme est bornée indépendamment de $x$. □

### 1.5/4. La hauteur détermine les fonctions de Green

Soit $X$ une variété algébrique projective sur un corps de nombres, soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$ et soit $h_D$ une hauteur pour $D$. Il est naturel de se demander dans quelle mesure $h_D$ détermine $D$. Suivant qu'on se donne $h_D$ exactement, ou à $\mathrm{O}(1)$, la réponse est fournie par le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5.7. — *Soit $X$ une variété projective lisse sur un corps de nombres $K$ ; soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$ et soit $h_D$ une hauteur pour $D$.*

a) *Supposons que $h_D$ soit bornée ; alors la classe de $D$ est de torsion dans le groupe de Picard de $X$ : il existe un entier $n$ et une fonction rationnelle $f$ sur $X$ telle que $nD =$* $\operatorname{div}(f)$.

b) *Supposons que $h_D$ possède une décomposition en somme de termes locaux, donnés par une famille admissible $(g_v)$ de fonctions de Green pour le diviseur $D$. Si $h_D$ est constante, chacune des fonctions $g_v$ est constante.*

Ce théorème est dû à A. NÉRON pour la première partie, voir SERRE (1997), §2.9 et 3.11, et à AGBOOLA & PAPPAS (2000) pour la seconde. (dans cet article, il est d'ailleurs observé qu'il suffit de supposer $X$ normale dans l'énoncé du théorème). La seconde partie est tout particulièrement intéressante dans les contextes où l'on dispose de familles admissibles canoniques de fonctions de Green, en particulier celui des systèmes dynamiques (voir KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007*a*)).

## §1.6. Exercices

*Exercice 1.6.1.* — Soit $\xi$ un nombre algébrique, soit $d$ son degré et soit $P = a_0X^d + \cdots + a_d$ le polynôme minimal. on note $\mathrm{H}(P) = \max(|a_0|, \ldots, |a_d|)$. On rappelle que la hauteur $h(\xi)$ de $\xi$ est par définition celle du point de coordonnées homogènes $[1 : \xi]$ de $\mathbf{P}^1$.

Soit $P = a_0X^d + \cdots + a_d$ un polynôme à coefficients complexes de degré $d$. On note $\mathrm{H}(P) = \max(|a_0|, \ldots, |a_d|)$.

a) Montrer que l'on a l'inégalité

$$2^{-d}\mathrm{H}(P) \leqslant \mathrm{M}(P) \leqslant \sqrt{d+1}\,\mathrm{H}(P).$$

b) En déduire que pour deux polynômes $P_1$ et $P_2$, à coefficients complexes, on a

$$\mathrm{H}(P_1)\mathrm{H}(P_2) \leqslant 2^d\sqrt{d+1}\,\mathrm{H}(P_1P_2) \tag{1.6.2}$$

$$\mathrm{H}(P_1P_2) \leqslant 2^d\big(1 + \frac{d}{2}\big)\mathrm{H}(P_1)\mathrm{H}(P_2), \tag{1.6.3}$$

où $d = \deg(P_1P_2)$.

c) Si $P$ est le polynôme minimal d'un nombre algébrique $\xi$, montrer que la hauteur $h(\xi)$ est encadrée comme suit :

$$\frac{1}{d}\log H(P) - \log 2 \leqslant h(\xi) \leqslant \frac{1}{d}\log H(P) + \frac{1}{2d}\log(d+1).$$

*Exercice 1.6.4.* — Soit $f \in \overline{\mathbf{Q}}(t)$ une fraction rationnelle non constante ; on l'écrit $P/Q$ où $P$ et $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[t]$ sont des polynômes premiers entre eux et on pose $d = \max(\deg P, \deg Q)$. Montrer que l'on a

$$\lim_{h(\xi)\to\infty} \frac{h(f(\xi))}{h(\xi)} = d.$$

*Exercice 1.6.5.* — Soit $\xi$ un entier algébrique de degré $d$ ; on note $\xi_1, \ldots, \xi_d$ ses conjugués dans $\mathbf{C}$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{j=1}^d \xi_j^n$ la $n$-ième somme de Newton. On pose aussi $\mu(\xi) = \max(|\xi_1|, \ldots, |\xi_d|)$

a) Montrer que pour tout entier $n$, $S_n$ est un entier relatif qui vérifie $|S_n| \leqslant d\mu(\xi)^n$. (Utiliser le théorème sur les fonctions symétriques.)

b) Soit $p$ un nombre entier tel que $S_n = S_{np}$ pour $1 \leqslant n \leqslant d$ ; montrer que $\xi$ est une racine de l'unité (ou $\xi = 0$).

c) Montrer que pour tout nombre premier $p$, $S_{np}$ et $S_n^p$ sont congrus à $S_n$ modulo $p$. (Observer que les coefficients du polynôme symétrique $X_1^p + \cdots + X_d^p - (X_1 + \cdots + X_d)^p$ sont multiples de $p$.)

d) On suppose que $\xi \neq 0$ et que $\xi$ n'est pas une racine de l'unité ; on va montrer que $\mu(\xi) \geqslant e^{1/4ed^2}$. Supposons par l'absurde que l'ingalité inverse soit vraie et soit $p$ un nombre preier tel que $2ed < p < 4ed$ (il en existe d'après le théorème de Tchébitcheff — postulat de BERTRAND). Montrer que $\left|S_{np} - S_n\right| < p$ pour $1 \leqslant n \leqslant d$, puis que $S_{np} = S_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant d$. En déduire que $\xi$ est une racine de l'unité.

e) Sous la même hypothèse que d), montrer que $h(\xi) \geqslant 1/4ed^3$. Pour d'autres résultats dans la même veine, voir l'exercice 2.3.5 du chapitre 2, ainsi par exemple que le livre de WALDSCHMIDT (2000).

*Exercice 1.6.6.* — Soit $p\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ la projection linéaire donnée par $p([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 : x_1]$, d'unique point d'indétermination $Q = [0 : 0 : 1]$. Soit $X$ une courbe de $\mathbf{P}^2$, d'équation homogène $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. On suppose que $X$ ne contient pas le point $Q$. Déterminez (en fonctions des coefficients de $f$) un nombre réel $c_X$ tel que $\left|h(p(x)) - h(x)\right| \leqslant c_X$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.

*Exercice 1.6.7.* — Soit $f\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ une application rationnelle donnée par trois polynômes $(f_0, f_1, f_2)$ de même degré $d$ sans facteur commun. Son lieu d'indétermination $Z$ est un ensemble fini de points. Si $X$ est une courbe de $\mathbf{P}^2$, supposée lisse ou au moins lisse en tout point de $X \cap Z$, la restriction de $f$ à $X \setminus (X \cap Z)$ s'étend en un unique morphisme $\tilde{f}$ de $X$ dans $\mathbf{P}^1$.

a) Le degré $\tilde{d}$ de $\tilde{f}$ est inférieur ou égal à $d$, en fait égal à $d - \operatorname{card}(X \cap Z)$ (cardinal compté avec multiplicités). Pour que $\tilde{d} = d$, il faut et il suffit que $X$ ne rencontre pas $Z$.

b) Il existe un nombre réel $c_X$ tel que pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, $\left|\tilde{d}h(x) - h(\tilde{f}(x))\right| \leqslant c_X$.

*Exercice 1.6.8.* — Soit $X$ une variété projective et soit $D$ un diviseur de Cartier effectif sur $X$. Soit $h_D$ une hauteur relative au fibré en droites $\mathscr{O}(D)$ sur $X$. Il existe un nombre réel $c$ tel que $h_D(x) \geqslant c$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $x \notin D$.

*Exercice 1.6.9.* — Soit $X$ une variété projective et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $X$. Soit $B$ le lieu des zéros communs de toutes les sections des puissances de $\mathscr{L}$. (Dire que $B = \varnothing$ signifie donc qu'une puissance de $\mathscr{L}$ est engendrée par ses sections globales.) Soit $h_{\mathscr{L}}$ une hauteur relative à $\mathscr{L}$ sur $X$. Il existe un nombre réel $c$ tel que $h_{\mathscr{L}}(x) \geqslant c$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'appartient pas à $B$.

*Exercice 1.6.10.* — Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $X$ tel qu'il existe un fibré en droites ample $\mathscr{M}$ de sorte que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{-1}$ soit effectif. Il existe un fermé de Zariski strict $Z$ de $X$ hors duquel la propriété de finitude pour la hauteur $h_{\mathscr{L}}$ est vérifiée.

*Exercice 1.6.11.* — Le résultat suivant était implicite dans la démonstration des énoncés de base sur les fonctions de Green.

Soit $X$ une variété projective sur un corps $K$, valué et algébriquement clos et soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$. Soit $\lambda$ une fonction d'un ouvert $U$ de $X \setminus D(K)$ dans $\mathbf{R}$ ; on suppose que $U$ est dense dans $X(K)$.

On suppose que pour tout point $x \in X(K)$, il existe un diviseur de Cartier très ample $E$ ne contenant pas $x$ et une fonction de Green $\lambda_E$ pour $E$ tels que la fonction $\lambda + \lambda_E$ s'étende (nécessairement uniquement, car $U$ est dense) en une fonction de Green pour $D + E$. Alors $\lambda$ s'étend uniquement en une fonction de Green pour $D$.

# CHAPITRE 2

# SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

## §2.1. Systèmes dynamiques polarisés

### 2.1/1. La définition et quelques exemples

Par définition, un système dynamique polarisé est la donnée d'une variété projective $X$ (pas forcément lisse), d'un endomorphisme $f$ de $X$ et d'un fibré en droites ample $\mathscr{L}$ sur $X$ tel que $f^*\mathscr{L}$ soit isomorphe à une puissance $\mathscr{L}^d$ de $\mathscr{L}$, où $d$ est un entier *supérieur ou égal à* 2.

L'entier $d$, que ZHANG (2006) propose d'appeler le *poids* de $(X, f, \mathscr{L})$, est relié au *degré de* $f$ par la formule $\deg(f) = d^{\dim X}$. On a en effet

$$c_1(f^*\mathscr{L})^{\dim X} = d^{\dim X} c_1(\mathscr{L})^{\dim X} = \deg(f) c_1(\mathscr{L})^{\dim X},$$

d'où l'assertion en divisant par $c_1(\mathscr{L})^{\dim X}$ qui n'est pas nul puisque $\mathscr{L}$ est ample.

Comme l'a noté SERRE (1960), l'action d'un tel endomorphisme sur la cohomologie de $X$ obéit à « l'analogue kählérien des conjectures de Weil ».(1) Supposant $X$ lisse, l'endomorphisme $f^*$ du groupe de cohomologie singulière $H^j(X, \mathbf{C})$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes de valeur absolue archimédienne $d^{j/2}$. En particulier, tous les *degrés dynamiques* de $f$ (définis comme les rayons spectraux de $f^*$ agissant sur la cohomologie singulière, voir les articles de CANTAT et GUEDJ) sont strictement dominés par le dernier, égal à $d^k$. L'étude des systèmes dynamiques polarisés apparaît ainsi comme un cas particulier des études plus spécifiquement dynamiques exposées dans ce volume.

Nous avons déjà donné l'exemple de l'espace projectif $\mathbf{P}^k$ et d'un endomorphisme $f$ défini par une famille $(f_0, \dots, f_k)$ de polynômes homogènes de degré $d$ sans zéro commun autre que $(0, \dots, 0)$. On a en effet $f^*\mathscr{O}(1) \simeq \mathscr{O}(d)$. Les sous-variétés de $\mathbf{P}^k$ qui sont stables par $f$ fournissent de même un système dynamique polarisé. Par un résultat de FAKHRUDDIN (2003), c'est en fait le cas général :

(1) La conjecture de Weil en question est l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques sur les corps finis : elle concerne le cas où $X$ est une variété algébrique projective lisse sur un corps fini de cardinal $q$ et $f$ est l'endomorphisme de Frobenius donné par l'élévation des coordonnées à la puissance $q$. Son poids est $q$.

PROPOSITION 2.1.1 (Fakhruddin). — *Soit* $(X, f, \mathscr{L})$ *un système dynamique polarisé défini sur un corps infini.*[2] *Il existe un plongement projectif* $\iota$ *de* $X$ *dans un espace projectif* $\mathbf{P}^k$ *tel que* $\iota^* \mathscr{O}(1)$ *soit isomorphe à une puissance de* $\mathscr{L}$, *et un endomorphisme* $F$ *de degré* $d$ *de* $\mathbf{P}^k$ *tels que* $F \circ \iota = \iota \circ f$.

(Dans ce qui suit, remplacer $\mathscr{L}$ par une puissance sera souvent inoffensif.)

*2.1.2. Systèmes dynamiques abéliens.* — Les variétés abéliennes fournissent des exemples fondamentaux de systèmes dynamiques. Considérons une variété abélienne $X$ sur un corps $F$, c'est-à-dire une variété projective munie d'une structure de groupe algébrique. Pour tout entier $n$, la multiplication par $n$, notée $[n]$, définit un endomorphisme de $X$. Le théorème du cube, voir par exemple MUMFORD (1974), entraîne que pour tout fibré en droites symétrique $\mathscr{L}$, le fibré en droites $[n]^* \mathscr{L}$ est isomorphe à $\mathscr{L}^{n^2}$.

Plus généralement, on appellera *système dynamique abélien* un système dynamique de la forme $(X, f)$, où $X$ est une variété abélienne et $f\colon X \to X$ un endomorphisme de la variété algébrique $X$, c'est-à-dire la composition d'un endomorphisme $\varphi$ de $X$ comme variété abélienne et d'une translation par un point $x_0$ de $X$. Lorsque $\varphi - \mathrm{id}$ est surjectif, ce qui sera le cas si $X$ est simple et $\varphi \neq \mathrm{id}$ (ou, plus généralement si pour toute sous-variété abélienne $Y \neq 0$ de $X$, $\alpha|_Y \neq \mathrm{id}_Y$), alors le système dynamique $(X, f)$ est conjugué au système $(X, \varphi)$.

Il convient d'observer qu'un système dynamique abélien n'est en général pas polarisé, par exemple lorsque $X$ est un produit $X_1 \times X_2$ et que $f = f_1 \times f_2$ est donné par la multiplication par deux entiers $n_1$ et $n_2$ distincts sur chacun des facteurs.

*2.1.3. Systèmes dynamiques toriques.* — Soit $d$ un entier tel que $d \geqslant 2$. On définit un système dynamique sur l'espace projectif $\mathbf{P}^k$ en posant $f([x_0 : \cdots : x_k]) = (x_0^d : \cdots : x_k^d)$. C'est un système polarisé car $f^* \mathscr{O}(1) = \mathscr{O}(d)$ ; il est de poids $d$. Soit $G$ l'ouvert de $\mathbf{P}^k$ où aucune coordonnée homogène ne s'annule ; si l'on fixe la coordonnée homogène $x_0$ égale à 1, on voit que $G$ est isomorphe au tore algébrique $(\mathbf{G}_\mathrm{m})^k$, où $\mathbf{G}_\mathrm{m} = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ est le groupe multiplicatif.

De la sorte, $\mathbf{P}^k$ apparaît comme une *compactification* de $G$, compactification qui n'est pas du tout arbitraire car la multiplication de $G$, à savoir l'application $m\colon G \times G \to G$ qui définit la structure de groupe sur $(\mathbf{G}_\mathrm{m}^k)$, s'étend en une action de $G$ sur $\mathbf{P}^k$, donnée par $(u, x) \mapsto [x_0 : u_1 x_1 : \cdots : u_k x_k]$ si $u = (u_1, \ldots, u_k) \in G$ et $x = [x_0 : \cdots : x_k] \in \mathbf{P}^k$.

Plus généralement, on appelle *variété torique* une variété $X$, disons projective et lisse, contenant un tore algébrique $G$ comme ouvert dense, de sorte que la multiplication de $G$ s'étende en un morphisme de $G \times X$ dans $X$. Le complémentaire de $G$ dans $X$ est alors un diviseur $D$, d'ailleurs un diviseur canonique[3] de $X$. Pour tout entier $d \geqslant 2$, l'endomorphisme $u \mapsto u^d$ de $G$ s'étend en un morphisme $f\colon X \to X$ pour lequel $f^* \mathscr{O}_X(D) \simeq \mathscr{O}_X(dD)$. On obtient de la sorte un système dynamique polarisé de

[2] Cette hypothèse, reprise de FAKHRUDDIN (2003), n'est probablement pas nécessaire pour le présent énoncé.

[3] C'est-à-dire le diviseur d'une $k$-forme différentielle méromorphe, où $k$ est la dimension de $X$, supposée lisse.

poids $d$, si ce n'est que $\mathscr{O}_X(D)$ n'est pas forcément ample — il appartient néanmoins à l'intérieur du cône effectif de $X$.[4] De tels systèmes dynamiques seront appelés *toriques.*

Observons que pour $u \in \mathbf{C}$, la suite $(u^{d^n})_n$ ne prend qu'au plus une fois chaque valeur si $u$ n'est pas une racine de l'unité, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs sinon. Autrement dit, les points prépériodiques de ces systèmes dynamiques qui sont contenus dans $G$ s'identifient aux $k$-uplets $(u_1, \dots, u_k)$ de racines de l'unité.

Lorsque $X = \mathbf{P}^k$, observons d'ores et déjà une remarquable propriété de la hauteur naturelle vis à vis de ces endomorphismes :

LEMME 2.1.4. — *Pour* $x = [x_0 : \cdots : x_k] \in \mathbf{P}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ *et* $d \in \mathbf{N}$, *on a*

$$h([x_0^d : \cdots : x_k^d]) = d\, h([x_0 : \cdots : x_k]).$$

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement de la définition de la hauteur, compte-tenu du fait que pour tout corps valué $K$ et toute famille $(x_0, \dots, x_k)$ d'éléments de $K$,

$$\max(|x_0|^d, \dots, |x_k|^d) = \max(|x_0|, \dots, |x_k|)^d.$$

□

C'est un premier exemple, d'ailleurs fondamental, de hauteur *normalisée* par rapport à un système dynamique.

Les systèmes dynamiques toriques ou abéliens ne sont pas les plus intéressants du strict point de vue de la théorie des systèmes dynamiques ; en revanche, les questions arithmétiques qu'ils suscitent sont souvent fondamentales.

*2.1.5. Éléments de classification.* — Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique polarisé. Supposons que $X$ soit lisse et géométriquement connexe. D'après le lemme 4.1 de FAKHRUDDIN (2003), voir aussi CANTAT (2003), la dimension de Kodaira d'une telle variété $X$ est négative ou nulle. Supposons que $\operatorname{kod}(X) = 0$. Alors, une puissance du fibré canonique de $X$ est trivial, et en caractéristique 0, on peut démontrer que $(X, f)$ est déduit d'un système dynamique abélien $(X', f')$ par passage au quotient par l'action d'un groupe fini agissant sans point fixe sur $X'$. La démonstration utilise un théorème de BEAUVILLE (1983), voir aussi BOGOMOLOV (1974*a,b*), reposant sur la solution de YAU (1978) à la conjecture de CALABI, à savoir l'existence d'une métrique kählérienne Ricci plate sur $X$.

La classification en dimension 2 est essentiellement due à NAKAYAMA (2002) (voir aussi FUJIMOTO (2002), ainsi que FUJIMOTO & NAKAYAMA (2005) pour l'analogue non kählérien) et fait l'objet d'une proposition (prop. 2.3.1) de ZHANG (2006), article de synthèse sur le thème de cette conférence et dont je recommande la lecture. Les surfaces qui portent un système dynamique polarisé sont :

– les surfaces abéliennes ;

[4] De toutes façons, la théorie des variétés toriques montre que l'image inverse par $f$ de tout diviseur $E$ est linéairement équivalente à $dE$ ; les constructions ci-dessous ne dépendent pas substantiellement du choix d'un diviseur ample $E$.

– les surfaces hyperelliptiques possédant une revêtement étale par le produit de deux courbes elliptiques ;
– les surfaces toriques ;
– les surfaces réglées sur une courbe elliptique associées, soit à un fibré de rang 2 de la forme $\mathscr{O}\oplus\mathscr{M}$, où $\mathscr{M}$ soit, ou bien de torsion, ou bien de degré non nul, soit à un fibré indécomposable de degré impair.

Citons enfin un résultat de BEAUVILLE (2001), reposant sur des idées de AMERIK *et al.* (1999), selon lequel une hypersurface lisse de degré au moins 3 de l'espace projectif de dimension au moins 3 n'admet aucun endomorphisme de degré > 1.

Pour plus de détails, je renvoie à l'article de Serge CANTAT dans ce volume.

### 2.1/2. Hauteur normalisée

Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique polarisé défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Notons $d$ l'entier $\geqslant 2$ tel que $f^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^d$.

Le but de ce paragraphe est de définir, suivant CALL & SILVERMAN (1993), une *hauteur canonique* relative au fibré en droites $\mathscr{L}$.

Les résultats qui suivent sont des généralisations directes des propositions correspondants du §1.1. Leur démonstration est identique.

PROPOSITION 2.1.6. — (Rappelons que $d \geqslant 2$.) *Il existe une unique hauteur relative à $\mathscr{L}$, $\hat{h}_{\mathscr{L}}\colon X(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ telle que $\hat{h}_{\mathscr{L}}(f(x)) = d\hat{h}_{\mathscr{L}}(x)$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$.*

*Démonstration.* — Notons $E$ l'espace affine des hauteurs relatives à $\mathscr{L}$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ ; son espace vectoriel directeur est l'espace $\mathscr{F}_b$ des fonctions bornées de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{R}$. Munissons $\mathscr{F}_b$ de la norme uniforme et l'espace affine $E$ de la distance induite. C'est un espace métrique complet.

