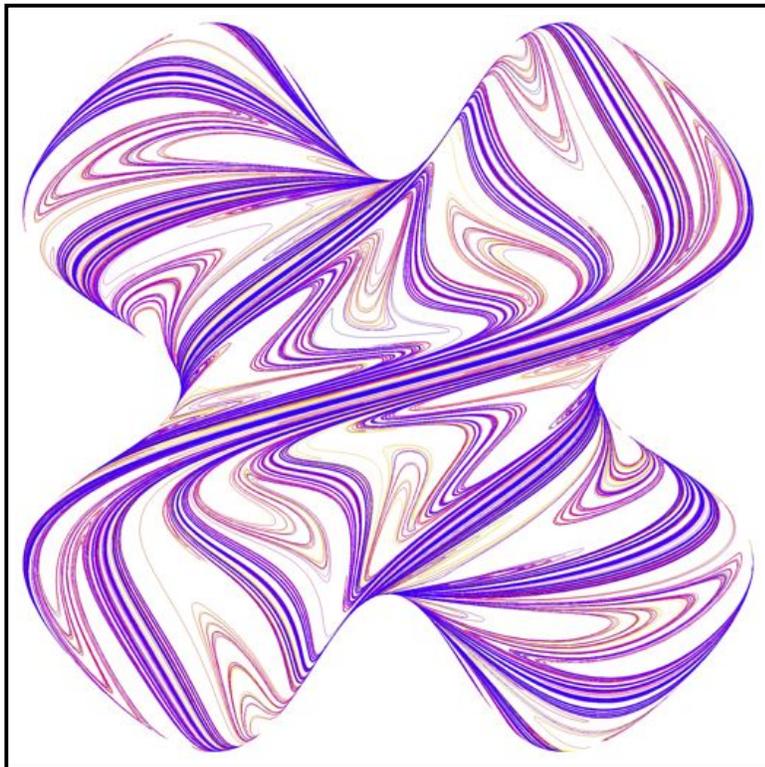


# Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux

Existence, exemples, rigidité

SERGE CANTAT

---





## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Dynamique holomorphe.

Donnons nous une variété projective complexe  $M$  et une transformation  $f$  de  $M$  qui est holomorphe ou rationnelle. En itérant cette transformation, nous obtenons un système dynamique « polynomial » à temps discret : seconde après seconde, un point  $z$  de l'ensemble  $M$  se déplace en  $z_1 = f(z)$ , puis en  $z_2 = f(z_1)$ , en  $z_3 = f(z_2)$  ... Un mouvement dynamique régi suivant la règle d'évolution édictée par  $f$  se développe ainsi sur la variété  $M$ .

Voici un exemple d'une telle transformation dû à MAZUR et MCMULLEN. Considérons l'ensemble  $X(\mathbf{R})$  constitué des solutions en nombres réels de l'équation

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + 7xyz = 13/10.$$

L'équation est de degré 2 par rapport à la variable  $x$ . À tout point  $(x, y, z)$  de  $X(\mathbf{R})$  correspond donc un second point  $(x', y, z)$  : ceci détermine une

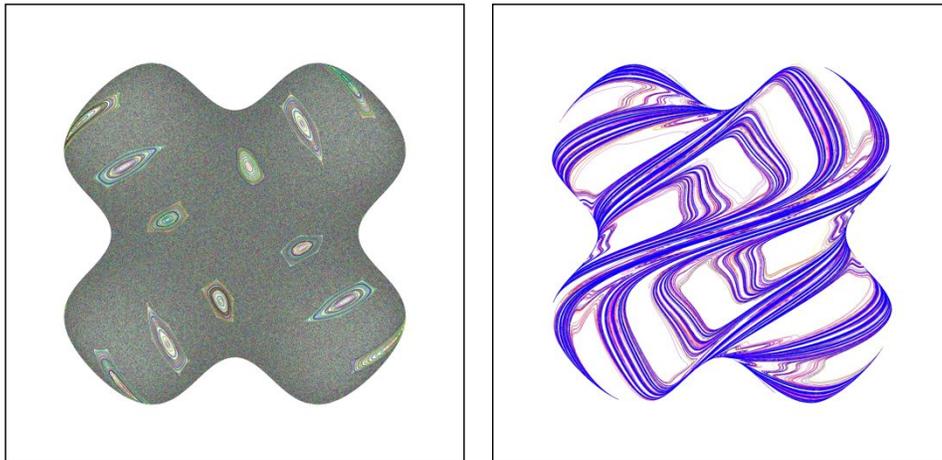


FIGURE 1. Dynamique sur une surface. La figure de gauche représente les orbites de quelques points pour un difféomorphisme polynomial d'une surface algébrique réelle. Celle de droite représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de ce difféomorphisme. (image obtenue à l'aide d'un programme développé par C. MCMULLEN et V. PIT)

involution de  $X(\mathbf{R})$  qui s'exprime par des fractions rationnelles en  $(x, y, z)$ ,

$$(x', y, z) = \left( -x - \frac{7yz}{(1+y^2)(1+z^2)}, y, z \right).$$

Cette remarque vaut aussi pour la variable  $y$  ou la variable  $z$  et permet donc de construire trois involutions de  $X(\mathbf{R})$ . La transformation rationnelle obtenue en composant ces trois involutions est un difféomorphisme  $f$  de la surface  $X(\mathbf{R})$  : sur la figure 1, nous avons représenté les orbites  $\{z, f(z), \dots\}$  de six mille points de  $X(\mathbf{R})$  en itérant  $f$  trois mille fois pour chaque point. On distingue plusieurs types d'orbites : certaines restent confinées sur des courbes fermées tandis que d'autres paraissent remplir une partie importante de  $X(\mathbf{R})$ . Pour cet exemple, il semble probable qu'il existe un ensemble dense de points périodiques elliptiques, chacun étant entouré par des courbes fermées simples elles mêmes périodiques. La partie de droite de la figure 1 représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de  $f$ .

Ce texte concerne l'étude de ce type de systèmes dynamiques ; il porte sur deux aspects :

- (a) l'existence de telles dynamiques polynomiales ;
- (b) la classification des systèmes dynamiques polynomiaux ou rationnels dont la dynamique est la plus régulière.

Pour cela, nous aurons besoin de connaître certaines propriétés de la dynamique des transformations rationnelles. Nous les décrirons succinctement et le lecteur trouvera de nombreux compléments dans le texte de ce volume rédigé par GUEDJ.

## 1.2. Géométrie et classification.

Le premier chapitre relève essentiellement du domaine de la géométrie algébrique complexe. Une variété complexe projective  $M$  (ou, plus généralement, compacte et kählérienne) étant donnée, nous chercherons des conditions permettant d'assurer ou d'exclure l'existence de transformations rationnelles  $f : M \dashrightarrow M$  qui donnent naissance à une dynamique chaotique sur  $M$ . La présence de telles transformations impose des contraintes fortes à la géométrie (algébrique et analytique) de  $M$ . Le théorème suivant, dû à BEAUVILLE, illustre bien ces contraintes :

*si  $M$  est une hypersurface lisse de  $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbf{C})$  dont la dimension est supérieure ou égale à trois, et si  $M$  n'est pas un hyperplan, alors  $M$  ne possède*

*aucun endomorphisme holomorphe dont le degré topologique est strictement supérieur à 1.*

Un second exemple instructif est celui des variétés homogènes compactes : dans ce cas, le groupe des difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété et celle-ci possède donc de nombreuses transformations holomorphes. Nous verrons par contre, dans ce contexte, que les endomorphismes de degré topologique strictement supérieur à 1 proviennent uniquement des endomorphismes des espaces projectifs et des nilvariétés (voir le paragraphe 5.4).