L'application $T\colon \varphi \mapsto \frac{1}{d}\varphi\circ f$ est linéaire et applique $E$ dans lui-même. En effet, si $h$ est une hauteur relative à $\mathscr{L}$, $h\circ f$ est une hauteur relative à $f^*\mathscr{L}$ (prop. 1.3.7) donc $h\circ f - dh$ est bornée. Par suite, $T(f) = \frac{1}{d}h\circ f$ est une hauteur relative à $\mathscr{L}$ sur $X$.

Cette application $T$ est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle possède donc un unique point fixe dans $E$. □

La fonction $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ dont la proposition précédente affirme l'existence et l'unicité est appelée *hauteur normalisée*, ou hauteur canonique. On a aussi la formule

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} h(f^n(x)), \tag{2.1.7}$$

pour toute hauteur $h$ relative à $\mathscr{L}$ sur $X$. La hauteur normalisée vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.1.8. — a) *On a $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ ;*

b) *un point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifie $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = 0$ si et seulement s'il est prépériodique ;*

c) *pour tout nombre entier $D$ et tout nombre réel $B$, l'ensemble de points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ de degré au plus $D$ et tels que $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) \leqslant B$ est fini.*

*Démonstration.* — La propriété *c*) résulte immédiatement de ce que $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ est une hauteur relative à un fibré en droites ample sur $X$ et du corollaire 1.4.2. Comme les hauteurs relatives à un fibré en droite ample sont minorées, la propriété *a*) est manifeste sur la formule (2.1.7) ci-dessus. Comme au §1.1, elle se déduit aussi, ainsi que la propriété *b*), de l'assertion de finitude.

Soit en effet $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$. On a $\hat{h}(f^n(x)) = d^n \hat{h}(x)$. Si $x$ est prépériodique, il existe des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Par suite, $d^n \hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = d^{n+p} \hat{h}_{\mathscr{L}}(x)$, d'où $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x)$ car $d \geqslant 2$. Inversement, si $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) \leqslant 0$, les termes de la suite $(f^n(x))$ forment un ensemble de points de hauteur normalisée au plus $B$, tous définis sur le corps $\mathbf{Q}(x)$ ; un tel ensemble est fini d'après *c*). Il existe donc des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $f^n(x) = f^{n+p}(x)$. Autrement dit, $x$ est prépériodique et $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = 0$. □

Voici une conséquence remarquable de la proposition précédente, due à NORTHCOTT (1950).

COROLLAIRE 2.1.9. — *Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres $K$. Pour tout entier $D$, les points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui sont prépériodiques et dont le degré est au plus $D$ forment un ensemble fini.*

Il convient de remarquer ici que, sous les hypothèses du théorème, l'ensemble des points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui sont périodiques est dense dans $X$ pour la topologie de Zariski (proposition 2.2.1). Il y en est *a fortiori* de même de l'ensemble des points prépériodiques.

D'autre part, lorsque $X = \mathbf{P}^1$ et $f$ est l'endomorphisme $[x : y] \mapsto [x^d : y^d]$ pour $d$ un entier $\geqslant 2$, la hauteur normalisée n'est autre que la hauteur naturelle sur $\mathbf{P}^1$. Les points prépériodiques pour ce système dynamique sont $[0:1]$, $[1:0]$ et les points $[1:\xi]$ où $\xi \in \mathbf{C}$ est une racine de l'unité. Modulo l'identification entre hauteur d'un point $[1:\xi]$ et mesure de Mahler $\mathrm{M}(P)$ du polynôme minimal $P$ de $\xi$, on en déduit le théorème suivant, dont la première partie est essentiellement due à KRONECKER. Voir aussi l'exercice 1.6.5 pour une version effective.

COROLLAIRE 2.1.10. — *Soit $P$ un polynôme irréductible à coefficient rationnels.*

a) *Si* $\mathrm{M}(P) = 0$, *les racines de $P$ sont des racines de l'unité ou* 0.
b) *Lorsque $n \to \infty$, le degré du corps engendré sur* $\mathbf{Q}$ *par une racine primitive $n$-ième de l'unité tend vers l'infini.*

En fait, toutes les racines primitives $n$-ièmes de l'unité sont conjuguées sur $\mathbf{Q}$ (GAUSS) puisque le polynôme cyclotomique $\Phi_n$ est irréductible. Comme l'indicatrice d'EULER $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec $n$, cela redonne la seconde assertion. La première assertion peut également être précisée en disant qu'un polynôme irréductible $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $\mathrm{M}(P) = 0$ est, au signe près, ou bien égal à $X$, ou bien égal à un polynôme cyclotomique.

### 2.1/3. Normalisation des hauteurs locales

On a étudié au paragraphe 1.5 les décompositions de la hauteur d'un point en somme de termes locaux, indexés par les places de $K$. Dans le cas d'un système dynamique polarisé, il est naturel de se demander si la hauteur normalisée est justiciable d'une telle décomposition dont chaque terme serait plus ou moins canonique.

Revenons donc à la théorie des hauteurs locales en nous plaçant sur un corps $K$, supposé valué complet et algébriquement clos. Soit $X$ une variété projective sur $K$, $f\colon X \to K$ un endomorphisme de $X$ et soit $D$ un diviseur de Cartier sur $X$ tel que $f^*D$ soit linéairement équivalent à $dD$, où $d$ est un entier $\geqslant 2$. Autrement dit, dans le cas où $D$ est ample, $(X, f, \mathscr{O}(D))$ est un système dynamique polarisé.

Il y a deux façons pour définir une fonction de Green canonique relativement à $D$. La première, due à Call & Silverman (1993), procède d'un raisonnement au niveau des fonctions ; la seconde, due à Zhang (1995*b*), construit des métriques canoniques. Je mélange ici les deux points de vue, les espaces affines des fonctions de Green pour un diviseur $D$ n'étant que l'image par $\log|\cdot|$ du torseur des métriques hermitiennes continues sur $\mathscr{O}(D)$.

Proposition 2.1.11. — *Soit $\alpha \in K(X)$ tel que $f^*D = dD + \operatorname{div}(\alpha)$. Il existe une unique fonction de Green $\hat{g}_D$ relativement à $D$ telle que*

$$g_D(f(x)) = d g_D(x) - \log|\alpha(x)|$$

*pour tout $x \in X(\overline{K})$ qui n'appartient ni à $D$ ni à $f^*D$.*

*Démonstration.* — Si $g$ est une fonction de Green pour $D$, $T(g) = \frac{1}{d}(g \circ f + \log|\alpha|)$ en est une autre. L'application $g \mapsto T(g)$ est contractante, de constante de Lipschitz au plus $1/d < 1$. Elle admet donc un unique point fixe dans l'ensemble des fonctions de Green pour $D$. □

*Exemple 2.1.12.* — Supposons que $D$ soit la section hyperplane $X_0 = 0$ de l'espace projectif $X = \mathbf{P}^k$. D'après la structure des endomorphismes de l'espace projectif, il existe des polynômes $(F_0, \dots, F_k)$ de $K[X_0, \dots, X_k]$, homogènes de degré $d$ et sans zéro commun non trivial dans $\overline{K}$, tels que $f([x_0 : \cdots : x_k]) = [F_0(x) : \cdots : F_k(x)]$, pour tout point $[x_0 : \cdots : x_k]$ de $\mathbf{P}^k$. Notons $F = (F_0, \dots, F_k)$ l'endomorphisme de l'espace affine de dimension $k+1$ qui relève $f$. Pour $n \geqslant 0$, notons $F^n = (F_0^n, \dots, F_k^n)$ le $n$-ième itéré de $f$ ; il relève $f^n$. En outre, les polynômes $F_j^n$ (pour $0 \leqslant j \leqslant j$) sont de degré $d^n$ et sans zéro commun non trivial.

Comme $D$ est le diviseur des zéros de la « fonction » $x_0$, $f^*D$ est celui de $F_0$ ; notant $\alpha$ la fraction rationnelle $F_0(x)/x_0^d$, on a $f^*D = dD + \operatorname{div}(\alpha)$. La fonction $g = -\log(|x_0|/\max(|x_0|, \dots, |x_k|))$ est une fonction de Green pour $D$ ; toute autre fonction de Green en diffère d'une fonction continue. La démonstration itérative du théorème du point fixe montre que la fonction de Green canonique pour $g$ est la limite des fonctions de Green

$$\begin{aligned} g_n(x) &= -\frac{1}{d^n} g \circ f^n(x) + \frac{1}{d^n} \log \left|\alpha \circ f^{n-1}\right| + \cdots + \frac{1}{d} \log |\alpha(x)| \\ &= -\frac{1}{d^n} \log \frac{\left|F_0^n(x)\right|}{\max(\left|F_0^n(x)\right|, \ldots, \left|F_k^n(x)\right|)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{d^m} \log \frac{\left|F_0^m(x)\right|}{\left|F_0^{m-1}(x)\right|^d} \\ &= \frac{1}{d^n} \log \max(\left|F_0^n(x)\right|, \ldots, \left|F_k^n(x)\right|) - \log |x_0|. \end{aligned}$$

Pour tout $x = (x_0, \ldots, x_k)$ non nul, posons

$$G_n(x) = \frac{1}{d^n} \log \max(\left|F_0^n(x)\right|, \ldots, \left|F_k^n(x)\right|).$$

Les calculs qui précèdent entraînent que $G_n$ converge vers une fonction $G$ définie sur le complémentaire de l'origine dans l'espace affine et vérifiant les propriétés suivantes :

$$G(\lambda x) = \log |\lambda| + G(x), \qquad G(F(x)) = dG(x).$$

On l'appelle la *fonction de Green homogène* ; elle est reliée à la fonction de Green canonique pour le diviseur $D$ par la relation $g_D(x) = G(x) - \log |x_0|$.

Supposons $K = \mathbf{C}$. Alors, $G$ est plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et est pluriharmonique sur l'image réciproque de l'ensemble de Fatou de $f$ ; voir SIBONY (1999), §1.6. Lorsque $K$ est un corps ultramétrique, KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007*b*) démontrent que $G$ est localement constante sur l'image réciproque de l'ensemble de Fatou de $f$.

Le théorème suivant affirme que ces fonctions de Green normalisées forment une famille admissible, donc donnent lieu comme anoncé à une décomposition de la hauteur d'un point en somme de termes locaux.

THÉORÈME 2.1.13. — *Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres $K$. Soit $D$ un diviseur tel que $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}(D)$ et soit $\alpha \in K(X)$ tel que $f^*D = dD + \operatorname{div}(\alpha)$. Pour toute place $v$ de $K$, notons $\hat{g}_v$ la fonction de Green sur le corps $\mathbf{C}_v$ pour le diviseur $D$, normalisée relativement à $\alpha$, ainsi que $\hat{h}_v$ la hauteur locale associée.*

*Alors, la famille $(\hat{g}_v)$ est admissible et, pour tout $x \in (X \setminus D)(\overline{\mathbf{Q}})$, on a*

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = \sum_{v \in M_K} \varepsilon_v \hat{h}_v(x).$$

(Comme au paragraphe 1.5, si $v$ est une place de $K$, on note $\varepsilon_v$ le nombre de plongements du corps $K$ dans $\mathbf{C}_v$ qui induisent la valeur absolue correspondant à $v$.)

*Démonstration.* — La famille $(\hat{g}_v)$ de fonctions de Green normalisées est obtenue en itérant à partir d'une famille admissible $(g_v^0)$ fixée l'opérateur $T\colon (g_v) \mapsto (\frac{1}{d}(g_v \circ f + \log |\alpha|_v)$. D'après le lemme 1.5.5, cet opérateur applique une famille admissible de fonctions de Green sur une autre famille admissible. Plus précisément, d'après cette proposition, cet opérateur fixe presque toutes les composantes $g_v$. Autrement dit, on a $\hat{g}_v = g_v^0$ pour presque toute place $v$. Cela démontre précisément que la famille $(\hat{g}_v)$ est admissible.

Notons $h'$ la somme des hauteurs locales associées ; d'après la proposition 1.5.6, c'est la restriction au complémentaire de $D$ d'une hauteur pour ce diviseur. Pour montrer que c'est bien la hauteur normalisée, il suffit donc de vérifier l'équation fonctionnelle qui la caractérise.

Soit $v$ une place de $K$. Pour tout point $x \in X(\mathbf{C}_v)$ tel que $x \not\in D$ et $f(x) \not\in D$, on a $\hat{g}_v(f(x)) = d\hat{g}_v(x) - \log|\alpha(x)|_v$. Par suite, si $P \in X(\overline{K})$, on a donc

$$\hat{h}_v(f(P)) = d\hat{h}_v(P) - \frac{1}{[K(P):K]}\log N_{K(P)/K}(\alpha(x)).$$

En sommant ces égalités et en utilisant la formule du produit, on en déduit $h'(f(P)) = dh'(P)$, ce qu'il fallait démontrer. □

### 2.1/4. Hauteurs locales sur C et mesures canoniques

Conservons les notations du paragraphe précédent en supposant de plus que $K = \mathbf{C}$ et que $D$ est un diviseur ample.

Il possède alors une fonction de Green de classe $\mathscr{C}^\infty$, $g_D$, dont la forme associée $\omega_D = dd^c g_D + \delta_D$ est une forme de Kähler. La mesure $(\omega_D)^n$ est positive, de masse totale égale à l'auto-intersection $(D)^n$ de $D$ (si $D$ est une section hyperplane, ce n'est autre que le degré de $X$).

La démonstration du théorème du point fixe de Picard fait intervenir les itérés $T^k(g_D)$ de $g_D$ sous l'opérateur $T$ et montre leur convergence vers la fonction de Green $\hat{g}_D$, unique solution de $T(\hat{g}_D) = \hat{g}_D$. Notons que l'on a

$$dd^c T(g_D) + \delta_D = \frac{1}{d} dd^c(g_D \circ f) + \delta_D + \frac{1}{d}\delta_{\operatorname{div}(\alpha)} = \frac{1}{d} f^*\omega_D.$$

Autrement dit, la forme associée à $T(g_D)$ est encore de Kähler. Un argument standard de courants positifs de masse bornée entraîne que $dd^c\hat{g}_D + \delta_D$ est un courant positif fermé sur $X$, qu'on note $\hat{\omega}_D$. C'est la limite des formes positives de type $(1,1)$, $\frac{1}{d^k}(f^k)^*\omega_D$. En outre, la suite des mesures $(d^{-k}(f^k)^*\omega_D^n)_k$ converge vers une mesure, notée $(\hat{\omega}_D)^n$ sur $X(\mathbf{C})$. Cette dernière écriture $(\hat{\omega}_D)^n$ est rendue licite par la théorie des produits de courants positifs fermés localement donnés par le $dd^c$ d'une fonction psh continue, telle que décrite dans DEMAILLY (1993).

On appelle *mesure canonique* associée au système dynamique polarisé $(X, f, \mathscr{L})$ la mesure de probabilité $(\hat{\omega}_D)^n/(D)^n$. Dans le cas des variétés abéliennes, cette mesure canonique est la mesure de Haar normalisée. Dans le cas d'un système dynamique torique, par exemple $\mathbf{P}^n$ muni de l'endomorphisme donné par l'élévation des coordonnées homogènes à une même puissance $d \geqslant 2$, il s'agit de même de la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact maximal $(\mathbf{S}^1)^n$ de $(\mathbf{C}^*)^n$.

Pour plus de détails et des exemples plus intéressants du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, je renvoie aux articles de CANTAT et GUEDJ dans ce volume.

Une propriété topologique de ces mesures aura des conséquences importantes plus bas : elles ne chargent pas les sous-ensembles algébriques stricts (et plus généralement les sous-ensembles pluripolaires), *cf.* l'article de GUEDJ, théorème 3.1. En particulier, leur support est dense pour la topologie de Zariski. Ce dernier fait est facile à constater dans les deux exemples (abéliens et toriques) explicités ci-dessus.

### 2.1/5. Extensions

La construction de hauteurs normalisées peut être étendue de plusieurs manières.

1) Par additivité des hauteurs relativement à des fibrés en droites, on peut définir une hauteur relativement à un élément de $\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. L'intérêt est que cet ensemble peut contenir de nouvelles classes vérifiant des propriétés permettant l'application des idées évoquées ci-dessus.

C'est ainsi que sur certaines surfaces K3, SILVERMAN (1991), CALL & SILVERMAN (1993), et, à leur suite, BILLARD (1997), construisent une hauteur normalisée pour l'action d'automorphismes. Leur construction a été généralisée dans KAWAGUCHI (2005) au cas des automorphismes d'une surface projective $X$ dont le premier degré dynamique $\lambda$ est $> 1$ (c'est-à-dire, d'après GROMOV (2003)[5] et YOMDIN (1987), dont l'entropie topologique est strictement positive). Dans tous les cas, il s'agit d'établir l'existence de deux diviseurs à coefficients rationnels $D_+$ et $D_-$ vérifiant $f^*(D_+) \sim \lambda D_+$ et $f^*(D_-) \sim \lambda^{-1} D_-$. Suivant CANTAT (2001), cela se démontre en considérant l'action de $f$ sur les espaces vectoriels $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Pic}(X)_{\mathbf{R}}$, en notant que cette action préserve $\mathrm{Pic}(X)$, la forme d'intersection et le cône des diviseurs nef (l'adhérence du cône ample). On démontre (voir MCMULLEN (2002)) que les valeurs propres sont des nombres de Salem : $\lambda$ est un nombre algébrique, $\lambda^{-1}$ en est un conjugué et tous les autres conjugués sont de module 1.

Ils en déduisent des théorèmes de finitude pour les points prépériodiques de degré donné sur $X$. Dans le cas général de KAWAGUCHI (2005), il s'agit seulement d'une hauteur relative à un fibré en droites *big* et *nef* ; il apparaît ainsi une sous-variété exceptionnelle, les points prépériodiques de laquelle on ne peut rien dire. [6]

2) En général, il n'y a pas de hauteur normalisée pour l'action d'une application rationnelle, pas plus que de théorème de finitude pour les points prépériodiques, cf. l'exercice 2.3.1. Un certain nombre d'auteurs, SILVERMAN (1994), DENIS (1995), MARCELLO (2003), KAWAGUCHI (2004), ont étudié tout particulièrement le cas des automorphsimes polynomiaux de l'espace affine. (Ceux-ci définissent des automorphismes birationnels de l'espace projectif auxquels la théorie précédente ne s'étend pas *a priori*.) Considérons un automorphisme $f$ du plan affine $\mathbf{A}^2$. Il est donné par deux polynômes ; notons $d(f)$ le maximum de leurs degrés. Le $n$-ième itéré $f^n$ de $f$ possède de même un degré et l'on définit le *degré dynamique* $\delta(f)$ de $f$ comme la limite de $d(f^n)^{1/n}$. Cette limite existe et vérifie $1 \leqslant \delta(f) \leqslant d(f)$.

Le cas $\delta(f) = d(f)$ correspond aux *automorphismes réguliers* pour lesquels les lieux d'indétermination dans $\mathbf{P}^2$ de $f$ et de $f^{-1}$ ne se rencontrent pas. Lorsque $\delta(f) \geqslant 2$, KAWAGUCHI (2004) montre l'existence d'une fonction $\hat{h}$ sur $\mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les propriétés suivantes, où $h$ désigne la restriction à $\mathbf{A}^2$ de la hauteur sur $\mathbf{P}^2$.

---

[5] Bien que publié en 2003, cet article fondamental date de 1977.

[6] Étant donné un endomorphisme $f$ de $\mathbf{P}^2$ de degré $d \geqslant 2$, éclatons un point fixe de $f$ en lequel la différentielle de $f$ est l'identité. On obtient une surface $X'$ sur laquelle $f$ s'étend en un endomorphisme qui laisse invariant point par point le diviseur exceptionnel.

a) il existe des constantes $a > 1$ et $b > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$, $\frac{1}{a}h(x) - b \leqslant \hat{h}(x) \leqslant ah(x) + b$ ;

b) pour tout $x \in \mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$, $\hat{h}(f(x)) + \hat{h}(f^{-1}(x)) = \big(\delta + \frac{1}{\delta}\big)\hat{h}(x)$.

La première propriété implique que $\mathbf{A}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ n'a qu'un nombre fini de points de degré borné et de $\hat{\text{h}}$auteur bornée. La seconde propriété entraîne que les points prépériodiques sont exactement les points de $\hat{\text{h}}$auteur nulle.

3) Plus généralement, le contexte des correspondances peut donner lieu à des variations intéressantes.

## §2.2. Quelques conjectures

Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique polarisé défini sur un corps de nombres $K$. Soit $d \geqslant 2$ l'entier tel que $f^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\otimes d}$. Soit $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ la hauteur normalisée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ associée à $(X, f, \mathscr{L})$.

Je décris dans ce paragraphe quelques unes des conjectures concernant l'arithmétique des systèmes dynamiques polynomiaux. La plupart de ces énoncés ont fait l'objet d'une étude approfondie depuis les années 1970, au moins dans le cas des systèmes dynamiques abéliens.