Nous pouvons donc retenir comme principe général que les variétés projectives complexes ayant une dynamique polynomiale riche sont rares. De surcroît, lorsqu'une variété projective est susceptible d'admettre un tel système dynamique, il est difficile de déterminer précisément l'ensemble de ses transformations holomorphes ou rationnelles. Nous verrons par exemple que, à l'heure actuelle, on ne sait pas déterminer les surfaces dont le groupe des difféomorphismes holomorphes contient un groupe libre non abélien, ni celles qui possèdent une transformation rationnelle dominante non inversible.

### 1.3. Exemples.

On dispose toutefois d'exemples très riches. Leurs propriétés dynamiques sont remarquables et peuvent parfois être utilisées pour confirmer, dans des cas simples, certaines conjectures portant sur la géométrie de la variété  $M$ . Nous avons donc saisi l'occasion d'écrire ce texte pour regrouper dans un deuxième chapitre quelques exemples actuellement éparpillés dans la littérature. Ceci permettra d'exhiber des transformations holomorphes ou rationnelles sur des variétés pour lesquelles il est souvent difficile d'en construire, mais aussi de présenter des transformations rationnelles avec des propriétés dynamiques particulières. En guise d'exemple, signalons le résultat suivant (BEDFORD et KIM, MCMULLEN, CANTAT) :

*Il existe un difféomorphisme holomorphe  $f$  d'une surface projective complexe (rationnelle) tel que*

- (i) le nombre de points périodiques de  $f$  de période  $n$  croît exponentiellement vite avec  $n$  ;*
- (ii) ces points périodiques s'équidistribuent, quand  $n$  tend vers l'infini, vers une mesure qui est singulière vis-à-vis de la mesure de LEBESGUE.*

#### 1.4. Rigidité.

Le troisième chapitre mélange dynamique et géométrie : il s'agit de classer les transformations méromorphes ou holomorphes des variétés kählériennes dont la dynamique est riche et possède une certaine régularité uniforme. Nous verrons ainsi le résultat suivant de BERTELOOT, DUPONT, LOEB et ZDUNICK :

*Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  dont le degré topologique  $\deg_{top}(f)$  est supérieur à 2. Si les points périodiques de  $f$  de période  $n$  s'équidistribuent vers une mesure qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE, il existe un tore  $\mathbf{C}^k/\Lambda$ , une transformation affine holomorphe  $F$  de ce tore et un revêtement ramifié  $\pi : \mathbf{C}^k/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  tel que*

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

*De plus,  $F$  est une similitude de rapport  $(\deg_{top}(f))^{1/2k}$ .*

En imposant des contraintes naturelles à la dynamique il est donc possible de classer les transformations à conjugaison holomorphe ou rationnelle près. La grande rigidité des transformations holomorphes ou rationnelles s'y voit ainsi confirmée. Ceci souligne en outre le caractère « sauvage » de la dynamique des transformations qui ne relèvent pas de ces classifications.

#### 1.5. Remerciements et excuses.

Merci aux personnes qui ont relu tout ou partie de ce texte, notamment aux rapporteurs, à Katia Amerik, Pascal Autissier, Dominique Cerveau, Antoine Chambert-Loir, Thomas Dedieu, Julie Deserti, Christophe Dupont, Charles Favre, Vincent Guedj, Nessim Sibony, John Smillie et à Claire Voisin.

L'essentiel de ce texte a été écrit en 2006 et 2007. Mes goûts personnels m'avaient déjà conduit à des choix forcément discutables. S'ajoute maintenant l'absence flagrante de développements récents fondamentaux, qui ne sont pas mentionnés, si ce n'est sous forme de références trop rares pour donner un aperçu réaliste de l'état des connaissances. J'espère que le lecteur y trouvera les pistes suffisantes pour compléter ce survol, et je présente mes excuses aux auteurs dont les travaux n'ont pas ici la place qu'ils méritent.

## Premier chapitre : contraintes géométriques pour l'existence de transformations rationnelles.

Dans cette première partie nous décrivons les acteurs principaux de ce texte : les variétés projectives complexes et les transformations holomorphes ou rationnelles de ces variétés. Nous verrons en particulier que la géométrie d'une variété kählérienne compacte  $M$  impose des contraintes fortes à l'existence de transformations rationnelles  $f : M \dashrightarrow M$  avec une dynamique intéressante.

### *Transformations holomorphes et rationnelles.*

Dans la suite, les variétés considérées seront supposées lisses et connexes, sauf mention explicite du contraire. Si  $M$  est une variété complexe compacte, nous noterons  $\text{Aut}(M)$  le groupe de ses automorphismes, *i.e.* de ses difféomorphismes holomorphes, et  $\text{End}(M)$  l'ensemble de ses endomorphismes holomorphes. La composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}(M)$  sera notée  $\text{Aut}(M)^0$ . La notation  $\text{Rat}(M)$  sera utilisée pour désigner l'ensemble des transformations méromorphes (ou rationnelles) de  $M$ . Celles qui sont dominantes (*i.e.* dont l'image contient un ouvert de ZARISKI de  $M$ ) forment le sous-ensemble  $\text{Dom}(M)$ .

### *Surfaces K3.*

Les surfaces K3 sont les surfaces complexes compactes simplement connexes qui possèdent une 2-forme holomorphe partout non nulle. Ces surfaces occupent une place privilégiée dans la classification d'ENRIQUES-KODAIRA, et il n'est donc pas surprenant qu'elles jouent également un rôle important pour ce qui concerne les automorphismes et les transformations méromorphes des surfaces. Nous les retrouverons donc tout au long de ce texte. Les exemples les plus simples de telles surfaces sont les quartiques lisses de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  et les revêtements doubles de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ramifiés le long d'une courbe sextique lisse.

## 2. ENDOMORPHISMES, TRANSFORMATIONS RATIONNELLES ET ENTROPIE

### 2.1. Entropie topologique.

L'entropie topologique est un nombre réel positif ou nul associé à toute transformation continue d'un espace compact. Plus ce nombre est grand, plus la dynamique de la transformation est riche. Rappelons sa définition (voir [115] pour les détails).

Soit  $f$  une transformation continue d'un espace métrique compact  $X$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif, qu'il faut penser comme étant la précision à laquelle on observe la dynamique de  $f$ . Pour tout entier positif  $n$ , notons  $N(n, \varepsilon)$  le nombre d'orbites distinctes de  $f$  que l'on peut observer pendant une durée  $n$  à l'échelle  $\varepsilon$ ; par définition,  $N(n, \varepsilon)$  est le cardinal minimum d'une partie  $X_n$  de  $X$  telle que, pour tout point  $y$  de  $X$ , il existe un point  $x$  de  $X_n$  satisfaisant

$$\text{dist}(f^l(x), f^l(y)) \leq \varepsilon, \quad \forall 0 \leq l \leq n.$$

L'entropie topologique de  $f$  à l'échelle  $\varepsilon$ , notée  $h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$ , est le taux de croissance exponentielle de  $N(n, \varepsilon)$  lorsque la durée d'observation  $n$  tend vers l'infini :

$$h_{\text{top}}(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \log(N(n, \varepsilon)) \right\}.$$

La limite des entropies  $h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 est l'entropie topologique de  $f$ . Nous la noterons  $h_{\text{top}}(f)$ . Elle ne dépend pas du choix de la distance utilisée pour décrire la topologie de  $X$ .

**Exemple 2.1.** La transformation  $t \mapsto 2t$  passe au quotient en une transformation continue du cercle  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Cette transformation multiplie la distance entre deux points proches par un facteur 2. On en déduit sans peine que son entropie est égale à  $\log(2)$ .