### 2.2/1. Rareté des points prépériodiques dans une sous-variété

PROPOSITION 2.2.1. — *L'ensemble des points de $X$ qui sont périodiques pour $f$ est dense dans $X$ pour la topologie de Zariski.*

*Démonstration.* — Lorsque $X$ est une variété complexe lisse, on peut en donner une démonstration en utilisant les résultats de théorie ergodique démontrés dans les notes de GUEDJ de ce volume.[7]

Soit $V$ l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de $f$ pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire le plus petit ensemble algébrique de $X$ qui contient les points périodiques. L'ensemble $V(\mathbf{C})$ est fermé dans $X(\mathbf{C})$ et contient les points périodiques ; il contient donc l'adhérence de ces points pour la topologie usuelle. D'après le théorème 3.3 de cet article, les points périodiques (répulsifs) de $f$ s'équidistribuent selon la mesure canonique $\mu_f$ sur $X(\mathbf{C})$ associée à $f$. *A fortiori*, $V(\mathbf{C})$ contient le support de la mesure $\mu_f$. Comme cette mesure ne charge pas les parties fermées strictes pour la topologie de Zariski (*loc. cit.*, théorème 3.1), $V(\mathbf{C}) = X(\mathbf{C})$ et $V = X$.

FAKHRUDDIN (2003), faisant usage de résultats fondamentaux de HRUSHOVSKI (2004), en donne une démonstration algébrique par réduction au cas où le corps de base est la clôture algébrique d'un corps fini. Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une hypersurface $Y$ de $X$ contient un point prépériodique, voire périodique. Voici le principe de la démonstration.

[7] Comme nous l'avons rappelé au début de ce chapitre, les différents degrés dynamiques d'un système dynamique polarisé sont dominés par le dernier, *cf.* SERRE (1960).

Considérons un « modèle » du système dynamique polarisé $(X, f, \mathscr{L})$ et de $Y$ sur un anneau $A$ qui est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. Une façon de procéder est d'utiliser la prop. 2.1.1, c'est-à-dire de considérer $X$ comme une sous-variété invariante par un système dynamique d'un espace projectif $\mathbf{P}^N$ et de définir $A$ comme l'anneau engendré par les coefficients, d'une part des polynômes $(f_0, \dots, f_N)$ qui définissent ce système dynamique et d'autre part d'un système d'équations des variétés $X$ et $Y$. Il convient d'adjoindre à cet anneau l'inverse du résultant des polynômes homogènes $f_0, \dots, f_N$, pour que ces polynômes définissent bien un endomorphisme de l'espace projectif $\mathbf{P}^N_A$ sur $A$. On peut supposer que $\mathbf{Y}$ est la trace d'une section hyperplane de $\mathbf{P}^N_A$, quitte à agrandir $Y$ de sorte qu'il est défini par une forme linéaire, et à ajoindre à $A$ l'inverse d'un coefficient non nul de cette forme.

On obtient de la sorte un système dynamique polarisé $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ sur $A$ ainsi qu'une section hyperplane $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{X}$.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $A$ et soit $\kappa$ son corps résiduel. D'après le théorème des zéros de Hilbert, $\kappa$ est un corps fini. Notons $X_\kappa$, $f_\kappa$, $Y_\kappa$ les objets sur le corps $\kappa$ déduits de $\mathbf{X}$, $\mathbf{f}$ et $\mathbf{Y}$ par réduction modulo $\mathfrak{m}$. Si $x$ est un point de $X_\kappa(\overline{\kappa})$, défini sur le corps fini $\kappa(x)$, tous les itérés de $x$ sont aussi définis sur $\kappa(x)$. Par conséquent, l'orbite de $x$ est finie et $x$ est prépériodique. Il existe en particulier des points prépériodiques de $X_\kappa(\overline{\kappa})$ qui n'appartiennent pas à $Y_\kappa$. (C'est ici qu'intervient éventuellement le théorème de HRUSHOVSKI (2004) : il affirme que cet ensemble contient des points *périodiques* pourvu que le cardinal de $\kappa$ soit choisi assez grand.) Soit $x$ un tel point; supposons $f^n(x) = f^{n+p}(x)$ pour $p > n \geqslant 0$, et soit $Z$ le sous-schéma de $\mathbf{X}$ défini par la coïncidence de $f^n$ et $f^{n+p}$.

Admettons pour l'instant que chaque composante irréductible de $Z$ se surjecte sur $\operatorname{Spec} A$. Il existe alors un point $\xi$ dans $Z$ dont l'image est le point générique de $\operatorname{Spec} A$ et dont $x$ est une spécialisation. Un tel point n'appartient pas à $\mathbf{Y}$ et définit un point prépériodique de $X$, voire périodique si l'on peut prendre $n = 0$, d'où la proposition.

Pour démontrer le fait admis, commençons par observer que $Z$ est fini sur $\operatorname{Spec} A$. En effet, sur $Z$, les fibrés en droites $(f^{n+p}) * \mathscr{O}(1)$ et $(f^n)^* \mathscr{O}(1)$ sont isomorphes, donc $\mathscr{O}(d^{n+p}) \simeq \mathscr{O}(d^n)$, ce qui entraîne que le fibré en droites $\mathscr{O}(d^n(d^p - 1))|_Z$ est trivial. Comme il est relativement très ample sur $A$, $Z$ est affine sur $A$, c'est donc un schéma fini sur $\operatorname{Spec} A$. Mais $Z$, égal à l'intersection de la diagonale de $\mathbf{X} \times_A \mathbf{X}$ et de l'image de $\mathbf{X}$ par le couple $(f^n, f^{n+p})$, est l'intersection de deux sous-schémas de dimension $\dim X + \dim A$ dans un schéma régulier de dimension $2 \dim X + \dim A$. Par conséquent, ses composantes irréductibles sont de dimension au moins $\dim A$, *cf.* SERRE (2000), p. 110, théorème 3. Comme le morphisme $Z \to \operatorname{Spec} A$ est fini, elles sont de dimension exactement $\dim A$. D'après le théorème de constructibilité de CHEVALLEY, l'image d'une telle composante irréductible domine $\operatorname{Spec} A$; par propreté des morphismes finis, l'image d'une telle composante irréductible est fermée dans $\operatorname{Spec} A$, donc égale à $\operatorname{Spec} A$. □

Plus généralement, soit $Y$ une sous-variété de $X$ qui est prépériodique, c'est-à-dire telle que la suite de sous-variétés $(f^n(Y))$ n'ait qu'un nombre fini de termes distincts. Soit $n$ et $p$ des entiers, avec $p > 0$, tels que $f^n(Y) = f^{n+p}(Y)$. Alors la sous-variété $Y_n = f^n(Y)$ est stable par $f^p$, et $(Y_n, f^p, \mathscr{L}|_{Y_n})$ est un système dynamique polarisé, de poids $d^k$. L'ensemble des points périodiques de $f$ contenus dans $Y_n$ est donc dense dans $Y_n$ pour la topologie de Zariski. Comme $f^n \colon Y \to Y_n$ est fini et surjectif, l'ensemble des points périodiques de $f$ contenus dans $Y$ est aussi dense dans $Y$ pour la topologie de Zariski.

Il est tentant de faire la conjecture inverse.

CONJECTURE 2.2.2. — *Soit* $(X, f, \mathscr{L})$ *un système dynamique polarisé sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit* $Y$ *une sous-variété irréductible de* $X$ *et soit* $Y_0$ *l'adhérence, pour la topologie de Zariski, de l'ensemble des points prépériodiques de* $X$ *qui appartiennent à* $Y$*. Est-il vrai que les composantes irréductibles de* $Y_0$ *sont des sous-variétés prépériodiques ?*

En d'autres termes, si $Y$ n'est pas elle-même prépériodique, est-il vrai que ses points prépériodiques sont contenus dans une réunion finie de sous-variétés strictes de $Y$.

Remarquons aussi qu'il s'agit d'une conjecture géométrique. Toutefois, des arguments de spécialisation standard permettent de supposer que ce système dynamique est défini sur un corps de nombres.

L'ensemble des cas connus est mince, essentiellement les systèmes toriques et abéliens, mais à chaque fois la démonstration des théorèmes fut spectaculaire.

*2.2.3. Systèmes dynamiques abéliens.* — Le cas où $X$ est un système dynamique abélien, $f$ étant l'endomorphisme de multiplication par un entier $\geqslant 2$, a été conjecturé par MANIN et MUMFORD, semble-t-il motivés par l'ex-conjecture de MORDELL. Elle a été démontrée pour la première fois par RAYNAUD (1983*a*,*b*) (démonstration de nature arithmétique, $p$-adique). Dans ce cas, les variétés prépériodiques sont plutôt appelées « sous-variétés de torsion » : il s'agit en effet des translatées des sous-variétés abéliennes de $X$ par un point de torsion, *cf.* par exemple HINDRY (1988), lemme 10 (et, dans un cas voisin, le lemme 2.2.5 ci-dessous). Citons aussi les preuves de PINK & ROESSLER (2002, 2004) utilisant aussi des énoncés arithmétiques difficiles dus à SERRE, qui interviennent aussi dans la solution donnée par HINDRY (1988), ainsi que la démonstration assez élémentaire de ROESSLER (2005), inspirées par celle de HRUSHOVSKI (2001) qui, elle, fait intervenir la théorie des modèles.

*2.2.4. Systèmes dynamiques toriques.* — Le cas des systèmes dynamiques toriques est assez similaire (certaines des références ci-dessus traitent d'ailleurs simultanément les deux cas). Commençons par énumérer les sous-variétés invariantes dans le cas où $X = \mathbf{P}^k$ et $f([x_0 : \cdots : x_k]) = [x_0^d : \cdots : x_k^d]$. Le cas général s'y ramène via la géométrie des variétés toriques. Rappelons que le tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ agit sur $X$ par $(u_1, \ldots, u_k) \cdot [x_0 : \cdots : x_k] = [x_0 : u_1 x_1 : \cdots : u_k x_k]$.

LEMME 2.2.5. — *Soit* $V$ *une sous-variété irréductible de* $\mathbf{P}^k$*, rencontrant* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$*, telle qu'il existe un point* $\alpha \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ *telle que* $f(V) \subset \alpha \cdot V$*. Alors* $V$ *est un translaté d'un sous-tore de* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$*, par un point de torsion dans le cas particulier où* $\alpha = 1$.

*Démonstration d'après* PINK & ROESSLER *(2002).* — Soit $G$ le stabilisateur de $V$ ; c'est le sous-groupe de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ formé des $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ tels que $u \cdot x \in V$ pour tout $x \in V$.

Supposons d'abord que $G = \{1\}$. Alors, les $d^k$ sous-variétés $u \cdot V$, où $u$ parcourt les points de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ tels que $u^d = \alpha^{-1}$, sont disjointes et contenues dans $f^{-1}(V)$. Comme le degré de $f$ est $d^k$, ces sous-variétés décrivent exactement les composantes irréductibles de $f^{-1}(V)$. Le cycle $f^*(V)$ est somme des cycles $u \cdot V$ ; si deg désigne le degré d'une sous-variété de l'espace projectif, on a alors $\deg(f^{-1}(V)) = d^k \deg(V)$. D'autre part, comme $f : \mathbf{P}^k \to \mathbf{P}^k$ est de poids $d$, le degré du cycle $f^*(V)$ est égal à $d^{\dim V} \deg(D)$. On a donc $\dim V = k$ et $V = \mathbf{P}^k$. Comme le stabilisateur de $V$ est trivial, $k = 0$ et $V = \{1\}$ est un point de torsion.

Dans le cas général, $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k/G$ est un tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{k'}$. Par construction, l'image de $(V \cap \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k)/G$ dans ce tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{k'}$ a un stabilisateur trivial et est stable par l'élévation à la puissance $d$. Son adhérence $V'$ dans $\mathbf{P}^{k'}$ vérifie les hypothèses du lemme. Par suite, $V/G$ est un point, et $V$ est un translaté de $G$, c'est-à-dire $V = \beta \cdot G$. Comme $V$ est irréductible, $G$ est un sous-tore de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$.

Alors, $f(V) = \beta^d \cdot G = \alpha\beta \cdot G$. Si $\alpha = 1$, $\beta^{d-1} \in G$. Par « complète réductibilité des tores », on peut alors écrire $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k = G \cdot G'$, où $G'$ est un sous-tore ; écrivons $\beta = \gamma\gamma'$ avec $\gamma \in G$ et $\gamma' \in G'$. On a $V = \gamma' G$ et l'égalité $\beta^{d-1} = \gamma^{d-1}(\gamma')^{d-1}$ entraîne que $\gamma'$ est un point de torsion. □

Pour donner une idées des méthodes galoisiennes qui interviennent dans une approche de ce genre de questions, nous donnons maintenant la démonstration, due à IHARA, SERRE et TATE, du cas d'une courbe dans $\mathbf{P}^2$. Notre exposition reprend LANG (1983), p. 160 ainsi que la présentation d'HINDRY (1988).

PROPOSITION 2.2.6. — *Soit $V$ une courbe irréductible du plan projectif complexe qui contient une infinité de points de torsion de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$. Alors $V$ est l'adhérence dans $\mathbf{P}^2$ d'un translaté d'un sous-tore de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$ par un point de torsion de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$.*

De manière plus explicite, $V \cap \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$ possède alors une équation de la forme $X^a Y^b = u$, où $(a, b)$ est un couple d'entiers relatifs premiers entre eux et $u$ est une racine de l'unité.

*Démonstration.* — Si $V$ a une équation $F = 0$ dans $\mathbf{P}^2$ et $\sigma$ est un automorphisme de $\mathbf{C}$, on note $V^\sigma$ la courbe de $\mathbf{P}^2$ d'équation $F^\sigma = 0$ obtenue en appliquant $\sigma$ aux coefficients de $F$. Si $x = [x_0 : x_1 : x_2] \in V$, le point $\sigma(x) = [\sigma(x_0) : \sigma(x_1) : \sigma(x_2)]$ appartient à $V^\sigma$.

Soit $K_1$ le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les racines de l'unité ; montrons que $V$ est définie sur $K_1$. Soit $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]$ une équation homogène de $V$ dont un des coefficients est égal à 1 ; montrons que tous les autres coefficients de $F$ appartiennent à $K_1$.

Soit $\sigma$ un automorphisme de $\mathbf{C}$ qui fixe $K_1$. Pour tout point de torsion $u = [1 : u_1 : u_2]$ appartenant à $V$, $\sigma(u) = [1 : \sigma(u_1) : \sigma(u_2)]$ appartient à $V^\sigma$ ; comme $\sigma(u) = u$, $u \in V^\sigma \cap V$. Par hypothèse, $V$ et $V^\sigma$ ont une infinité de points d'intersection. D'après le théorème de Bézout, $V^\sigma = V$. Les formes $F$ et $F^\sigma$ sont alors proportionnelles, donc égales car un des coefficients de $F$ est égal à 1. Par suite, $F \in K_1[X_0, X_1, X_2]$.

Il existe donc une racine de l'unité $\alpha$ tel que les coefficients de $F$ appartiennent à $\mathbf{Q}(\alpha)$ ; posons $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ et $m = [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$. Pour la fin de la démonstration, nous allons supposer par l'absurde que $V$ n'est pas un translaté d'un sous-tore et majorer l'ordre d'un point de torsion appartenant à $V$.

Soit $u$ un point de torsion de $V$ et soit $n$ son ordre. Soit $\xi$ une racine de l'unité d'ordre $n$ ; comme $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$, $\xi$ possède au moins $\varphi(n)/m$ conjugués sur $K$, donc $u$ possède au moins $\varphi(n)/m$ conjugués sur $K$ qui sont autant de points de torsion d'ordre $n$ situés sur $V$.

D'après le théorème des nombres premiers, il existe un nombre réel $c_1 > 0$ (indépendant de $n$) et un nombre premier $p$ ne divisant pas $n$ tel que $p^m \leqslant c_1 \log n$. Soit $p$ un tel nombre premier. Il existe un automorphisme $\sigma_1$ de $\mathbf{C}$ tel que $\sigma_1(\xi) = \xi^p$ ; alors $\sigma = \sigma_1^m$ est un automorphisme de $\mathbf{C}$ tel que $\sigma(\xi) = \xi$ et $\sigma(u) = u^d$, où $d = p^m$. Par suite, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K)$.

Notons $V_d$ l'image réciproque de $V$ par l'élévation des coordonnées à la puissance $d$ ; on a $u \in V_d$ : si $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ est une forme qui définit $V$ et $u = [1 : u_1 : u_2]$,

$$F(u^d) = F(1, u_1^d, u_2^d) = F(1, \sigma(u_1), \sigma(u_2)) = F^\sigma(1, \sigma(u_1), \sigma(u_2)) = \sigma(F(u)) = 0,$$

donc $u \in V_d \cap V$. Cela vaut aussi des $\varphi(n)/m$ conjugués qu'on en avait déduit. Comme $V$ est supposé ne pas être une sous-variété de torsion, $V$ n'est pas une composante irréductible de $V_d$. D'après le théorème de Bézout, on a donc

$$\frac{\varphi(n)}{m} \leqslant \mathrm{card}(V_d \cap V) \leqslant (\deg V_d)(\deg V) \leqslant d^2 (\deg V)^2.$$

Par suite,

$$\varphi(n) \leqslant m d^2 (\deg V)^2 \leqslant m c_1 (\deg V)^2 (\log n)^2 = c_2 (\log n)^2.$$

Comme $\varphi(n) \gg n^{1/2}$ lorsque $n$ tend vers l'infini, cette inégalité implique que l'ordre d'un point de torsion situé sur $V$ est borné. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points de torsion. □

### 2.2/2. Minoration de la hauteur d'un point qui n'est pas prépériodique

Les points prépériodiques sont de hauteur nulle, et inversement. Mais que peut valoir la hauteur d'un point qui n'est pas prépériodique ? D'après le théorème de finitude de Northcott, elle est strictement positive, et peut être arbitrairement grande. Elle peut aussi être arbitrairement petite. Soit $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ un point qui n'est pas prépériodique ; définissons une suite de points $(x_n)$ en posant $x_0 = x$ et où, pour tout $n$, $x_{n+1} \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ est un antécédent de $x_n$ par $f$. Cette suite est bien définie car l'endomorphisme $f$ est fini et surjectif. Pour tout $n$, on a $\hat{h}_{\mathscr{L}}(f(x_n)) = d h_{\mathscr{L}}(x_n)$, d'où

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n) = \frac{1}{d^n} \hat{h}_{\mathscr{L}}(x).$$

Cependant, en même temps que la hauteur de $x_n$ décroît, le corps sur lequel ce point est défini est susceptible de croître. En effet, comme $f$ est de degré $d^{\dim X}$, il faut, pour déterminer $x_{n+1}$, résoudre une équation de degré $d^{\dim X}$. Cette équation n'est peut-être pas irréductible, autrement dit le degré de l'extension $[K(x_{n+1}) : K(x_n)]$ n'est pas forcément égal à $d^{\dim X}$. C'est par exemple le cas si $X$ est un produit $X' \times X''$, $f = (f', f'')$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \boxtimes \mathscr{L}''$, et que la première coordonnée $x'$ du point $x$ est un point fixe de $f'$. On peut alors choisir $x_n$ de la forme $(x'_0, x''_n)$ et le degré de l'extension $[K(x_{n+1}) : K(x_n)]$ est au plus égal à $d^{\dim X''}$.

On espère néanmoins qu'il est toujours au moins égal à $d$, du moins en moyenne.

CONJECTURE 2.2.7. — *Existe-t-il un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est pas prépériodique,*

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) \geqslant \frac{c}{[K(x):K]}.$$

La première apparition de cette conjecture concerne la hauteur naturelle sur $\mathbf{P}^1$ sous la forme d'un *problème* dans LEHMER (1933) : Pour $\varepsilon > 0$, trouver un polynôme unitaire $P$ à coefficients entiers dont la mesure de Mahler vérifie $1 < \exp(\deg(P)\mathrm{M}(P)) < 1+\varepsilon$ ; il ajoute : « Whether or not the problem has a solution for $\varepsilon < 0{,}176$, we do not know. » Et nous ne savons toujours pas ! Le meilleur résultat connu dans ce cas est dû à DOBROWOLSKI (1979) ; citons-en une version un peu affaiblie :

PROPOSITION 2.2.8. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout nombre algébrique $\xi$ qui n'est ni nul ni une racine de l'unité, on ait*

$$h(\xi) \geqslant \frac{c}{[\mathbf{Q}(\xi):\mathbf{Q}]^{1+\varepsilon}}.$$

Dans le cas de l'espace projectif $\mathbf{P}^k$ et de l'endomorphisme $f\colon [x_0:\cdots:x_k] \mapsto [x_0^d:\cdots:x_k^d]$, pour lequel la hauteur naturelle est une hauteur canonique, AMOROSO & DAVID (2003) ont étendu les méthodes de DOBROWOLSKI (1979). Par ailleurs, DAVID & HINDRY (2000) ont traité le cas des variétés abéliennes à multiplication complexe, généralisant un théorème de LAURENT (1983) qui concernait les courbes elliptiques à multiplication complexe. Ces résultats impliquent immédiatement des théorèmes analogues pour leurs quotients, comme les endomorphismes de Lattès ou de Tchébychev de $\mathbf{P}^1$.

Tant DOBROWOLSKI (1979) que les extensions qui s'en inspirent utilisent de manière cruciale que pour beaucoup de nombres premiers $p$, on peut trouver un endomorphisme du système dynamique qui est « congru modulo $p$ » à l'application polynomiale donnée par l'élévation des coordonnées à la puissance $p$ (ou à un de ses itérés). Dans le cas du problème de LEHMER classique, cet endomorphisme n'est autre que l'application $[x_0:x_1] \mapsto [x_0^p:x_1^p]$, cette congruence apparaissant par le biais du petit théorème de FERMAT.