De même, toute translation  $t \mapsto t + a$  passe au quotient et induit une isométrie de  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Comme toute isométrie, l'entropie de cette transformation est nulle.

### 2.2. Calcul de l'entropie.

Lorsque  $f$  est une transformation de classe  $C^\infty$  d'une variété compacte  $M$ , l'entropie topologique de  $f$  est minorée par le logarithme du rayon

spectral de la transformation linéaire

$$f^* : H^*(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R}),$$

où  $H^*(M, \mathbf{R})$  est la somme directe des groupes de cohomologie de  $M$  :

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log(\rho(f^*)).$$

Ce résultat dû à YOMDIN se transforme en une égalité pour les transformations holomorphes des variétés kählériennes :

**Théorème 2.2** (GROMOV, YOMDIN, [92], [94], [151]). *Soit  $f$  une transformation holomorphe d'une variété complexe compacte kählérienne  $M$ . Pour tout entier  $p$  compris entre 0 et  $\dim_{\mathbf{C}}(M)$ , notons  $\lambda_p(f)$  le rayon spectral de la transformation linéaire  $f^*$  agissant sur le groupe de cohomologie de DOLBEAULT  $H^{p,p}(M, \mathbf{R})$ . Alors*

$$h_{\text{top}}(f) = \max_{0 \leq p \leq \dim_{\mathbf{C}}(M)} \{\log(\lambda_p(f))\}.$$

Le rayon spectral  $\rho(f^*)$  est strictement plus grand que 1 si et seulement si l'un des  $\lambda_p(f)$  l'est et, en fait, si et seulement si  $\lambda_1(f) > 1$ . Autrement dit, pour tester si l'entropie de  $f$  est strictement positive, il suffit de calculer la vitesse de croissance exponentielle de la suite  $(f^n)^*[\kappa]$  où  $\kappa$  est n'importe quelle forme de KÄHLER (voir [65], ou le §2.4 et [98] pour des compléments dans ce volume).

**Exemple 2.3.**

- 1) L'entropie topologique d'un endomorphisme holomorphe  $f$  de l'espace projectif est égale au logarithme du degré topologique de  $f$ .
- 2) Soit  $\nu$  un champ de vecteurs sur une variété kählérienne compacte  $M$ . Soit

$$\Phi : \mathbf{C} \times M \rightarrow M$$

le flot de  $\nu$ . Pour tout nombre complexe  $t$ , l'automorphisme  $\Phi(t, \cdot)$  est isotope à l'identité et son entropie est donc nulle. Autrement dit, au sein des automorphismes de  $M$ , tout élément  $f$  de la composante connexe de l'identité  $\text{Aut}(M)^0$  a une entropie nulle.

- 2) Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de dimension 3 de courbure constante  $-1$ . Le groupe  $\Gamma$  est donc isomorphe à un réseau cocompact du groupe de LIE réel  $\text{PSO}(1, 3)$  des isométries directes de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ .

Puisque  $\text{PSO}(1,3)$  est isomorphe à  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ , on peut aussi considérer  $\Gamma$  comme un sous-groupe discret cocompact de  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ . Soit  $V$  la variété  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ . Le flot géodésique complexe

$$\Phi(t, A) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} A, \quad A \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})/\Gamma,$$

a une entropie topologique strictement positive dès que  $t \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}i$  (il s'agit d'un flot holomorphe de type ANOSOV, voir le §11.1). En particulier,  $V$  n'est pas kählérienne.

### 2.3. Entropie nulle.

Précisons un peu l'affirmation générale suivant laquelle les transformations dont l'entropie est nulle ont une dynamique moins riche que les autres. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'un endomorphisme  $f$  sur une variété kählérienne compacte  $M$  a une entropie strictement positive dès que le rayon spectral de  $f^*$  est strictement plus grand que 1.