En revanche, cette méthode ne peut pas s'étendre à un système dynamique général, même sur $\mathbf{P}^1$. En effet, si $f$ et $g$ sont deux fractions rationnelles de degrés $\geqslant 2$ qui commutent, et telles qu'aucun itéré de $f$ n'est égal à aucun itéré de $g$, alors $(\mathbf{P}^1, f)$ est un endomorphisme déjà traité, c'est-à-dire l'élévation à la puissance $d$, un endomorphisme de Tchébychev, ou un endomorphisme de Lattès. C'est, à la suite de premiers travaux de FATOU et JULIA, le théorème de RITT (1923) et ERËMENKO (1989), cf. le §7 des notes de MILNOR (2006).

Dans le cas d'un système dynamique abélien général, défini sur un corps de nombres $K$, MASSER (1984) a démontré une inégalité plus faible, du type : si $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ n'est pas prépériodique,

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) \geqslant \frac{c}{[K(x):\mathbf{Q}]^{\kappa}},$$

où $c$ et $\kappa$ sont des constantes explicites. De telles estimations, pourtant bien plus faibles que celle prédite par la conjecture 2.2.7, ne semblent pas connues pour un système dynamique polarisé arbitraire, même en dimension 1.

### 2.2/3. Dénombrement des points prépériodiques

Supposons encore que le système dynamique $(X, f, \mathscr{L})$ soit défini sur un corps de nombres $K$. Les points prépériodiques de $X$ qui sont définis sur $K$ sont en nombre fini, d'après le cor. 2.1.9. Est-il possible de contrôler effectivement ce nombre de points ? Précisément :

CONJECTURE 2.2.9. — *Est-il possible de borner le nombre de points $K$-rationnels de $X$ qui sont prépériodiques en termes uniquement de* $[K : \mathbf{Q}]$*, de* $\dim X$*, de $d$ et de* $c_1(\mathscr{L})^{\dim X}$ *?*

D'après le théorème de plongement de Fakhruddin (prop. 2.1.1), il suffit en fait de démontrer le cas où $X$ est un espace projectif et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$. C'est d'ailleurs dans ce cas particulier que MORTON & SILVERMAN (1994) avaient énoncé cette conjecture.

Commençons par donner quelques cas particuliers qui l'ont motivée.

*2.2.10. Systèmes dynamiques abéliens.* — Le cas des systèmes dynamiques toriques étant un exercice facile, supposons que $X$ est une variété abélienne principalement polarisée et $f$ la multiplication par 2 dans $X$. *Les points prépériodiques pour $f$ sont alors les points de torsion de $X$, c'est-à-dire ceux dont un multiple non nul est nul.* En effet, $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ est prépériodique, c'est-à-dire si $f^n(x) = f^{n+p}(x)$, avec $n \geqslant 0$ et $p > 0$, on a $2^n x = 2^{n+p} x$, d'où $2^n(2^p - 1)x = 0$ et $x$ est de torsion. Inversement, si $x$ est annulé par un entier $N > 0$, écrivons $N = 2^n m$, où $m$ est impair. Alors, 2 est inversible dans l'anneau fini $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, et il existe un entier $p > 0$ tel que $2^p \equiv 1 \pmod{m}$. Alors, $2^{n+p} x = 2^n x$ et $x$ est prépériodique.

Dire que $X$ est principalement polarisée par $\mathscr{L}$ signifie exactement que $c_1(\mathscr{L})^{\dim X} = (\dim X)!$. Si de plus $\mathscr{L}$ est symétrique, ce qu'on peut supposer, alors $f^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\otimes 4}$, donc $(X, f, \mathscr{L})$ est de poids 4. La conjecture revient donc à savoir si le nombre de points de torsion de $X$ qui sont $K$-rationnels peut être majoré par une constante qui ne dépende que de $k$ et du degré $[K : \mathbf{Q}]$.

La question est déjà remarquablement difficile ! Lorsque $k = 1$, c'est-à-dire pour les courbes elliptiques, elle a été résolue par MAZUR (1977) lorsque $K = \mathbf{Q}$ et en général, après quelques résultats intermédiaires, par MEREL (1996) ; pour $k \geqslant 2$, elle est encore ouverte.

De manière analogue aux résultats partiels de FLEXOR & OESTERLÉ (1990) en direction du théorème de MEREL (1996), il y a des résultats partiels, fournissant une constante $c$ dépendant du corps $K$, et non seulement du degré $[K : \mathbf{Q}]$. Leur démonstration fait intervenir des rudiments de dynamique $p$-adique. Je renvoie à MORTON & SILVERMAN (1994).

### 2.2/4. Discrétion des points d'une sous-variété qui ne sont pas prépériodiques

La conjecture suivante fait intervenir la hauteur normalisée. On suppose donc que le système dynamique polarisé $(X, f, \mathscr{L})$ est défini sur un corps de nombres.

Si $Y$ est une sous-variété prépériodique de $X$, on a vu que $Y$ contient des points prépériodiques, et même qu'ils sont denses pour la topologie de Zariski. La hauteur normalisée prend donc la valeur 0 sur $Y(\overline{\mathbf{Q}})$. Même si l'on exclut les points prépériodiques, elle prend des valeurs arbitrairement petites car on peut toujours considérer la pré-orbite d'un point, qui est formée de points de hauteurs tendant vers 0. Une question naturelle, posée par BOGOMOLOV (1980) lorsque $X$ est la jacobienne d'une courbe de genre au moins 2 et $Y$ cette courbe, plongée de façon standard, consiste à se demander si ce phénomène est la seule raison pour laquelle la hauteur normalisée peut prendre des valeurs arbitrairement petites sur $Y$.

CONJECTURE 2.2.11. — *Soit $Y$ une sous-variété de $X$. L'ensemble des sous-variétés prépériodiques de $(X, f)$ contenues dans $Y$ n'a qu'un nombre fini d'éléments maximaux; notons $Y^*$ leur complémentaire dans $Y$. De plus,* $\inf_{x \in Y^*(\overline{\mathbf{Q}})} \hat{h}_{\mathscr{L}}(x) > 0$.

Remarquablement, les cas particuliers dans lesquels l'une ou l'autre des conjectures 2.2.2 et 2.2.11 sont prouvées sont précisément les mêmes.

Le cas des variétés toriques fut démontré d'abord par ZHANG (1995*a*) par des techniques de géométrie d'Arakelov combinées au résultat d'IHARA, SERRE et TATE expliqué plus haut. Il fut reprouvé par BILU (1997) comme corollaire d'un théorème d'équidistribution. Nous expliquerons sa démonstration au §3.4 du chapitre 3.

Le cas d'un système dynamique abélien est un théorème de ZHANG (1998), après que ULLMO (1998) eut traité le cas d'une courbe dans sa jaobienne.

La conjecture 2.2.11 est aussi vraie pour les produits de tels systèmes dynamiques d'après CHAMBERT-LOIR (2000), voir aussi DAVID & PHILIPPON (1998, 1999, 2000, 2002); AMOROSO & DAVID (2003, 2004, 2006) pour une nouvelle démonstration des cas précédents, ainsi que celui des variétés semi-abéliennes générales qui ne rentre pas tout à fait dans le contexte des systèmes dynamiques polarisés. Notons que ces derniers auteurs démontrent un énoncé *effectif* : pourvu que $Y$ ne soit pas translaté d'une sous-variété semi-abélienne, ils fournissent une valeur explicite pour $c$, ne dépendant que de la géométrie de $X$ et $Y$.

Elle est aussi valable pour les quotients de tels systèmes dynamiques (Lattès et autres). Enfin, MIMAR (1997) a traité quelques cas de systèmes dynamiques à variables séparées dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, c'est-à-dire de la forme $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$, où $f$ et $g$ sont deux fractions rationnelles de même degré.

### 2.2/5. Équidistribution vers la mesure canonique des suites de points dont la hauteur normalisée tend vers 0

Soit $K$ un corps de nombres sur lequel le système dynamique polarisé $(X, f, \mathscr{L})$ est défini. Tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ définit une mesure de probabilité discrète sur $X(\mathbf{C})$, notée $\delta_x$ : c'est la moyenne des masses de Dirac aux $[K(x) : K]$ conjugués de $x$.

CONJECTURE 2.2.12. — *Soit $(x_n)$ une suite de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(i) *pour toute sous-variété prépériodique $Y \subsetneq X$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $n$ tels que $x_n \in Y$ ;*

(ii) *la suite $(\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n))$ des hauteurs normalisées des $x_n$ tend vers $0$.*

*Est-il vrai que la suite $(\delta_{x_n})$ converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$ ?*

Faisons quelques commentaires au travers de deux exemples.

a) Supposons par exemple que $X = \mathbf{P}^1$ et que $f(x) = x^2$ ; alors les points prépériodiques sont $0$, $\infty$ et les racines de l'unité, la hauteur normalisée $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ n'est autre que la hauteur usuelle et la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$ est la mesure d'intégration sur le cercle unité. La condition $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n) \to 0$ est en particulier vérifiée si l'on prend pour $x_n$ une racine de l'unité, toutes distinctes entre elles. Si $x_n$ est d'ordre $d_n$, c'est une racine du polynôme cyclotomique $\Phi_{d_n}$, dont on sait qu'il est irréductible de degré $\varphi(d_n)$ (nombre d'entiers entre 1 et $d_n$ qui sont premiers à $d_n$). Les conjugués de $x_n$ sont ainsi les autres racines primitives $d_n$-ièmes de l'unité. Si par exemple $d_n$ est un nombre premier, les conjugués de $x_n$ sont les $\exp(2ik\pi/d_n$, pour $1 \leqslant k \leqslant d_n - 1$. Lorsque $d_n$ tend vers l'infini (toujours en étant un nombre premier) la mesure $\delta_{x_n}$ correspond à des sommes de Riemann sur le cercle (à l'oubli négligeable près d'une masse de Dirac en 1 divisée par $d_n$) et converge ainsi vers la mesure de Haar normalisée sur $\mathrm{S}^1$.

Inversement, la conjecture 2.2.12 appliquée à cet exemple indique que les racines de l'unité sont de grand degré, sorte de version quantitative du théorème affirmant l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

b) Prenant toujours des points périodiques sur $X = \mathbf{P}^1$, $f$ étant alors arbitraires, cette conjecture est un analogue arithmétique d'un énoncé d'équidistribution classique en théorie des systèmes dynamiques dû à BROLIN (1965) et LYUBICH (1983), où l'on remplace la mesure $\delta_{x_n}$ par la moyenne des masses de Dirac aux points périodiques répulsifs d'ordre $d_n$ tendant vers l'infini. Comme pour les racines de l'unité, la conjecture 2.2.12 implique que ces points périodiques répulsifs se répartissent en relativement peu d'orbites galoisiennes, toutes proches de la mesure d'équilibre.

c) En théorie des systèmes dynamiques, on peut aussi considérer, au lieu de $\delta_{x_n}$, le nuage des itérés inverses $f^{-n}(x_0)$ d'un point initial $x_0$. De fait, si $f(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n$, on a $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n) = \hat{h}_{\mathscr{L}}(x_0)/d^n$, donc la condition (ii) de la conjecture 2.2.12 est satisfaite. Là encore, cette conjecture tend à affirmer que le nuage $f^{-n}(x_0)$ se répartit en relativement peu d'orbites galoisiennes, toutes proches de la mesure d'équilibre.

d) Incidemment, il ne semble pas facile de produire une suite $(x_n)$ de points vérifiant la condition $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n) \to 0$ sans combiner les deux approches précédentes — points périodiques et préimages itérées.

PROPOSITION 2.2.13. — *La conjecture 2.2.12 implique la conjecture 2.2.11.*

*Démonstration.* — Soit $Y$ une sous-variété irréductible de $X$ qui n'est pas prépériodique.

Commençons par montrer qu'il n'existe dans $Y$ qu'un nombre fini de sous-variétés prépériodiques maximales. Dans le cas contraire, on pourrait en effet construire une suite $(Y_n)$ de sous-variétés irréductibles prépériodiques de $X$ contenues dans $Y$, telle que pour tout $n$, $Y_n$ ne soit pas contenue dans la réunion de $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ et telle que toute sous-variété prépériodique de $(X,f)$ qui est contenue dans $Y$ soit contenue dans l'une des $Y_n$.

Alors $Y_n \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1})$ est un fermé de Zariski strict de $Y_n$ ; il existe donc un point $y_n \in Y_n(\overline{\mathbf{Q}})$ qui est prépériodique mais qui n'appartient pas à $Y_m$ si $m < n$. On a $\hat{h}_{\mathscr{L}}(y_n) = 0$. Supposant la conjecture 2.2.12 vérifiée, la suite de mesures discrète $(\delta_{y_n})$ converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$. Mais comme $y_n \in Y$ pour tout $n$, les supports des mesures $(\delta_{y_n})$ sont contenus dans la partie fermée $Y(\mathbf{C})$ de $X(\mathbf{C})$. Par suite, le support de leur mesure limite est lui-aussi contenu dans $Y(\mathbf{C})$. La contradiction vient de ce que la mesure $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$ ne charge pas les sous-ensembles algébriques stricts (théorème 3.1 du texte de GUEDJ, voir aussi plus haut, paragraphe 2.1/4).

Cela démontre que la réunion $Y_0$ des sous-variétés prépériodiques de $(X,f)$ qui sont contenues dans $Y$ est une partie fermée de $Y$. On a $Y_0 \neq Y$ puisque $Y$ n'est pas prépériodique. Supposons que $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x)$ prenne des valeurs arbitrairement petites lorsque $x \in Y(\overline{\mathbf{Q}})$ mais $y \not\in Y_0$. Soit $(y_n)$ une suite de points de $Y(\overline{\mathbf{Q}})$ n'appartenant pas à $Y_0$ telle que $\hat{h}_{\mathscr{L}}(y_n) \to 0$. Comme précédemment, la contradiction apparaît en considérant la suite de mesures $(\delta(y_n))$ supportées par $Y(\mathbf{C})$ : cette suite converge en effet vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$, donc son support est contenu dans $Y(\mathbf{C})$ bien qu'il soit Zariski-dense dans $X(\mathbf{C})$. □

La géométrie d'Arakelov fournit une voie d'attaque de cette conjecture d'équidistribution, qui s'est d'ailleurs avérée remarquablement efficace. Elle consiste en le théorème d'équidistribution ci-dessous, dû aux travaux successifs de SZPIRO *et al.* (1997), AUTISSIER (2001) puis pour finir YUAN (2006), voir aussi BILU (1997); RUMELY (1999); CHAMBERT-LOIR (2000, 2006); BAKER (2006); BAKER & RUMELY (2006); FAVRE & RIVERA-LETELIER (2006) pour des démonstrations alternatives (lorsque $X = \mathbf{P}^1$) et des variantes, notamment $p$-adiques.

THÉORÈME 2.2.14 (Yuan). — *Soit $(x_n)$ une suite de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(i) *pour toute sous-variété $Y \subsetneq X$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $n$ tels que $x_n \in Y$ ;*

(ii) *la suite $(\hat{h}_{\mathscr{L}}(x_n))$ des hauteurs normalisées des $x_n$ tend vers* $0$.

*Alors, la suite $(\delta_{x_n})$ converge vers la mesure canonique $\hat{\mu}_{\mathscr{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$.*

S'il m'est impossible de décrire succinctement la démonstration du théorème de Yuan, je consacre le chapitre 3 de ce texte à la démonstration, d'après BAKER (2006), du théorème 2.2.14 lorsque $X$ est la droite projective. J'y exposerai aussi la démonstration, due à BILU (1997), de la conjecture d'équidistribution 2.2.12 pour les systèmes dynamiques toriques.

## §2.3. Exercices

*Exercice 2.3.1.* — a) On définit une application rationnelle $\sigma$ de $\mathbf{P}^2$ dans lui-même en associant à un point de coordonnées homogènes $[x:y:z]$ le point de coordonnées homogènes $[yz:zx:xy]$. Cette application est définie dès qu'au moins deux des coordonnées $x,y,z$ ne sont pas nulles, c'est-à-dire en dehors de la réunion $E$ des trois axes de coordonnées. Cette application est de degré 2 mais pour tout $x\in\mathbf{P}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ où $\sigma$ est définie, on a $\sigma\circ\sigma(x)=x$ — c'est une involution (« involution de CREMONA »). En particulier, tout point de $\mathbf{P}^2\setminus E$ est prépériodique.

b) Soit $u=[\ell_1:\ell_2:\ell_3]$ un automorphisme linéaire de $\mathbf{P}^2$ et posons $\tau=u^{-1}\circ\sigma\circ u$. C'est encore une involution rationnelle de $\mathbf{P}^2$, définie par des polynômes $[F_1:F_2:F_3]$ de degré 2. Si le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, agissant sur les coefficients des formes linéaires $\ell_i$, *permute* ces trois formes linéaires, alors les polynômes $F_i$ définissant $\tau$ sont à coefficients rationnels.

c) Le lieu d'indétermination $E'$ de $\tau$ est l'image réciproque par $u$ de la réunion des trois axes de coordonnées. Déterminer un automorphisme $u$ de sorte que $E'\cap\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ soit vide. Alors, les polynômes $F_i$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ sans pour autant que l'inégalité de la prop. 1.1.3 du chapitre 1 soit valide. Pourquoi cela ne contredit-il pas cette proposition ?

*Exercice 2.3.2* (KAWAGUCHI (1999)). — Soit $f\colon X\to X$ un endomorphisme d'une variété projective et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droite ample sur $X$. On suppose que $f^*\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}^{-1}$ est ample. Alors, il existe un nombre réel $c>0$ tel que pour tout point $x\in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui est prépériodique pour $f$, $h_{\mathscr{L}}(x)<c$. Par conséquent, le théorème 2.1.9 s'étend à ce contexte (un peu) plus général. (Montrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ $(f^*\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}^{-1})^n\otimes\mathscr{L}^{-1}$ est ample. En déduire qu'il existe un nombre réel $a$ tel que $h_{\mathscr{L}}(f(x))\geqslant(1+\frac{1}{n})h_{\mathscr{L}}(x)-a$ pour tout $x\in X(\overline{\mathbf{Q}})$.)

*Exercice 2.3.3* (LEWIS (1972)). — Par linéarité, on étend la notion de hauteur aux 0-cycles (c'est-à-dire aux combinaisons linéaires formelles de points). Soit $f$ et $g$ des endomorphismes d'un espace projectif $\mathbf{P}^n$ tels que $\deg(f)>\deg(g)$.

a) Montrer qu'il existe une unique hauteur $\hat{h}$ relative au fibré $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^n$ telle que $\hat{h}(f_*g^*x)=\deg(f)\hat{h}(x)$ pour tout $x\in\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$. (Dans cette formule, $f_*$ et $g^*$ désigne les applications déduites de $f$ et $g$ au niveau des 0-cycles, voir FULTON (1998), chapitre 1.)

b) Soit $X$ une partie de $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ telle que $g|_X$ est injective et $g(X)\subset f(X)$. Montrer que les éléments de $X$ sont de hauteur bornée.

c) En déduire que pour tout corps de nombres $K$, il n'y a pas de partie infinie $X\subset\mathbf{P}^n(K)$ tels que $g|_X$ soit injective et $g(X)\subset f(X)$.

*Exercice 2.3.4* (POONEN (1999)). — Soit $f\colon X\to X$ un endomorphisme d'une variété projective et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droite ample sur $X$. Soit $h$ une fonction hauteur pour $\mathscr{L}$. On suppose qu'il existe des nombres réels $a>1$ et $b$ tel que $h(f(x))\geqslant ah(x)-b$ pour tout $x\in X(\overline{\mathbf{Q}})$.

a) Montrer qu'il existe des nombres réels $c>1$ et $M>0$ tels que l'on ait $h(f(x))\geqslant ch(x)$ pour tout $x$ tel que $h(x)\geqslant M$.

b) Pour tout point $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est pas prépériodique, la suite $(h(f^n(x)))$ tend vers l'infini.

c) Pour $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$, on note $N(x)$ le plus petit entier $n$ tel que $h(f^n(x)) \geqslant M$, s'il en existe, ou $+\infty$ sinon. On dit qu'une suite $(x_k)$ de points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ est *de petite hauteur* si la suite $(N(x_k))$ tend vers l'infini.

Supposons qu'il existe une hauteur canonique $\hat{h}$ associée à $f$, c'est-à-dire une fonction $\hat{h}$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h} - h$ soit bornée et que $\hat{h}(f(x)) = \lambda h(x)$ pour tout $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$. Montrer que $\lambda > 1$. Montrer qu'une suite $(x_k)$ est de petite hauteur si et seulement si $\hat{h}(x_k) \to 0$ (d'où la terminologie !).

*Exercice 2.3.5.* — Cet exercice propose quelques cas (plus ou moins) faciles du problème de Lehmer. Soit $\xi$ un nombre algébrique qui n'est ni nul ni une racine de l'unité ; soit $P$ son polynôme minimal. On rappelle que la mesure de Mahler de $P$ est égale à $\exp(h(\xi)[\mathbf{Q}(\xi):\mathbf{Q}])$.

a) Si $\xi$ n'est pas un entier algébrique, de même que son inverse, alors $M(P) \geqslant 2$.

b) Si $\xi$ est totalement réel, c'est-à-dire si toutes les racines de $P$ sont réelles, alors $M(P) \geqslant \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{1/2}$ ; SCHINZEL (1974/75). Démonstration de HÖHN & SKORUPPA (1993) : pour $x \in \mathbf{R}$, observer l'inégalité

$$\max(1, |x|) \geqslant |x|^{1/2} |x - 1/x|^{1/2\sqrt{5}} \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{1/2}.$$

*Exercice 2.3.6.* — a) Soit $M$ un espace métrique et soit $u$, $v$ deux applications continues contractantes de $M$ dans $M$. Si $u$ et $v$ commutent, leurs points fixes respectifs coïncident.

b) Soit $X$ une variété algébrique projective, soit $f$ et $g$ des endomorphismes de $X$, soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $X$ et $d$, $e$ des entiers $\geqslant 2$ tels que $f^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\otimes d}$ et $g^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}^{\otimes e}$. Si $f$ et $g$ commutent, les hauteurs normalisées relatives à $\mathscr{L}$ associées à $f$ et $g$ coïncident.

Cela s'applique notamment aux systèmes dynamiques toriques et abéliens.

*Exercice 2.3.7.* — Soit $(X, f, \mathscr{L})$ un système dynamique torique et soit $G$ le tore sous-jacent.

a) Soit $K$ un corps de nombres ; soit $n$ le cardinal du groupes des racines de l'unité contenues dans $K$. Montrer que $\varphi(n) \leqslant [K:\mathbf{Q}]$ ; en déduire que $n$ est majoré par une constante ne dépendant que de $[K:\mathbf{Q}]$.

b) Soit $X$ une variété torique projective lisse de dimension $k$, soit $G$ le tore sous-jacent à $X$ et soit $f$ l'endomorphisme de $X$ qui prolonge l'endomorphisme $u \mapsto u^2$ de $G$. Montrer que les composantes irréductibles du diviseur $D = X \setminus G$ sont stables par $f$ et sont encore des systèmes dynamiques toriques. Majorer en terme de $c_1(\mathscr{L})^k$ le nombre de ces composantes.

c) Montrer que la restriction de la conjecture 2.2.9 à la classe des systèmes dynamiques toriques est vraie.

*Exercice 2.3.8.* — Soit $X$ une variété projective sur un corps $K$, munie de deux endomorphismes $f$ et $g$. On suppose que le système dynamique $(X \times X, f \times f)$ vérifie la conjecture 2.2.2. On fait enfin l'hypothèse qu'il existe un ensemble $Z$ de points de $X$, dense dans $X$ pour la topologie de Zariski, tel que pour tout $z \in Z$, $z$ et $g(z)$ soient prépériodiques pour $f$.

a) En appliquant l'énoncé de la conjecture 2.2.2 au graphe $\Gamma_g$ de $g$ dans $X \times X$, montrer qu'il existe des entiers $a$ et $b$, avec $a > 0$, tels que $f^b g f^a = f^{a+b} g$.

b) Soit $k$ un entier au moins égal à 2 et soit $\alpha$ un élément non nul de $K$. Démontrer qu'un polynôme $P \in K[X_0, \cdots, X_n]$ qui vérifie une équation de la forme $P(X_0^k, \dots, X_n^k) = \alpha P(X)^k$ n'a qu'un seul monôme.

c) On revient au contexte de l'exercice en supposant que $X = \mathbf{P}^n$ et que $f$ est l'élévation des coordonnées à une certaine puissance $k \geqslant 2$, de sorte que les points de $X$ qui sont prépériodiques pour $f$ sont les points à coordonnées racines de l'unité. Montrer qu'il existe des monômes $G_0, \dots, G_n$ et des racines de l'unité $\zeta_0, \dots, \zeta_n$, tels que $g([x_0 : \cdots : x_n]) = [\zeta_0 G_0(x) : \cdots : \zeta_n G_n(x)]$ ; voir aussi KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007*a*).

# CHAPITRE 3

# ÉQUIDISTRIBUTION SUR LA DROITE PROJECTIVE

Le but de ce chapitre est d'exposer la démonstration de la conjecture d'équidistribution des points de petite hauteur pour les systèmes dynamiques sur la droite projective. Cette conjecture a été démontrée par AUTISSIER (2001) par des techniques de géométrie d'Arakelov, mais le cas de la droite projective munie de la hauteur naturelle (un système dynamique torique) est dû à BILU (1997). La méthode utilisée par Bilu a été étendue au cas général dans BAKER & RUMELY (2006) (voir aussi BAKER & HSIA (2005) pour les systèmes dynamiques polynomiaux) et indépendamment par FAVRE & RIVERA-LETELIER (2006), ces derniers auteurs établissant en outre une borne pour la vitesse de convergence.

La version que je donne ici est issue de BAKER & RUMELY (2006) avec quelques simplifications que permettent un résultat de BAKER (2006) et l'emploi de techniques $L^2$ classiques en théorie du potentiel.

## §3.1. Fonctions de Green

Dans toute cette section, on se donne un corps valué $\mathbf{C}_v$ qui est ou bien le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, ou bien le corps $\mathbf{C}_p$, pour un nombre premier $p$. On note $|\cdot|$ la valeur absolue de $\mathbf{C}_v$. Soit $f$ un endomorphisme de degré $d$ de la droite projective, donné par deux polynômes homogènes $(U,V)$ en deux variables $X$ et $Y$ à coefficients dans $\mathbf{C}_v$, sans zéro commun dans $\mathbf{C}_v^2$ autre que $(0,0)$.

La $n$-ième itérée de $f$ est donnée par deux polynômes homogènes $(U_n,V_n)$ de degré $d^n$. En fait, ces polynômes obéissent aux relations de récurrence

$$U_{n+1}(X,Y) = U(U_n(X,Y),V_n(X,Y)) = U_n(U(X,Y),V(X,Y)),$$
$$V_{n+1}(X,Y) = V(U_n(X,Y),V_n(X,Y)) = V_n(U(X,Y),V(X,Y)).$$

Ils sont de degré $d^n$ et sans zéro commun autre que $(0,0)$.

Soit $\infty$ le point $[1:0]$ de $\mathbf{P}^1$. Le diviseur $f^*\infty$ est défini par l'équation $V=0$. On a ainsi $f^*\infty = d\infty + \operatorname{div}(V/Y^d)$. Notons $\lambda_v$ la fonction de Green normalisée pour le diviseur $\infty$ et la fraction rationnelle $V(X,Y)/Y^d$.

### 3.1/1. Ensemble de Julia rempli

LEMME 3.1.1. — *Pour tout* $(x,y)\in\mathbf{C}_v^2$, *la limite suivante*

$$\Lambda_v(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log\max\left(\left|U_n(x,y)\right|,\left|V_n(x,y)\right|\right) \tag{3.1.2}$$

*existe. En fait, on a*

$$\Lambda_v(x,y)=\lambda_v([x:y])+\log\left|y\right|$$

*pour tout* $(x,y)\in\mathbf{C}_v^2$ *tel que* $y\neq 0$.

*Démonstration.* — Lorsque $(x,y)=(0,0)$, la suite qui définit $\Lambda_v$ est constante de valeur $-\infty$. Nous allons montrer qu'elle converge en tout autre point vers un nombre réel.

Comme $U$ et $V$ sont sans zéro commun, on déduit du théorème des zéros de Hilbert l'existence d'un encadrement

$$c_v^{-1}\max\left(\left|x\right|,\left|y\right|\right)^d\leqslant\max\left(\left|U(x,y)\right|,\left|V(x,y)\right|\right)\leqslant c_v\max\left(\left|x\right|,\left|y\right|\right)^d, \tag{3.1.3}$$

valable pour tout couple $(x,y)\in\mathbf{C}_v\times\mathbf{C}_v$ distinct de $(0,0)$. (La méthode a été exposée plusieurs fois déjà, par exemple dans la preuve de la proposition 1.3.4.) On en déduit que

$$\frac{1}{d^n}\log\max\left(\left|U_n(x,y)\right|,\left|V_n(x,y)\right|\right)-\frac{1}{d^{n+1}}\log\max\left(\left|U_{n+1}(x,y)\right|,\left|V_{n+1}(x,y)\right|\right)$$

est majorée uniformément par un multiple de $d^{-n}$. La convergence normale de la suite en résulte. Sa limite est une fonction continue sur $\mathbf{C}_v^2\setminus\{(0,0)\}$ et la fonction

$$(x,y)\mapsto\Lambda_v(x,y)-\log\max(\left|x\right|,\left|y\right|)$$

est bornée sur $\mathbf{C}_v^2\setminus\{(0,0)\}$. En particulier, $\Lambda_v$ est bornée sur tout domaine de $\mathbf{C}_v^2$ de la forme

$$a\leqslant\max(\left|x\right|,\left|y\right|)\leqslant b,$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels strictement positifs.

Par construction, on a $\Lambda_v(U(x,y),V(x,y))=d\Lambda_v(x,y)$. De plus, pour $u\in\mathbf{C}_v^*$ et $(x,y)\in\mathbf{C}_v\times\mathbf{C}_v$ distinct de $(0,0)$, on a $\Lambda_v(ux,uy)=\log|u|_v+\Lambda_v(x,y)$. Par suite, l'application $(x,y)\mapsto\Lambda_v(x,y)-\log\left|y\right|$ définit, par passage au quotient, une application $\varphi$, continue, de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)\setminus\{\infty\}$ dans $\mathbf{R}$. L'ensemble des $[x:y]\in\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$ tels que $\left|y\right|\leqslant\left|x\right|$ est un voisinage du point $\infty=[1:0]$ ; en un tel point $[x:y]$ avec $y\neq 0$,

$$\varphi([x:y])=\Lambda_v(x,y)-\log\left|y\right|=-\log\frac{\left|y\right|}{\max(\left|x\right|,\left|y\right|)}+\left(\Lambda_v(x,y)-\log\max(\left|x\right|,\left|y\right|)\right)\quad.$$

Par suite, $\varphi$ est une fonction de Green pour le diviseur $\infty$.

Les relations

$$\begin{aligned}\varphi(f([x:y])) &= \varphi([U(x,y):V(x,y)]) \\ &= \Lambda_v(U(x,y),V(x,y)) - \log\left|V(x,y)\right|_v \\ &= d\Lambda_v(x,y) - \log\left|V(x,y)\right|_v \\ &= d\varphi([x:y]) - \log\left|\frac{V(x,y)}{y^d}\right|_v\end{aligned}$$

montrent qu'elle vérifie en outre l'équation fonctionnelle qui caractérise la fonction de Green normalisée. On a donc $\Lambda_v = \varphi$. □

Soit $\mathscr{J}_v$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que la suite $(U_n(x,y), V_n(x,y))$ soit bornée dans $\mathbf{C}_v^2$. On l'appelle l'*ensemble de Julia rempli homogène* de $f$.

PROPOSITION 3.1.4. — *Pour qu'un point $(x,y)$ de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$, appartienne à $\mathscr{J}_v$, il faut et il suffit qu'il vérifie $\Lambda_v(x,y) \leqslant 0$.*

*Démonstration.* — Comme $\Lambda_v(x,y) = \lim d^{-n} \max\left(\left|U_n(x,y)\right|_v, \left|V_n(x,y)\right|_v\right)$, il est clair que l'on a $\Lambda_v(x,y) \leqslant 0$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{J}_v$.

Inversement, si l'on pose $m = c_v^{-1/(d-1)}$, l'inégalité (3.1.3) entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$ et tout nombre réel $M > 0$, on a l'implication

$$m\max(\left|x\right|_v, \left|y\right|_v) \geqslant M \quad \Rightarrow \quad m\max(\left|U(x,y)\right|_v, \left|V(x,y)\right|_v) \geqslant M^d.$$

Pour un couple $(x,y) \in \mathbf{C}_v^2$ tel que $m\max(\left|x\right|_v, \left|y\right|_v) \geqslant R$ avec $R > 1$, on en déduit que $m\max(\left|U_n(x,y)\right|_v, \left|V_n(x,y)\right|_v) \geqslant R^{d^n}$, d'où l'inégalité $\Lambda_v(x,y) \geqslant \log R > 0$. Il en est de même s'il existe un entier $n$ tel que $m\max(\left|U_n(x,y)\right|_v, \left|V_n(x,y)\right|_v) > 1$. Autrement dit, si $\Lambda_v(x,y) \leqslant 0$, alors $\max(\left|U_n(x,y)\right|_v, \left|V_n(x,y)\right|_v) \leqslant 1/m$ pour tout $n$, ce qui démontre que la suite $(U_n(x,y), V_n(x,y))$ est bornée dans $\mathbf{C}_v^2$. □

*Exemple 3.1.5.* — Supposons que $U = X^d$ et $V = Y^d$. Alors, $U_n = X^{d^n}$ et $V_n = Y^{d^n}$ pour tout $n$. On a donc $\max(\left|U_n(x,y)\right|, \left|V_n(x,y)\right|) = \max(\left|x\right|, \left|y\right|)^{d^n}$ si bien que l'ensemble de Julia rempli $\mathscr{J}_v$ est le bidisque $B_v^2$, où $B_v = \{x \in \mathbf{C}_v\,;\, \left|x\right| \leqslant 1\}$.

*Exemple 3.1.6.* — Supposons que $\mathbf{C}_v$ soit ultramétrique et que les conditions suivantes soient satisfaites :

- les coefficients de $U$ et $V$ sont de valeur absolue au plus 1.
- leur résultant $\operatorname{Res}(U,V)$ est une unité $v$-adique.

(On dit que le système dynamique a *bonne réduction*.) Alors, *l'ensemble de Julia rempli homogène $\mathscr{J}_v$ est exactement l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que* $\max(\left|x\right|_v, \left|y\right|_v) \leqslant 1$.

En effet, dans l'inégalité (3.1.3), on peut prendre la constante $c_v$ égale à 1. C'est clair pour l'inégalité de droite : si $\max(\left|x\right|, \left|y\right|) \leqslant 1$, alors $\max(\left|U(x,y)\right|, \left|V(x,y)\right|) \leqslant 1$. En particulier, si un couple $(x,y) \in \mathbf{C}_v^2$ vérifie $\left|x\right|_v \leqslant 1$ et $\left|y\right|_v \leqslant 1$, il en est de même des couples $(U_n(x,y), V_n(x,y))$ et $(x,y) \in \mathscr{J}_v$.

Avant de démontrer l'inégalité de gauche, rappelons que par définition, le résultant $\operatorname{Res}(U,V)$ est le déterminant de l'application linéaire $(A,B)\mapsto AU+BV$ de l'espace $(\mathbf{C}_v[X,Y]_{d-1})^2$ dans $\mathbf{C}_v[X,Y]_{2d-1}$, dans les bases standard données par les monômes ; considéré comme fonction polynomiale des coefficients de $U$ et $V$, i il est bihomogène de bidegré $(d(d-1),d(d-1))$ et s'annule si et seulement si $U$ et $V$ ont un zéro commun. La théorie du résultant affirme qu'il existe des polynômes homogènes $A$ et $B$ de degrés $d-1$ tels que $AU+BV=\operatorname{Res}(U,V)X^{2d-1}$, et les coefficients de ces polynômes appartiennent au sous-anneau de $\mathbf{C}_v$ engendré par les coefficients de $U$ et $V$ ; ce sont donc des éléments de valeur absolue au plus 1. Par suite, sous l'hypothèse que $|\operatorname{Res}(U,V)|=1$, on a

$$|x|^{2d-1}\leqslant \max(|x|,|y|)^{d-1}\max(|U(x,y)|,|V(x,y)|),$$

et donc

$$|x|\leqslant \max(|U(x,y)|,|V(x,y)|)^{1/d}.$$

Par symétrie, $|y|$ vérifie la même majoration. Par récurrence, on obtient l'inégalité

$$\max(|x|,|y|)\leqslant \max(|U_n(x,y)|,|V_n(x,y)|)^{1/d^n},$$

valable pour tout $n\geqslant 1$. En particulier, si la suite $(U_n(x,y),V_n(x,y))$ est bornée, $\max(|x|,|y|)\leqslant 1$, ce qui conclut la preuve que $\mathscr{J}_v$ est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbf{C}_v^2$ tels que $\max(|x|,|y|)\leqslant 1$.

### 3.1/2. L'inégalité de Baker

Pour tout couple de points distincts, $(P_1,P_2)\in(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{C}_v)$, de coordonnées homogènes $[x_1:y_1]$ et $[x_2:y_2]$ respectivement, posons

(3.1.7)
$$G_v(P_1,P_2)=-\log\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\right|_v+\Lambda_v(x_1,y_1)+\Lambda_v(x_2,y_2)-\frac{1}{d(d-1)}\log|\operatorname{Res}(U,V)|_v,$$

où $\operatorname{Res}(U,V)$ désigne le *résultant* des polynômes $U$ et $V$. On vérifie immédiatement que cette expression ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes définissant les points $P_1$ et $P_2$. Elle ne dépend pas non plus du choix des polynômes homogènes $U$ et $V$ grâce à l'homogénéité du résultant.

Si les coordonnées homogènes de $P_1$ et $P_2$ sont choisies de la forme $[z_1:1]$ et $[z_2:1]$, on a

$$G_v(P_1,P_2)=-\log|z_1-z_2|_v+g_v(P_1)+g_v(P_2)-\frac{1}{d(d-1)}\log|\operatorname{Res}(U,V)|_v. \tag{3.1.8}$$

On voit ainsi que $G_v$ est une fonction de Green pour le diviseur diagonal de $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ — il ne faut cependant pas la confondre avec les fonctions de Green de diviseurs sur $\mathbf{P}^1$ ! La fonction $G_v$ jouera ici le rôle (de l'opposé du logarithme) d'une distance entre points de $\mathbf{P}^1$.

La proposition essentielle sur laquelle reposera la démonstration du théorème d'équidistribution est la minoration suivante de moyennes de la fonction $G_v$. C'est un analogue d'un théorème d'ELKIES (voir LANG (1988), théorème 5.1, p. 150) dans le cas des fonctions de Green normalisées ; l'assertion sur la limite inférieure est le pendant d'une minoration de FALTINGS (1984).

PROPOSITION 3.1.9 (BAKER (2006)). — *Il existe un nombre réel $c_v$ tel que pour tout entier $n$ et toute famille $(P_1,\dots,P_n)$ de points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$, on ait*

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} G_v(P_i,P_j) \geqslant -c_v\frac{\log n}{n}.$$

*En particulier,*

$$\liminf_{\substack{n\to\infty\\ (P_1,\dots,P_n)\text{ distincts}}} \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} G_v(P_i,P_j) \geqslant 0.$$

La démonstration de cette proposition fera l'objet du §3.3.

### 3.1/3. Diamètre transfini homogène

Nous terminons cette section par une première application de l'inégalité de la prop. 3.1.9, à savoir le calcul du diamètre transfini homogène de l'ensemble de Julia rempli homogène. Il s'agit d'un analogue du fait, classique en dynamique polynomiale sur $\mathbf{C}$, que le diamètre transfini, ou la capacité, de l'ensemble Julia d'un polynôme $f = a_d x^d + \dots + a_0 \in \mathbf{C}[x]$, de degré $d \geqslant 2$, est égale à $|a_d|^{-1/(d-1)}$. (Voir RANSFORD (1995), théorème 6.5.1, p. 191). Cette formule est due à DEMARCO (2003) dans le cas archimédien et à BAKER & RUMELY (2006) dans le cas général ; on trouvera dans DEMARCO & RUMELY (2007) la généralisation au cas de $n$ polynômes homogènes de même degré en $n$ variables.

Pour $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ dans $\mathbf{C}^2$, on pose

$$d(z_1,z_2) = \left|x_1y_2 - x_2y_1\right|.$$

Le *diamètre transfini homogène* d'une partie bornée $K$ de $\mathbf{C}_v^2$ est défini par la formule

$$\delta^h(K) = \lim_n \sup_{z_1,\dots,z_n\in K} \prod_{i\neq j} d(z_i,z_j)^{1/n(n-1)}.$$

Par la même méthode que dans le cas classique, on vérifie facilement que la limite existe : notant $\delta_n(K)$ le $n$-ième terme de cette suite, la suite $(\delta_n(K))$ est décroissante. Soit en effet $z_1,\dots,z_n,z_{n+1} \in K$. Pour tout $s \in \{1,\dots,n+1\}$, on a

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n+1\\ i,j\neq s}} d(z_i,z_j) \leqslant \delta_n(K)^{n(n-1)}.$$

Faisant le produit de ces inégalités, on obtient

$$\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n+1} d(z_i,z_j)^{n-1} \leqslant \delta_n(K)^{n(n-1)(n+1)},$$

soit encore

$$\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n+1} d(z_i,z_j)^{1/n(n+1)} \leqslant \delta_n(K).$$

Par suite, $\delta_{n+1}(K) \leqslant \delta_n(K)$.

On s'intéresse dans cette section au diamètre transfini homogène des ensembles de Julia remplis.

*Exemple 3.1.10.* — Supposons que $\mathbf{C}_v$ soit ultramétrique et montrons que le diamètre transfini homogène du bidisque $K = B_v^2$, où $B_v = \{x \in \mathbf{C}_v\,;\, |x| \leqslant 1\}$, est égal à 1.

Par l'inégalité ultramétrique, $d(z,w) \leqslant 1$ pour $z$ et $w$ dans $K$. On voit donc que $\delta^h(K) \leqslant 1$. Par ailleurs, si $P_1,\dots,P_n$ sont $n$ éléments de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$ de la forme $(z_i,1)$, où $z_1,\dots,z_n$ sont des éléments distincts de $\mathbf{C}_v$, de valeur absolue $\leqslant 1$ et dont les images dans le corps résiduel soient distinctes, on a $d(P_i,P_j) = 1$ pour tout couple $(i,j)$ tel que $i \neq j$. Puisque le corps résiduel de $\mathbf{C}_v$ est infini, il existe de telles familles. Avec les notations introduites au début de ce paragraphe, on a donc $\delta_n(K) = 1$, d'où $\delta^h(K) = 1$.

L'exemple qui précède calcule donc le diamètre transfini homogène d'un système dynamique à bonne réduction ; la formule suivante concerne le cas d'un système dynamique général.

PROPOSITION 3.1.11. — *Supposons que les coefficients de $f$ appartiennent à un corps de nombres $F$. On a alors $\delta^h(\mathscr{J}_v) = |\mathrm{Res}(U,V)|^{-1/d(d-1)}$.*

*Démonstration.* — Rappelons que la fonction de Green $G_v$ sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est définie par la formule

$$G_v([x_1:y_1],[x_2:y_2]) = -\log d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \Lambda_v(x_1,y_1) + \Lambda_v(x_2,y_2) - \frac{1}{d(d-1)}\log|\mathrm{Res}(U,V)|.$$

Par suite, si les points $P_i = (x_i,y_i)$ appartiennent à $\mathscr{J}_v$, on a

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} G_v(P_i,P_j) \leqslant -\log\Big(\prod_{i\neq j} d(P_i,P_j)\Big)^{1/n(n-1)} - \frac{1}{d(d-1)}\log|\mathrm{Res}(U,V)|.$$

Faisons tendre $n$ vers l'infini et appliquons la prop. 3.1.9 ; on trouve donc

$$\log\delta^h(\mathscr{J}_v) \leqslant -\frac{1}{d(d-1)}\log|\mathrm{Res}(U,V)|_v.$$

Pour établir l'inégalité dans l'autre sens, on écrit les inégalités analogues pour *toutes* les places $w$ du corps de nombres $F$ engendré par les coefficients de $f$. Comme $\overline{\mathbf{Q}}$ est dense dans $\mathbf{C}_v$, on a

$$\delta^h(\mathscr{J}_w) = \lim_n \sup_{(P_1,\dots,P_n)\in\mathbf{C}_w} \prod_{i\neq j} d_w(P_i,P_j)^{1/n(n-1)} = \lim_n \sup_{(P_1,\dots,P_n)\in\overline{\mathbf{Q}}} \prod_{i\neq j} d_w(P_i,P_j)^{1/n(n-1)},$$

où $d_w$ désigne la fonction analogue à $d$ mais avec la valeur absolue $|\cdot|_w$ de $\mathbf{C}_w$. Or, pour tout couple $(P_1,P_2)$ d'éléments de $\mathbf{C}_v \times \mathbf{C}_v$, on a, notant $P_i = (x_i,y_i)$, l'égalité $d_w(P_1,P_2) = |x_1y_2 - x_2y_1|_v$. Si $P_1$ et $P_2$ sont des éléments distincts de $F \times F$, la formule du produit entraîne donc

$$\sum_{w\in M_F} \varepsilon_w \log d_w(P_1,P_2) = 0.$$

En particulier, pour tout $n$-uplet $(P_1,\dots,P_n)\in\overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{w\in M_F}\varepsilon_w\log\delta_n^h(\mathscr{J}_w) &= \sum_{w\in M_F}\varepsilon_w\frac{1}{n(n-1)}\sup_{P_1,\dots,P_n}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\log d_w(P_i,P_j)\\ &\geqslant \sup_{P_1,\dots,P_n}\sum_{w\in M_F}\varepsilon_w\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\log d_w(P_i,P_j).\end{aligned}$$

D'après la formule du produit, on a donc $\sum_w\varepsilon_w\log\delta^h(\mathscr{J}_w)=0$. Comme

$$\sum_w\varepsilon_w\log\delta^h(\mathscr{J}_w)\leqslant-\frac{1}{d(d-1)}\sum_w\varepsilon_w\log|\mathrm{Res}(U,V)|_w=0,$$

toujours par la formule du produit, on a égalité place par place, comme il fallait démontrer. □

## §3.2. Démonstration du théorème d'équidistribution

Il s'agit de démontrer le théorème suivant, cas particulier du théorème 2.2.14 lorsque $X=\mathbf{P}^1$.

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $f\colon\mathbf{P}^1\to\mathbf{P}^1$ un endomorphisme de degré $d\geqslant2$ défini sur un corps de nombres $F$. Soit $\hat{h}$ la hauteur normalisée relativement au fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^1$. Si $P\in\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$, notons $\delta_P$ la mesure de probabilité sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, moyenne des masses de Dirac aux conjugués de $P$ sous l'action du groupe* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$.

*Pour toute suite $(P_n)$ de points distincts de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h}(P_n)\to0$, la suite de mesures $\delta_{P_n}$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ converge faiblement vers la mesure canonique $\hat{\mu}_f$.*

*Remarque 3.2.2.* — Considérons deux endomorphismes de degré $\geqslant2$ de $\mathbf{P}^1$, disons $f$ et $g$, à coefficients dans un corps de nombres. Supposons qu'ils aient une infinité de points prépériodiques en commun. Puisque les points prépériodiques sont ceux de hauteur normalisée nulle, cette hypothèse est satisfaite lorsque les hauteurs normalisées $\hat{h}_f$ et $\hat{h}_g$ coïncident, comme dans KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007*a*). On peut alors construire une suite $(P_n)$ de points distincts de $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ vérifiant $\hat{h}_f(P_n)=\hat{h}_g(P_n)=0$. Par suite, les mesures canoniques $\hat{\mu}_f$ et $\hat{\mu}_g$ coïncident. C'est alors un thème classique en dynamique complexe que de relier $f$ et $g$. Hormis des cas exceptionnels, LEVIN & PRZYTYCKI (1997) démontrent par exemple qu'il existe des entiers $m$ et $n$ tels que $(f^{-1}\circ f)\circ f^m=(g^{-1}\circ g)\circ g^n$. (Dans cette équation, $f^{-1}\circ f$ est à considérer comme une branche de la correspondance qui serait notée de la même façon.)

### 3.2/1. Hauteur et discrépance

Commençons par relier hauteur d'un point et les valeurs des fonctions de Green $G_v$.

Soit $P\in\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ ; notons $n$ son degré sur $F$ et $P_1,\dots,P_n$ ses conjugués. Supposons $n\geqslant2$. On pose alors, pour toute place $v\in M_F$,

$$D_v(P)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}G_v(P_i,P_j). \tag{3.2.3}$$

C'est la *discrépance* $v$-adique de $P$ : elle mesure la proximité mutuelle des conjugués de $P$ pour la topologie $v$-adique ; elle est d'autant plus grande que ces conjugués sont proches.

PROPOSITION 3.2.4. — *Pour tout point* $P \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ *privé de* $\mathbf{P}^1(F)$, *on a*

$$\hat{h}(P) = \frac{1}{2} \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v D_v(P).$$

*Démonstration.* — Comme $P \not\in \mathbf{P}^1(F)$, $P \neq \infty$. On peut alors fixer les coordonnées homogènes des $P_i$ sous la forme $[z_i : 1]$, avec $z_i \in \overline{\mathbf{Q}}$. Par définition de $G_v$,

$$D_v(P) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \log\left|z_i - z_j\right|_v + \frac{2}{n} \sum_{i=1} \lambda_v(P_i) - \frac{1}{d(d-1)} \log|\mathrm{Res}(U,V)|_v.$$

Par théorie de Galois, ou d'après le théorème sur les fonctions symétriques élémentaires, le produit $\prod_{i \neq j}(z_i - z_j)$ appartient à $F$ ; c'est, au signe près, le discriminant $\Delta(P)$ du polynôme $\prod_{i=1}^n (T - z_i)$. Par définition de la hauteur locale $\hat{h}_v$ relative au diviseur $\infty$ et à la fraction rationnelle $V(X,Y)/Y^d$, on a donc

$$D_v(P) = 2\hat{h}_v(P) - \frac{1}{n(n-1)} \log|\Delta(P)|_v - \frac{1}{d(d-1)} \log|\mathrm{Res}(U,V)|_v,$$

La décomposition de la hauteur normalisée en somme de hauteurs locales normalisées, pour $P \neq \infty$, s'écrit

$$\hat{h}(P) = \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \hat{h}_v(P).$$

D'autre part, la formule du produit implique que

$$\sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \log|\Delta(P)|_v = \sum_{v \in M_F} \varepsilon_v \log|\mathrm{Res}(U,V)|_v = 0.$$

La proposition en résulte. □

COROLLAIRE 3.2.5. — *Soit* $(P_n)$ *une suite de points distincts de* $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ *telle que* $\hat{h}(P_n)$ *tend vers* $0$. *Pour toute place* $v$ *de* $F$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} D_v(P_n) = 0.$$

*Démonstration.* — Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de hauteur bornée et de degré donné, le degré de $P_n$, $[F(P_n) : F]$, tend vers l'infini quand $n \to \infty$. D'après la prop. 3.1.9, $\liminf_n D_v(P_n) \geqslant 0$. Alors, pour toute place $w$ de $F$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} (\varepsilon_v D_v(P_n)) \\ &\geqslant \limsup_n (\varepsilon_w D_w(P_n)) + \sum_{v \neq w} \liminf_n (\varepsilon_v D_v(P)) \\ &\geqslant \limsup_n (\varepsilon_w D_w(P_n)), \end{aligned}$$

d'où le corollaire. □

### 3.2/2. Énergie

Soit $w$ la valeur absolue archimédienne de $F$ associée à l'inclusion de $F$ dans $\mathbf{C}$. Pour simplifier les notations de ce paragraphe, nous désignons par $G$ la fonction de Green $G_w$ et par $\mu$ la mesure canonique $\hat{\mu}_f$. Nous notons $M = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $\Delta$ la diagonale de $M \times M$.

Par leurs définitions mêmes, $G$ et $\mu$ sont reliées par l'équation aux dérivées partielles

$$dd^c G(z,w) + \delta_\Delta = \mathrm{d}\mu(z) + \mathrm{d}\mu(w) \tag{3.2.6}$$

sur $M \times M$, où $\delta_\Delta$ désigne le courant d'intégration sur la diagonale $\Delta$. En outre, $G$ est symétrique ($G(z,w) = G(w,z)$) et minorée.

On appelle *énergie* d'une mesure de probabilité $\nu$ sur $M$ la quantité (éventuellement infinie)

$$E(\nu) = \int_{M\times M} G(P,Q)\, d\nu(P)\, d\nu(Q). \tag{3.2.7}$$

Le *potentiel* de $\nu$ est défini par la formule

$$u_\nu(P) = \int_M G(P,Q)\, d\nu(Q). \tag{3.2.8}$$

Notons $W_1$ l'espace de Sobolev des fonctions $u$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui sont localement de carré sommable, ainsi que les coefficients des formes différentielles données par sa dérivée $\partial u$ au sens des distributions. (Il en est alors de même de $\bar\partial u$.) Si $u \in W_1$, on note $\|u\|_{\mathrm{Dir}}$ la semi-norme de Dirichlet de $u$, définie par

$$\|u\|^2_{\mathrm{Dir}} = \frac{i}{2\pi}\int_M \partial u \wedge \bar\partial u = -\int_M u\, dd^c u.$$

LEMME 3.2.9. — a) *Le potentiel $u_\nu$ d'une mesure $\mu$ est une fonction semi-continue inférieurement sur $M$ qui vérifie l'équation $dd^c u_\nu + \nu = \mu$ au sens des distributions. En outre, $u_\mu$ est constante, de valeur $E(\mu)$.*

b) *Si $\nu$ est une mesure définie par une forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$, on a $E(\nu) = E(\mu) + \|u\|^2_{\mathrm{Dir}}$.*

c) *Une mesure $\nu$ est d'énergie finie si et seulement si son potentiel appartient à $W_1$.*

*Démonstration.* — a) Comme $\max(G,m)$ est continue pour tout nombre réel $m$, $u$ est limite croissante de fonctions continues ; elle est donc semi-continue inférieurement. L'équation $dd^c u_\nu + \nu = \mu$ se démontre aisément par intégrations par parties. Appliquons cette formule à $\nu = \mu$ ; il s'ensuit que $u_\mu$ est harmonique, donc constante, de valeur $E(\mu) = \int u_\mu(P)\, d\mu(P)$.

b) Si $u_\nu$ est lisse, on a

$$\begin{aligned}
E(\nu) &= \int_M u_\nu(P)\,\mathrm{d}\nu(P) \\
&= \int_M u_\nu(P)\left(d\mu(P) - dd^c u_\nu(P)\right) \\
&= \| u_\nu \|^2_{\mathrm{Dir}} + \int_M u_\nu(P)\, d\mu(P) \\
&= \| u_\nu \|^2_{\mathrm{Dir}} + \int_{M\times M} G(P,Q)\, d\mu(P)\, d\nu(Q) \\
&= \| u_\nu \|^2_{\mathrm{Dir}} + \int_M u_\mu(Q)\, d\nu(P) \\
&= \| u_\nu \|^2_{\mathrm{Dir}} + E(\mu).
\end{aligned}$$

c) Si $u_\nu \in W_1$, on déduit facilement de l'égalité précédente que $E(\nu) < \infty$. Inversement, on peut approcher $\nu$ par une suite $\nu_\varepsilon$ de mesures de probabilité lisses d'énergies bornées.[1] Leur potentiel $u_\varepsilon$ appartient alors à $W_1$ (hors de $P$, $u_\varepsilon(\cdot) - G(P,\cdot)$ est de $dd^c$ lisse et $G(P,\cdot)$ appartient à $W_1$). Les normes $\| u_\varepsilon \|_{\mathrm{Dir}}$ sont bornées lorsque $\varepsilon \to 0$, puisque les énergies des mesures $\nu_\varepsilon$ sont uniformément bornées. Il existe donc une sous-suite faiblement convergente dans $W_1$ modulo les constantes ; soit $u \in W_1$ sa limite. Alors, $dd^c u = dd^c u_\nu$, si bien que $u - u_\nu$ est une distribution harmonique, donc est constante. On a donc $u \in W_1$. □

THÉORÈME 3.2.10. — *On a $E(\nu) \geqslant E(\mu) \geqslant 0$ pour toute mesure de probabilité $\nu$. De plus, $E(\nu) = E(\mu)$ équivaut à $\nu = \mu$.*

*Démonstration.* — Soit $c$ le nombre réel dont l'existence est affirmée par la prop. 3.1.9. Ainsi, si $P_1, \dots, P_n$ sont des points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} G(P_i, P_j) \geqslant -c \frac{\log n}{n}.$$

Comme $G(P,Q)$ vaut $+\infty$ si $P = Q$, cette relation vaut même si les $P_i$ ne sont pas distincts. On peut alors intégrer cette relation par rapport à la mesure-produit $\otimes \mathrm{d}\nu(P_i)$. Par symétrie, on obtient

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G(P,Q)\, d\nu(P)\, d\nu(Q) \geqslant -c \frac{\log n}{n},$$

[1] À l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas de mesures supportées par le disque unité et où $G(z,w) = \log|z-w|^{-1}$. Soit $\mu_\varepsilon$ des mesures de probabilités de la forme $\rho_\varepsilon(r)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$, et où les fonctions $\rho_\varepsilon$ sont positives, à support dans $[0,1]$ et où $\rho_\varepsilon(r)$ tend uniformément vers 0 sur tout intervalle fermé de la forme $[a,1]$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Posons $\nu_\varepsilon = \nu * \mu_\varepsilon$ ; les mesures $\nu_\varepsilon$ sont à densité $\mathscr{C}^\infty$ et convergent vers $\nu$ quand $\varepsilon \to 0$. L'inégalité

$$\int \log|z-w|^{-1}\, \mathrm{d}\mu_\varepsilon(w) \leqslant \log|w|^{-1}$$

montre que l'énergie de $\nu_\varepsilon$ est au plus égale à celle de $\nu$.

soit encore

$$E(\nu) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G(P,Q)\, d\nu(P)\, d\nu(Q) \geqslant -c\frac{\log n}{n}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient $E(\nu) \geqslant 0$.

Supposons alors $E(\nu) \leqslant E(\mu)$. En particulier, $\nu$ est d'énergie finie. Il existe donc $u \in W_1$ tel que $dd^c u + \nu = \mu$ et $E(\nu) = E(\mu) + \|u\|^2_{\mathrm{Dir}}$. Par conséquent, $E(\nu) \geqslant E(\mu)$, d'où l'égalité. Alors, $\|u\|^2_{\mathrm{Dir}} = 0$ si bien que $u$ est constante. Donc $\mu = \nu$. □

### 3.2/3. Fin de la démonstration

L'ensemble des mesures de probabilité sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est faiblement compact. Pour montrer que la suite de mesures de probabilités $(\delta_{P_n})$ converge vers $\hat{\mu}_f$, il suffit de montrer que $\hat{\mu}_f$ est sa seule valeur d'adhérence. Quitte à extraire une sous-suite convergente de la suite $(\delta_{P_n})$, il est ainsi loisible de supposer que $(\delta_{P_n})$ converge vers une mesure de probabilité $\nu$. On doit montrer que $\nu = \hat{\mu}_f$.

LEMME 3.2.11. — *On a*

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w(P,Q)\,\mathrm{d}\nu(P)\,\mathrm{d}\nu(Q) \leqslant 0.$$

*Démonstration.* — Notons $\Delta$ la diagonale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Par définition,

$$D_w(P_n) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\Delta} G_w(z,z')\mathrm{d}\delta_{P_n}(z)\,\mathrm{d}\delta_{P_n}(z').$$

La fonction $G_w$ est continue hors de la diagonale et minorée partout. Si $M \in \mathbf{R}$, posons $G_w^M = \max(M, G_w)$. Alors,

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z,z')\mathrm{d}\delta_{P_n}(z)\,\mathrm{d}\delta_{P_n}(z') \leqslant D_w(P_n) + \frac{1}{n}M.$$

Faisons tendre $n$ vers l'infini ; on obtient donc

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z,z')\,\mathrm{d}\nu(z)\,\mathrm{d}\nu(z') \leqslant 0.$$

Faisons tendre maintenant $M$ vers $\infty$. Le lemme de convergence monotone implique alors

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w(z,z')\,\mathrm{d}\nu(z)\,\mathrm{d}\nu(z') = \lim_{M\to\infty}\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} G_w^M(z,z')\,\mathrm{d}\nu(z)\,\mathrm{d}\nu(z') \leqslant 0.$$

□

Autrement dit, la mesure $\nu$ est d'énergie négative ou nulle. Comme $E(\nu) \geqslant E(\mu) \geqslant 0$, on a $\nu = \mu$.

## §3.3. Preuve de l'inégalité de Baker

Nous démontrons dans ce paragraphe la proposition 3.1.9.

LEMME 3.3.1. — *Pour tout entier n, posons*

$$D_n = \inf_{(P_1,\dots,P_n)\in\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)^n} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} G_v(P_i,P_j).$$

*La suite* $(D_n)$ *est croissante.*

*Démonstration.* — En effet, si $P_0,\dots,P_n$ sont des points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n} G_v(P_i,P_j) &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq k}} G_v(P_i,P_j)\right)\\ &\geqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n} n(n-1)D_n = n(n+1)D_n,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité $D_{n+1}\geqslant D_n$. □

Il va ainsi suffir de minorer $D_N$ pour certains entiers $N$ ; on peut par exemple supposer que $N=d^{k+1}$, avec $k\in\mathbf{N}$. Pour la démonstration, il sera cependant plus aisé de supposer $N=td^k$ avec $k\geqslant 0$ et $2\leqslant t\leqslant 2d-1$.

Posons $m=N-1$. L'espace vectoriel $\mathscr{P}_m$ des polynômes homogènes de degré $m$ est de dimension $N$. Nous allons en considérer trois bases.

La première de ces bases, $\mathscr{B}_N$ est la famille des monômes $X^aY^b$, où $a+b=m$.

Rappelons que l'on a défini des polynômes $U_n(X,Y)$ et $V_n(X,Y)$ pour tout entier $n\geqslant 0$ en posant $U_0=X$, $V_0=Y$, puis en définissant par récurrence, $U_{n+1}=U(U_n(X,Y),V_n(X,Y))$ et $V_{n+1}=V(U_n(X,Y),V_n(X,Y))$ si $n\geqslant 0$. On a vu que ces polynômes « relèvent » à $\mathbf{C}_v^2$ la dynamique de l'endomorphisme $f$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$ ; pour tout $n$, $U_n$ et $V_n$ sont premiers entre eux, non nuls. Notons alors $\mathscr{C}_N$ la famille des polynômes de la forme

$$U_0^{a_0}V_0^{b_0}U_1^{a_1}V_1^{b_1}\dots U_k^{a_k}V_k^{b_k},$$

où $a_i+b_i=d-1$ pour $0\leqslant i<k$ et $a_k+b_k=t-1$. Cette famille est de cardinal $N$ et contenue dans l'espace $\mathscr{P}_m$. Soit $A_N$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}_N$.

LEMME 3.3.2. — *Posons* $r=N(N-(t+k(d-1))/2d(d-1)$. *Le déterminant de* $A_N$ *vérifie* $\det(A_N)=\pm\operatorname{Res}(U,V)^r$.

*Démonstration.* — Montrons d'abord que $\mathscr{C}_N$ est une base de $\mathscr{P}_m$. On peut pour cela raisonner par l'absurde et supposer que $N$ est le plus petit entier tel que $\mathscr{C}_N$ soit liée. Considérons une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}U_0^{a_0}V_0^{b_0}\dots U_k^{a_k}V_k^{b_k}=0,$$

qu'on peut récrire $\alpha U_k^{t-1} + \beta V_k = 0$, avec

$$\alpha = \sum_{b_k=0} c_{\mathbf{a},\mathbf{b}} U_0^{a_0} V_0^{b_0} \dots U_{k-1}^{a_{k-1}} V_{k-1}^{b_{k-1}}$$
$$\beta = \sum_{b_k \geqslant 1} c_{\mathbf{a},\mathbf{b}} U_0^{a_0} V_0^{b_0} \dots U_{k-1}^{a_{k-1}} V_{k-1}^{b_{k-1}} U_k^{a_k} V_k^{b_k-1}.$$

Si $\alpha = 0$, on divise tout par $V_k$ et on remplace $t$ par $t-1$, sauf si $t = 2$ auquel cas on remplace $k$ par $k-1$. Par minimalité de $N$, $\alpha \neq 0$. Comme $U_k \neq 0$, on a alors $\beta \neq 0$. Notons que

$$\deg(\alpha) = m - d^k(t-1) = td^k - 1 - d^k(t-1) = d^k - 1.$$

Comme $U_k$ et $V_k$ sont sans facteur commun, $V_k$ divise $\alpha$, ce qui contredit l'inégalité $\deg(\alpha) = d^k - 1 < \deg(V_k) = d^k$.

Inversement, si $U$ et $V$ avaient eu un facteur commun, la famille $\mathscr{C}_N$ ne serait manifestement pas libre.

Oublions alors un instant les valeurs spécifiques des polynômes $U$ et $V$ : le déterminant de $A_N$ est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de $U$ et de $V$. Il s'annule si et seulement si ces polynômes ont un facteur commun, c'est-à-dire si et seulement si le résultant de $U$ et $V$ s'annule. Le théorème des zéros de Hilbert entraîne alors que le déterminant de $A_n$ et le résultant $\operatorname{Res}(U,V)$ ont exactement les mêmes facteurs irréductibles dans l'anneau (factoriel) des polynômes. Or, $\operatorname{Res}(U,V)$ est lui-même un polynôme *irréductible* en les coefficients de $U$ et $V$. Il existe donc des entiers $c$ et $s$ tels que

$$\det(A_N) = c \operatorname{Res}(U,V)^s.$$

Considérons le degré de $A_N$ en les coefficients de $U$ : il vaut

$$\begin{aligned}\deg_U(\det(A_N)) &= (d-1)\deg(U_1) + \cdots + (d-1)\deg(U_{k-1}) + (t-1)\deg(U_k) \\ &= (d-1) + (d^2-1) + \cdots + (d^{k-1}-1) + (t-1)\frac{d^k-1}{d-1} \\ &= t\frac{d^k-1}{d-1} - k,\end{aligned}$$

car le degré de $U_k$ en les coefficients de $U$ est égal à $(d^k-1)/(d-1)$, comme on le vérifie par récurrence. Le degré du résultant $\operatorname{Res}(U,V)$ en les coefficients de $U$ est égal à $2d$. On a donc $s = (t(d^k-1) - k(d-1))/2d(d-1) = r$.

Pour calculer l'entier $c$, il suffit de le déterminer pour un choix particulier de $U$ et $V$, par exemple $U = X^d$ et $V = Y^d$. La famille $\mathscr{C}_N$ coïncide alors avec la famille $\mathscr{B}_N$, à l'ordre près. On a donc $c = \pm 1$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Notons $B^{(i)}$ les éléments de $\mathscr{B}_N$, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, et $C^{(i)}$ ceux de $\mathscr{C}_N$. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, soit $[x_j : y_j]$ un système de coordonnées homogènes du point $P_j$. On commence par calculer le déterminant $\beta$ de la matrice $B$ dont le terme de ligne $i$ et de colonne $j$ est

$B^{(i)}(x_j, y_j)$. Il vaut

$$\begin{aligned}\beta &= x_1^{N-1}\dots x_N^{N-1}\det((y_j/x_j)^i)\\ &= x_1^{N-1}\dots x_N^{N-1}\prod_{i>j}\left(\frac{y_i}{x_i}-\frac{y_j}{x_j}\right)\\ &= x_1^{N-1}\dots x_N^{N-1}\left(\prod_{i>j} x_i x_j\right)^{-1}\prod_{i>j}(y_i x_j - x_i y_j).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\beta^2 = \pm\prod_{i\neq j}(y_i x_j - x_i y_j).$$

Évaluons aussi le déterminant $\gamma$ de la matrice $C$ dont le terme $(i,j)$ est $C^{(i)}(x_j, y_j)$. Soit $M$ un nombre réel tel que l'ensemble de Julia rempli homogène $\mathscr{J}_v$ soit contenu dans l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}_v^2$ tels que $\left|x\right|_v \leqslant M$ et $\left|y\right|_v \leqslant M$. Si $(x, y) \in \mathscr{J}_v$, $(U_k(x,y), V_k(x,y))$ appartient à $\mathscr{J}_v$ pour tout $k$, d'où $\left|U_k(x,y)\right|_v \leqslant M$ et $\left|V_k(x,y)\right|_v \leqslant M$. Si de plus $v$ est une place ultramétrique, on a alors, avec $C^{(i)}$ défini par la famille $(\mathbf{a},\mathbf{b})$,

$$\left|C^{(i)}(x,y)\right|_v = \prod_{i=0}^{k}\left|U_i(x,y)\right|_v^{a_i}\left|V_i(x,y)\right|_v^{b_i} \leqslant M^{a_0+b_0}\dots M^{a_k+b_k} = M^s,$$

avec $s = k(d-1)+(t-1)$. Cela entraîne $\left|\gamma\right|_v \leqslant M^{sN}$. Dans le cas où $v$ est une place archimédienne, l'inégalité d'Hadamard implique seulement $\left|\gamma\right|_v \leqslant N^{N/2}M^{sN}$. Posons $\theta_v = 1$ si $v$ est archimédienne et $\theta_v = 0$ sinon.

Enfin, la définition de la matrice $A_N$ implique que l'on a $\alpha\beta = \gamma$, où $\alpha = \det(A_N)$. Par conséquent,

$$\prod_{i\neq j}\left|y_i x_j - x_i y_j\right|_v = \left|\gamma\right|_v^2 |\alpha|_v^{-2} = \left|\gamma\right|_v^2 |\mathrm{Res}(U,V)|_v^{-2r}.$$

Passons au logarithme, on obtient

$$\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}\log\left|y_i x_j - x_i y_j\right| \leqslant \theta_v\frac{N\log N}{N(N-1)} + \frac{2s}{N-1}\log(M) - \frac{2r}{N(N-1)}\log|\mathrm{Res}(U,V)|_v$$

soit encore, compte tenu de la définition (3.1.7) de la fonction $G_v$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}G_v(P_i,P_j) \geqslant{} & -\theta_v\frac{\log N}{N-1} - \frac{2s}{N-1}\log M\\ & + \left(\frac{2r}{N(N-1)} - \frac{1}{d(d-1)}\right)\log|\mathrm{Res}(U,V)|_v - 2\min_i \Lambda_v(x_i,y_i).\end{aligned}$$

Si $2 \leqslant t \leqslant 2d-1$ (il suffit que $t$ soit borné), il en résulte alors l'inégalité

$$\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}G_v(P_i,P_j) \geqslant -c\frac{\log N}{N} - 2\min_i\Lambda_v(x_i,y_i).$$

Rappelons que les coordonnées homogènes $[x_i : y_i]$ ont été choisies de sorte que $(x_i, y_i)$ appartienne à l'ensemble de Julia rempli homogène $\mathscr{J}_v$. On a alors

$\Lambda_v(x_i, y_i) \leqslant 0$, mais on peut utiliser l'homogénéité de $\Lambda_v$ et la densité dans $\mathbf{R}$ de l'ensemble des valeurs absolues des éléments de $\mathbf{C}_v^*$ pour choisir chaque couple $(x_i, y_i)$ de sorte que $\Lambda_v(x_i, y_i)$ soit arbitrairement proche de 0.

Cela termine la démonstration de la prop. 3.1.9

## §3.4. Le théorème d'équidistribution de Bilu

Lorsque $f\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ est l'endomorphisme donné par $[x:y] \mapsto [x^d : y^d]$, la hauteur canonique est la hauteur usuelle et la mesure canonique est la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact $\mathbf{S}_1$ de $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Le théorème d'équidistribution qu'on obtient dans ce cas est dû à BILU (1997), mais une variante légèrement plus faible remonte à ERDÖS & TURÁN (1950). C'est la proposition :

PROPOSITION 3.4.1. — *Soit $(x_n)$ une suite de nombres algébriques deux à deux distincts telle que $h(x_n)$ tend vers 0. La suite de mesures $(\delta_{x_n})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ converge vers la mesure de Lebesgue portée par le cercle unité $\mathbf{S}_1$.*

Dans ce paragraphe, je voudrais expliquer comment BILU (1997) déduit de cette proposition une démonstration de la conjecture d'équidistribution 2.2.12 lorsque $X$ est un système dynamique torique.

Pour simplifier l'exposition, on considère $(\overline{\mathbf{Q}}^*)^k = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ comme ouvert dense de l'espace projectif $(\mathbf{P}^1)^k$ ; la hauteur d'un point $(x_1, \dots, x_k)$ de $(\mathbf{P}^1)^k(\overline{\mathbf{Q}})$ est alors la somme des hauteurs usuelles des $x_i$.

On appelle sous-variété de torsion de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ un translaté $gH$ d'un sous-tore $H$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ par un point d'ordre fini $g \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\overline{\mathbf{Q}})$. La mesure canonique $\hat{\mu}_k$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^*)^k$, aussi notée $\hat{\mu}$, est la mesure de Haar portée par le sous-groupe compact maximal $(\mathbf{S}_1)^k$ de $(\mathbf{C}^*)^k$ ; autrement dit, pour toute fonction $\varphi$ à support compact sur $(\mathbf{C}^*)^k$,

$$\hat{\mu}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k})\, \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_k.$$

THÉORÈME 3.4.2 (BILU (1997)). — *Soit $(x_n)$ une suite de points de $(\overline{\mathbf{Q}}^*)^k$ qui vérifie les deux assertions :*

a) *la suite $(h(x_n))$ tend vers 0 ;*

b) *toute sous-variété de torsion $Z \subsetneq \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite $(x_n)$.*

*Alors, la suite de mesures de probabilités $(\delta_{x_n})$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^*)^k$ converge vers la mesure $\hat{\mu}$.*

Il s'agit de la convergence des mesures de probabilités sur un espace localement compact, aussi appelée *convergence étroite*. C'est un peu plus fort que la convergence vague car cela garantit que la masse ne part pas, même partiellement, à l'infini. Bien sûr, cela coïncide ici avec la convergence des mesures de probabilités sur la compactification $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})^k$.

LEMME 3.4.3. — *Soit* $(x_n)$ *une suite de points de* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\overline{\mathbf{Q}})$ *telle que* $h(x_n)$ *tend vers* 0. *Alors, pour tout voisinage* $V$ *du polycercle unité* $(\mathbf{S}_1)^k$ *de* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C})$, *la suite* $(\delta_{x_n}(V))$ *tend vers* 1.

*Par conséquent, la suite de mesures de probabilité* $(\delta_{x_n})$ *sur* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C})$ *est* tendue, *c'est-à-dire relativement compacte pour la topologie étroite. De plus, toute mesure de probabilité adhérente à la suite* $(\delta_{x_n})$ *est supportée par le polycercle unité.*

*Démonstration.* — Soit $r$ un nombre réel tel que $r > 1$ et tel que $V$ contienne l'ensemble $K$ des points $(z_1,\dots,z_k)$ tels que $r^{-1} \leqslant |z_i| \leqslant r$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Pour $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]} \sum_{p\leqslant\infty} \sum_{\sigma\colon \mathbf{Q}(\alpha)\hookrightarrow\mathbf{C}_p} \log\max(1,|\sigma(\alpha)|_p) \\ &\geqslant \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon \mathbf{Q}(\alpha)\hookrightarrow\mathbf{C}} \log\max(1,|\sigma(\alpha)| = \int \log\max(1,|z|)\,\delta_\alpha(z). \end{aligned}$$

Comme $h(\alpha) = h(\alpha^{-1})$ si $\alpha \neq 0$, on a aussi

$$h(\alpha) \geqslant \int \log\max(1,|z|)\,\delta_{\alpha^{-1}}(z) = \int \log\max(1,|z|^{-1})\,\delta_\alpha(z),$$

si bien que pour $\alpha \neq 0$,

$$h(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\int \log\max(|z|,|z|^{-1})\delta_\alpha(z).$$

Si $z \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathbf{C})$ est tel que $|z| > r$ ou $|z| < 1/r$, on a l'inégalité $\log\max(|z|,|z|^{-1}) \geqslant \log r$. La mesure pour $\delta_\alpha$ du complémentaire de la couronne $r^{-1} \leqslant |z| \leqslant r$ dans $\mathbf{C}$ est donc majorée par

$$\int \frac{\log\max(|z|,|z|^{-1})}{\log r}\,\mathrm{d}\delta_\alpha(z) \leqslant \frac{2}{\log r} h(\alpha).$$

Par conséquent, additionnant ces inégalités, la mesure du complémentaire de $K$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C})$ est majorée par

$$\delta_{x_n}(\complement K) \leqslant \frac{1}{\log r}\int\left(\sum_{i=1}^{r} \log\max(|z_i|,|z_i|^{-1}\right)\mathrm{d}\delta_{x_n}(z_1,\dots,z_n) \leqslant \frac{2}{\log r} h(x_n).$$

Lorsque $n \to \infty$, la suite $(\delta_{x_n}(\complement K))$ tend donc vers 0 ; la suite $(\delta_{x_n}(V))$ tend vers 1. □

Pour conclure la démonstration du théorème 3.4.2, il suffit donc de démontrer que si une sous-suite de la suite $(\delta_{x_n})$ converge vers une mesure de probabilité $\nu$, alors $\nu = \hat{\mu}$. Quitte à remplacer la suite $(x_n)$ par une sous-suite, on peut supposer, et on le fait, que la suite $(\delta_{x_n})$ converge vers une mesure de probabilité $\nu$. Les deux hypothèses concernant la suite $(x_n)$ sont encore satisfaites.

LEMME 3.4.4. — *Pour qu'une mesure de probabilité* $\nu$ *supportée par* $(\mathbf{S}_1)^k$ *soit égale à la mesure* $\hat{\mu}$, *il faut et il suffit que pour tout* $k$*-uplet* $(a_1,\dots,a_k) \in \mathbf{Z}^k$ *distinct de* $(0,\dots,0)$, *notant* $\psi\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k(\mathbf{C}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\mathbf{C})$ *l'application donnée par* $(z_1,\dots,z_k) \mapsto z_1^{a_1}\cdots z_k^{a_k}$, *la mesure* $\psi_*\nu$ *soit égale à la mesure de Haar normalisée sur* $\mathbf{S}_1$.

*Démonstration.* — La nécessité de la condition est évidente : comme $\psi$ induit par restriction un homomorphisme surjectif de $(\mathbf{S}_1)^k$ dans $\mathbf{S}_1$, $\psi_*\hat{\mu}$ est la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{S}_1$. Démontrons qu'elle est suffisante. Il s'agit pour cela de prouver que pour toute fonction continue $\varphi$ sur $(\mathbf{S}_1)^k$, $\int_{(\mathbf{S}_1)^k}\varphi\,\mathrm{d}\nu = \int_{(\mathbf{S}_1)^k}\varphi\,\mathrm{d}\hat{\mu}$. Une fonction continue sur $(\mathbf{S}_1)^k$ peut être approchée uniformément par un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une somme finie

$$P = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbf{Z}^k} c_{\mathbf{a}} z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}.$$

Il suffit donc de prouver l'égalité lorsque $\varphi$ est un tel polynôme, puis, par linéarité, lorsque $\varphi$ est un monôme $z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}$. Si $(a_1,\ldots,a_n)=0$, $\varphi=1$ et l'égalité vaut car $\nu$ et $\hat{\mu}$ sont des mesures de probabilité. Lorsque $(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$, elle vaut encore par hypothèse. En effet,

$$\int_{(\mathbf{S}_1)^k} z_1^{a_1}\cdots z_k^{a_k}\,\mathrm{d}\nu(z_1,\ldots,z_n) = \int_{(\mathbf{S}_1)^k}\psi(z_1,\ldots,z_k)\,\mathrm{d}\nu(z_1,\ldots,z_n) = \int_{\mathbf{S}_1} z\,\mathrm{d}(\psi_*\nu)(z).$$

Si $\psi_*\nu$ est la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{S}_1$, cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^{2\pi} e^{it}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 0.$$

Pour la même raison,

$$\int_{(\mathbf{S}_1)^k} z_1^{a_1}\cdots z_k^{a_k}\,\mathrm{d}\hat{\mu}(z_1,\ldots,z_n) = \int_{\mathbf{S}_1} z\,\mathrm{d}(\psi_*\hat{\mu})(z) = 0.$$

Le lemme est ainsi démontré. □

Soit donc $(a_1,\ldots,a_k)$ un $k$-uplet d'entiers relatifs non tous nuls et soit $\psi\colon \mathbf{G}_\mathrm{m}^k\to\mathbf{G}_\mathrm{m}$ l'application donnée par

$$\psi(z_1,\ldots,z_n) = z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}.$$

Notons que tout $x\in\mathbf{G}_\mathrm{m}^k(\overline{\mathbf{Q}})$, la mesure $\psi_*\delta_x$ sur $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\overline{\mathbf{C}})$ est égale à la mesure $\delta_{\psi(x)}$. Lorsque $n$ tend vers l'infini, la suite de mesures de probabilité $(\delta_{\psi(x_n)})$ sur $\mathbf{G}_\mathrm{m}(\mathbf{C})$ converge donc vers la mesure $\psi_*\nu$. Nous allons déduire de la proposition 3.4.1 que $\psi_*\nu$ est la mesure de Haar normalisée $\hat{\mu}_1$ portée par $\mathbf{S}_1$.

Le lemme suivant vérifie que les hauteurs des points $\psi(x_n)$ tendent vers 0.

LEMME 3.4.5. — *Pour $x\in\mathbf{G}_\mathrm{m}^k(\overline{\mathbf{Q}})$, on a*

$$h(\psi(x)) \leqslant (|a_1|+\cdots+|a_n|)\,h(x).$$

*Démonstration.* — Compte tenu de la relation $h(\alpha^{-1})=h(\alpha)$, il suffit de démontrer que pour $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{Q}}^*$, on a $h(\alpha\beta)\leqslant h(\alpha)+h(\beta)$. On conclut alors en effet par récurrence. Revenons à la formule (1.2.7) définissant la hauteur d'un point et observons l'inégalité

$$\max(0,u+v)\leqslant \max(0,u)+\max(0,v),$$

valable pour tout couple $(u,v)$ de nombres réels. Si $K$ est un corps de nombres contenant $\alpha$ et $\beta$, il vient ainsi

$$\begin{aligned} h(\alpha\beta) &= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{p\leqslant\infty}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}_p}\log\max(1,\left|\alpha\beta\right|_p) \\ &\leqslant \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{p\leqslant\infty}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}_p}\Big(\log\max(1,|\alpha|_p)+\log\max(1,\left|\beta\right|_p)\Big) \\ &\leqslant h(\alpha)+h(\beta). \end{aligned}$$

□

Si une sous-suite de la suite $(\psi(x_n))$ est constante, de valeur $y$, on a donc $h(y)=0$, si bien que $y$ est une racine de l'unité. Pour chaque entier $n$ tel que $\psi(x_n)=y$, le point $x_n$ appartient à la sous-variété de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ définie par l'équation $\psi(x)=y$. C'est une sous-variété de torsion, translatée d'un sous-tore de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$, le noyau de $\psi$, par n'importe quel point de torsion $x_1\in\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k$ tel que $\psi(x_1)=y$. Une sous-suite de la suite $(x_n)$ est alors toute entière contenue dans une variété de torsion, ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

Par conséquent, la suite $(\psi(x_n))$ prend une infinité de valeurs distinctes et l'on peut extraire de la suite $(x_n)$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que les termes de la suite $(\psi(x_{\varphi(n)}))$ soient deux à deux distincts. Cette dernière suite est justiciable de la proposition 3.4.1, si bien que la suite $(\delta_{\psi(x_{\varphi(n)})})$ converge vers la mesure $\hat{\mu}_1$. Comme elle converge aussi vers $\psi_*\nu$, on a l'égalité requise $\psi_*\nu=\hat{\mu}_1$. Cela termine la démonstration du théorème 3.4.2 de Bilu.

## §3.5. Exercices

*Exercice 3.5.1.* — Soit $u\colon\mathbf{C}_v^2\to\mathbf{C}_v^2$ une application affine. Soit $K$ une partie bornée de $\mathbf{C}_v^2$. Montrer que le diamètre transfini homogène de $u(K)$ est égal à $|\det u|\,\delta^h(K)$.

*Exercice 3.5.2* (DeMarco (2003)). — Soit $K$ un corps et soit $(U,V)$ et $(F,G)$ deux couples de polynômes homogènes de $K[X,Y]$. On suppose que $U$ et $V$ sont premiers entre eux et de même degré $d$, et que $F$ et $G$ sont premiers entre eux, de même degré $e$. On pose alors $U_1=U(F,G)$ et $V_1=V(F,G)$.

a) Montrer que $U_1$ et $V_1$ sont premiers entre eux et de degrés $de$.

b) Montrer que le résultant $\operatorname{Res}(U_1,V_1)$ s'annule si et seulement si l'un des résultants $\operatorname{Res}(U,V)$ ou $\operatorname{Res}(F,G)$ s'annule. En déduire qu'il existe des entiers $a$, $b$ et $c$ tels que

$$\operatorname{Res}(U_1,V_1)=c\operatorname{Res}(U,V)^a\operatorname{Res}(F,G)^b.$$

c) En considérant le degré du résultant $\operatorname{Res}(U_1,V_1)$ par rapport aux coefficients des polynômes $U$, $V$, $F$, $G$, montrer que $a=e$ et $b=d^2$. Montrer aussi que $c=\pm1$ (si un nombre premier $p$ divisait $c$, le résultant $\operatorname{Res}(U_1,V_1)$ serait identiquement nul en caractéristique $p$).

d) Considérer un cas particulier et vérifier que $c=1$.

*Exercice 3.5.3.* — a) Soit $(X,d)$ un espace métrique et soit $\alpha$ un nombre réel positif. Une fonction $\varphi\colon X \to \mathbf{R}$ est dite $\alpha$-hölderienne si $\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| / d(x,y)^{\alpha}$ est majoré lorsque $(x,y)$ parcourt l'ensemble des couples de points distincts de $X$. La borne supérieure de cette expression est notée $\left\|\varphi\right\|_{\alpha}$. Vérifier que $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme sur l'espace vectoriel $H_{\alpha}$ des fonctions $\alpha$-hölderiennes et que cet espace vectoriel ainsi normé est complet.

b) Soit $f: X \to X$ une application $C$-lipschitzienne (c'est-à-dire que $d(f(x),f(y)) \leqslant Cd(x,y)$ pour tout couple $(x,y)$ de points de $X$) ; soit $k$ un nombre réel tel que $|k| < 1$ et soit $\varphi_0$ une fonction dans $H_{\alpha}$. Montrer que l'application $\varphi \mapsto T\varphi = k\varphi \circ f + \varphi_0$ applique $H_{\alpha}$ dans lui-même ; montrer que si $\alpha < \log|k|^{-1} / \log C$, alors $T$ est contractante.

*Exercice 3.5.4.* — Soit $K$ un corps valué complet. Pour $P = [x : y]$ et $Q = [u : v]$ dans $\mathbf{P}^1(K)$, on pose $d(P,Q) = \left|xv - yu\right| / \max(|x|,\left|y\right|)\max(|u|,|v|)$.

a) Vérifier que $d(P,Q)$ ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes de $P$ et $Q$. Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbf{P}^1(K)$.

b) Soit $F = [U : V]$ un endomorphisme de degré $d$ de $\mathbf{P}^1$ dans lui-même, défini par deux polynômes homogènes $U$ et $V \in K[X,Y]$ sans facteur commun, de degré $d$. Montrer que l'application induite par $F$ sur $\mathbf{P}^1(K)$ est lipschitzienne.

c) On reprend les notations du paragraphe 3.1. À l'aide de l'exercice précédent, prouver que l'application $[x : y] \mapsto \Lambda_v(x,y) - \log\max(|x|,\left|y\right|)$ (bien définie sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_v)$) est hölderienne. (Voir aussi SIBONY (1999); FAVRE & RIVERA-LETELIER (2006); KAWAGUCHI & SILVERMAN (2007*b*).)

*Exercice 3.5.5.* — On considère deux applications continues $f_1$ et $f_2$ d'un espace métrique $(X,d)$ dans lui-même. Soit $\alpha$ un nombre réel et soit $E$ l'espace vectoriel normé des fonctions de $X$ dans $\mathbf{R}$ qui sont hölderiennes d'exposant $\alpha$. Soit $k$ un nombre réel tel que $|k| < 1$.

On suppose que $f_1$ et $f_2$ sont $C$-lipschitziennes et que $\alpha < \log|k|^{-1} / \log C$. On considère enfin deux éléments $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de $E$ et les applications affines $T_1$ et $T_2$ de $E$ dans lui-même données par $T_1\varphi = k\varphi \circ f_1 + \varphi_1$ et $T_2\varphi = k\varphi \circ f_2 + \varphi_2$. Elles admettent chacune un et un seul point fixe dans $E$, disons $\hat\varphi_1$ et $\hat\varphi_2$. Montrer que l'on a

$$\left\|\hat\varphi_1 - \hat\varphi_2\right\| \leqslant \frac{\left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{\alpha} + |k| \left\|\varphi_2\right\|_{\alpha} d(f_1,f_2)^{\alpha}}{1 - |k| C^{\alpha}},$$

où $d(f_1,f_2)$ désigne la borne supérieure des quantités $d(f_1(x),f_2(x))$ lorsque $x$ parcourt $X$.

b) On reprend les notations du paragraphe 3.1. Montrer que la fonction $\Lambda_v$ définie dans le lemme 3.1.1 dépend de manière continue des coefficients des polynômes $U$ et $V$, uniformément en $(x,y) \in \mathbf{C}_v^2 \setminus \{(0,0)\}$.

*Exercice 3.5.6.* — Soit $f: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ un endomorphisme de degré $d$ de $\mathbf{P}^1$ donné par un couple $(U,V)$ de polynômes homogènes de degrés $d$, premiers entre eux, à coefficients dans un corps valué $\mathbf{C}_v$. Soit $\mathscr{J}_v \subset \mathbf{C}_v^2$ son ensemble de Julia rempli homogène.

a) À l'aide de l'exercice précédent, montrer que le diamètre transfini homogène $\delta^h(\mathscr{J}_v)$ dépend continûment des coefficients de $U$ et $V$.

b) En déduire que la formule de la prop. 3.1.11 est vraie sans supposer que les coefficients de $U$ et $V$ appartiennent à un corps de nombres.

*Exercice 3.5.7.* — a) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ des nombres complexes. À l'aide de l'inégalité d'Hadamard, démontrer que

$$\prod_{i<j} \left|\alpha_j - \alpha_i\right| \leqslant d^{d/2} \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)^{d-1}.$$

b) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$. Montrer que son discriminant $\Delta(P)$ et sa mesure de Mahler $\mathrm{M}(P)$ sont reliés par l'inégalité, due à MAHLER,

$$|\Delta(P)| \leqslant d^d \mathrm{M}(P)^{2d-2}.$$

c) Quels sont les polynômes pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité ?

*Exercice 3.5.8.* — Soit $d$ un entier au moins égal à 2 et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbf{P}^1$ donné par $f = [U : V]$, avec $U = X^d$ et $V = Y^d$.

a) L'ensemble de Julia homogène rempli $\mathscr{J}$ est le bidisque unité, ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\left|x\right| \leqslant 1$ et $\left|y\right| \leqslant 1$.

b) Lorsque $z_1, \dots, z_n$ parcourent $K$, $\prod_{i \neq j} d(z_i, z_j)$ atteint son maximum en des points de la forme $z_i = (x_i, y_i)$, où $x_i$ et $y_i$ sont de module 1. Il suffit alors de considérer les points de la forme $(x_i, 1)$, avec $x_i$ de module 1.

c) Déduire alors de l'exercice précédent que

$$\delta_n(K) = n^{1/(n-1)}$$

puis retrouver la prop. 3.1.9 dans ce cas particulier.

# BIBLIOGRAPHIE


A. AGBOOLA & G. PAPPAS (2000), « Line bundles, rational points and ideal classes ». *Math. Res. Letters*, **7**, p. 709–717.

E. AMERIK, M. ROVINSKY & A. VAN DE VEN (1999), « A boundedness theorem for morphisms between threefolds ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **49** (2), p. 405–415.

F. AMOROSO & S. DAVID (2003), « Minoration de la hauteur normalisée dans un tore ». *J. Inst. Math. Jussieu*, **2** (3), p. 335–381.

F. AMOROSO & S. DAVID (2004), « Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs ». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **3** (2), p. 325–348.

F. AMOROSO & S. DAVID (2006), « Points de petite hauteur sur une sous-variété d'un tore ». *Compos. Math.*, **142** (3), p. 551–562.

P. AUTISSIER (2001), « Points entiers sur les surfaces arithmétiques ». *J. reine angew. Math.*, **531**, p. 201–235.

M. BAKER (2006), « A lower bound for average values of dynamical Green's functions ». *Math. Res. Lett.*, **13** (2-3), p. 245–257. ArXiv, math.NT/0507484.

M. H. BAKER & L.-C. HSIA (2005), « Canonical heights, transfinite diameters, and polynomial dynamics ». *J. Reine Angew. Math.*, **585**, p. 61–92. ArXiv :math.NT/0305181.

M. H. BAKER & R. RUMELY (2006), « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory ». *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **56** (3), p. 625–688. ArXiv, math.NT/0407426.

A. BEAUVILLE (1983), « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle ». *J. Differential Geom.*, **18** (4), p. 755–782.

A. BEAUVILLE (2001), « Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds ». *Internat. Math. Res. Notices*, (1), p. 53–58.

V. G. BERKOVICH (1990), *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI.

H. BILLARD (1997), « Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$ ». *Compositio Math.*, **108** (3), p. 247–275.

Yu. BILU (1997), « Limit distribution of small points on algebraic tori ». *Duke Math. J.*, **89** (3), p. 465–476.

F. A. BOGOMOLOV (1974*a*), « Kähler manifolds with trivial canonical class ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **38**, p. 11–21.

F. A. BOGOMOLOV (1974*b*), « the decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class ». *Mat. Sb. (N.S.)*, **93(135)**, p. 573–575, 630.

F. A. BOGOMOLOV (1980), « Points of finte order on abelian varieties ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **44** (4), p. 782–804, 973.

H. BROLIN (1965), « Invariant sets under iteration of rational functions ». *Ark. Mat.*, **6**, p. 103–144 (1965).

G. CALL & J. SILVERMAN (1993), « Canonical heights on varieties with morphisms ». *Compositio Math.*, **89**, p. 163–205.

S. CANTAT (2001), « Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$ ». *Acta Math.*, **187** (1), p. 1–57.

S. CANTAT (2003), « Endomorphismes des variétés homogènes ». *Enseign. Math. (2)*, **49** (3-4), p. 237–262.

A. CHAMBERT-LOIR (2000), « Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes ». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **33** (6), p. 789–821.

A. CHAMBERT-LOIR (2006), « Mesures et équidistribution sur des espaces de Berkovich ». *J. reine angew. Math.*, **595**, p. 215–235. *arXiv:math.NT/0304023*.

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE (1992), « L'arithmétique des variétés rationnelles ». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6*, **1** (3), p. 295–336.

S. DAVID & M. HINDRY (2000), « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M ». *J. Reine Angew. Math.*, **529**, p. 1–74.

S. DAVID & P. PHILIPPON (1998), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes ». *In* « International Conference on Discrete Mathematics and Number Theory », Numéro 210 in Contemp. Math., p. 333–364, Tiruchirapelli, 1996.

S. DAVID & P. PHILIPPON (1999), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **28** (3), p. 489–543.

S. DAVID & P. PHILIPPON (2000), « Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **331** (8), p. 587–592.

S. DAVID & P. PHILIPPON (2002), « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II ». *Comment. Math. Helv.*, **77** (4), p. 639–700.

J.-P. DEMAILLY (1993), « Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory ». *In* « Complex analysis and geometry », Univ. Ser. Math., p. 115–193, Plenum, New York.

L. DEMARCO (2003), « Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity ». *Math. Ann.*, **326** (1), p. 43–73.

L. DEMARCO & R. RUMELY (2007), « Transfinite diameter and the resultant ». *arXiv: math.CV/0601109*.

L. DENIS (1995), « Points périodiques des automorphismes affines ». *J. Reine Angew. Math.*, **467**, p. 157–167.

E. DOBROWOLSKI (1979), « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial ». *Acta Arith.*, **34** (4), p. 391–401.

P. ERDÖS & P. TURÁN (1950), « On the distribution of roots of polynomials ». *Ann. of Math. (2)*, **51**, p. 105–119.

A. È. ERËMENKO (1989), « Some functional equations connected with the iteration of rational functions ». *Algebra i Analiz*, **1** (4), p. 102–116.

N. FAKHRUDDIN (2003), « Questions on self-maps of algebraic varieties ». *J. Ramanujan Math. Soc.*, **18** (2), p. 109–122.

G. FALTINGS (1984), « Calculus on arithmetic surfaces ». *Ann. of Math.*, **119**, p. 387–424.

C. FAVRE & J. RIVERA-LETELIER (2006), « Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective ». *Math. Ann.*, **335** (2), p. 311–361. *arXiv:math.NT/0407471*.

M. FLEXOR & J. OESTERLÉ (1990), « Sur les points de torsion des courbes elliptiques ». *In* « Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques », édité by L. SZPIRO, numéro 183 in Astérisque, p. 25–36, Soc. Math. France.

Y. FUJIMOTO (2002), « Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension ». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **38** (1), p. 33–92.

Y. FUJIMOTO & N. NAKAYAMA (2005), « Compact complex surfaces admitting non-trivial surjective endomorphisms ». *Tohoku Math. J. (2)*, **57** (3), p. 395–426.

W. FULTON (1998), *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin, second édition.

H. GILLET & C. SOULÉ (1990), « Arithmetic intersection theory ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **72**, p. 94–174.

M. GROMOV (2003), « On the entropy of holomorphic maps ». *Enseign. Math. (2)*, **49** (3-4), p. 217–235.

W. GUBLER (1998), « Local heights of subvarieties over non-archimedean fields ». *J. reine angew. Math.*, **498**, p. 61–113.

W. GUBLER (2003), « Local and canonical heights of subvarieties ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **2** (4), p. 711–760.

M. HINDRY (1988), « Autour d'une conjecture de Serge Lang ». *Invent. Math.*, **94** (3), p. 575–603.

M. HINDRY & J. H. SILVERMAN (2000), *Diophantine geometry*, volume 201 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. An introduction.

E. HRUSHOVSKI (2001), « The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields ». *Ann. Pure Appl. Logic*, **112** (1), p. 43–115.

E. HRUSHOVSKI (2004), « The Elementary Theory of the Frobenius Automorphisms ». *arXiv:math.LO/0406514*.

G. HÖHN & N.-P. SKORUPPA (1993), « Un résultat de Schinzel ». *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **5** (1), p. 185.

S. KAWAGUCHI (1999), « Some remarks on rational periodic points ». *Math. Res. Lett.*, **6** (5-6), p. 495–509.

S. KAWAGUCHI (2004), « Canonical height functions on the affine plane associated with polynomial automorphisms ». *arXiv:math.NT/0405007*.

S. KAWAGUCHI (2005), « Projective surface automorphisms of positive topological entropy from an arithmetic viewpoint ». *arXiv:math.AG/0510634*.

S. KAWAGUCHI & J. H. SILVERMAN (2007*a*), « Dynamics of projective morphisms having identical canonical heights ». *Proc. London Math. Soc.*, **95**, p. 519–544.

S. KAWAGUCHI & J. H. SILVERMAN (2007*b*), « Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space ». *arXiv:0706.2169*.

S. LANG (1983), *Fundamentals of Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York.

S. LANG (1988), *Introduction to Arakelov theory*. Springer-Verlag, New York.

M. LAURENT (1983), « Minoration de la hauteur de Néron-Tate ». *In* « Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982) », volume 38 de *Progr. Math.*, p. 137–151, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

D. H. LEHMER (1933), « Factorization of certain cyclotomic functions ». *Ann. of Math. (2)*, **34** (3), p. 461–479.

G. LEVIN & F. PRZYTYCKI (1997), « When do two rational functions have the same Julia set ? » *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (7), p. 2179–2190.

D. J. LEWIS (1972), « Invariant sets of morphisms on projective and affine number spaces ». *J. Algebra*, **20**, p. 419–434.

M. J. LYUBICH (1983), « Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere ». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3** (3), p. 351–385.

S. MARCELLO (2003), « Sur la dynamique arithmétique des automorphismes de l'espace affine ». *Bull. Soc. Math. France*, **131** (2), p. 229–257.

D. W. MASSER (1984), « Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety ». *Compositio Math.*, **53** (2), p. 153–170.

B. MAZUR (1977), « Modular curves and the Eisenstein ideal ». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47), p. 33–186 (1978).

C. T. MCMULLEN (2002), « Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks ». *J. Reine Angew. Math.*, **545**, p. 201–233.

L. MEREL (1996), « Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres ». *Invent. Math.*, **124** (1-3), p. 437–449.

J. MILNOR (2006), « On Lattès maps ». *ArXiv:math.DS/0402147*, Stony Brook IMS Preprint #2004/01.

A. MIMAR (1997), *On the preperiodic points of an endomorphism of* $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Phd thesis, Columbia University.

P. MORTON & J. H. SILVERMAN (1994), « Rational periodic points of rational functions ». *Internat. Math. Res. Notices*, **2**, p. 97–109.

D. MUMFORD (1974), *Abelian Varieties*. Oxford Univ. Press.

N. NAKAYAMA (2002), « Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms ». *Kyushu J. Math.*, **56** (2), p. 433–446.

D. G. NORTHCOTT (1950), « Periodic points on an algebraic variety ». *Ann. of Math.*, **51**, p. 167–177.

E. PEYRE (2002), « Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.) ». *Astérisque*, (282), p. Exp. No. 891, ix, 323–344. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

R. PINK & D. ROESSLER (2002), « On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture ». *In* « Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002) », p. 539–546, Higher Ed. Press, Beijing.

R. PINK & D. ROESSLER (2004), « On $\psi$-invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture ». *J. Algebraic Geom.*, **13** (4), p. 771–798.

B. POONEN (1999), « Mordell-Lang plus Bogomolov ». *Invent. Math.*, **137** (2), p. 413–425.

T. RANSFORD (1995), *Potential theory in the complex plane*. Cambridge University Press, Cambridge.

M. RAYNAUD (1983*a*), « Courbes sur une variété abélienne et points de torsion ». *Invent. Math.*, **71** (1), p. 207–233.

M. RAYNAUD (1983*b*), « Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion ». *In* « Arithmetic and Geometry. Papers dedicated to I.R. Shafarevich », édité by M. ARTIN & J. TATE, numéro 35 in Progr. Math., p. 327–352, Birkhäuser.

J. F. RITT (1923), « Permutable rational functions ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (3), p. 399–448.

D. ROESSLER (2005), « A note on the Manin-Mumford conjecture ». *In* « Number fields and function fields—two parallel worlds », volume 239 de *Progr. Math.*, p. 311–318, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

R. RUMELY (1999), « On Bilu's equidistribution theorem ». *In* « Spectral problems in geometry and arithmetic », volume 237 de *Contemp. Math.*, p. 159–166, Iowa City, IA, 1997.

S. SCHANUEL (1979), « Heights in number fields ». *Bull. Soc. Math. France*, **107**, p. 433–449.

A. SCHINZEL (1974/75), « Addendum to the paper : "On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number" (Acta Arith. **24** (1973), 385–399) ». *Acta Arith.*, **26** (3), p. 329–331.

J.-P. SERRE (1960), « Analogues kähleriens de certaines conjectures de Weil ». *Ann. of Math.*, **71**, p. 392–394.

J.-P. SERRE (1997), *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, third édition. Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre.

J.-P. SERRE (2000), *Local algebra*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.

N. SIBONY (1999), « Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$ ». *In* « Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997) », volume 8 de *Panorama et Synthèses*, p. 97–185, Soc. Math. France, Paris.

J. H. SILVERMAN (1991), « Rational points on $K3$ surfaces : a new canonical height ». *Invent. Math.*, **105** (2), p. 347–373.

J. H. SILVERMAN (1994), « Geometric and arithmetic properties of the Hénon map ». *Math. Z.*, **215** (2), p. 237–250.

L. SZPIRO, E. ULLMO & S.-W. ZHANG (1997), « Équidistribution des petits points ». *Invent. Math.*, **127**, p. 337–348.

B. TEISSIER (1990), « Résultats récents d'algèbre commutative effective ». *Astérisque*, (189-190), p. Exp. No. 718, 107–131. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.

E. ULLMO (1998), « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes ». *Ann. of Math.*, **147** (1), p. 167–179.

M. WALDSCHMIDT (2000), *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables.* Numéro 326 in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag.

S. T. YAU (1978), « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I ». *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (3), p. 339–411.

Y. YOMDIN (1987), « Volume growth and entropy ». *Israel J. Math.*, **57** (3), p. 285–300.

X. YUAN (2006), « Big line bundles on arithmetic varieties ». *arXiv:math.NT/0612424*.

S.-W. ZHANG (1995*a*), « Positive line bundles on arithmetic varieties ». *J. Amer. Math. Soc.*, **8**, p. 187–221.

S.-W. ZHANG (1995*b*), « Small points and adelic metrics ». *J. Algebraic Geometry*, **4**, p. 281–300.

S.-W. ZHANG (1998), « Equidistribution of small points on abelian varieties ». *Ann. of Math.*, **147** (1), p. 159–165.

S.-W. ZHANG (2006), « Distributions in algebraic dynamics ». *In* « A tribute to Professor S.–S. Chern », volume 10 de *Surveys in Differential Geometry*, p. 381–430, International Press.