Plaçons nous a contrario dans le cas où  $f^*$  est l'identité. Dans ce cas, la suite des graphes des itérés  $f^n$  de  $f$  forme une suite de sous-variétés de  $M \times M$  de volume constant. Par le théorème de BISHOP, cette suite possède une sous-suite convergente. Il est alors possible de trouver une sous-suite  $n_k$  et une sous-variété  $\Gamma_\infty$  de  $M \times M$  qui est le graphe d'une transformation rationnelle  $f^\infty$  de  $M$  telles que  $f^{n_k}(m)$  converge vers  $f^\infty(m)$  pour tout point  $m$  d'un ouvert de ZARISKI non-vide ; la variété  $\Gamma_\infty$  s'obtient en retirant certaines composantes verticales de la limite des graphes des  $f^{n_k}$ . Par exemple, lorsque  $f$  est l'automorphisme de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$

$$f[x : y] = [x : 2y],$$

les graphes de  $f^n$  converge vers la courbe réductible  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \{[0 : 1]\} \cup \{[1 : 0]\} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , et  $\Gamma_\infty$  est ici le graphe de l'application constante  $f^\infty = [0 : 1]$ .

Ceci peut être précisé de la manière suivante : soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne, alors

- A.- si  $f$  est un endomorphisme de  $M$  pour lequel  $f^*$  est l'identité, le degré topologique de  $f$  vaut 1 et  $f$  est donc un automorphisme ;
- B.- si  $K$  est le noyau du morphisme de groupe

$$\text{Aut}(M) \rightarrow \text{GL}(H^{1,1}(M, \mathbf{R})),$$

la composante connexe de l'identité  $\text{Aut}(M)^0$  est d'indice fini dans  $K$  (voir [114]); en particulier, lorsque  $f^* = Id$ , un itéré de  $f$  coïncide avec le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs holomorphe ;

C.- l'action du groupe  $\text{Aut}(M)^0$  dans son ensemble est « compactifiable » (voir [114] et [82]) ; ceci signifie que l'adhérence de la famille des graphes des éléments de  $\text{Aut}(M)^0$  forme un compact  $G^*$  dans l'ensemble des sous-variétés de  $M \times M$  et que l'action de  $\text{Aut}(M)^0$  sur  $M$  s'étend à  $G^*$  au sens où (i) la structure de groupe de  $\text{Aut}(M)^0$  s'étend méromorphiquement à  $G^*$  en une application  $G^* \times G^* \dashrightarrow G^*$  et (ii) l'action de  $\text{Aut}(M)^0$  sur  $M$  s'étend en une application méromorphe  $G^* \times M \dashrightarrow M$ .

#### 2.4. Le cas méromorphe.

Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Il est possible de définir un endomorphisme linéaire  $f^*$  de  $H^*(M, \mathbf{C})$  qui respecte à la fois la structure entière et la décomposition de HODGE de la cohomologie de  $M$  et qui coïncide bien sûr avec l'opérateur usuel  $f^*$  lorsque  $f$  est holomorphe (voir [98], §2.1, pour une définition précise dans ce volume). Une difficulté apparaît lorsque  $f$  est méromorphe : en général, l'application qui à  $f$  associe  $f^*$  n'est pas un morphisme de  $\text{Rat}(M)$  vers le groupe  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{C}))$ . Il se peut par exemple que  $(f^*)^k$  diffère de  $(f^k)^*$  pour certaines valeurs de l'entier  $k$ .

**Exemple 2.4.** L'exemple le plus simple est celui de la transformation birationnelle du plan appelée involution de CREMONA et définie par

$$\sigma([x : y : z]) = [yz : zx : xy].$$

Cette transformation est une involution qui envoie une droite générique du plan sur une conique. L'action sur le second groupe de cohomologie de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  est donc la multiplication par 2 tandis que l'action de  $\sigma^2 = \text{Id}$  est l'identité. Ainsi,  $(\sigma^*)^2$  diffère de  $(\sigma^2)^*$ .

**Définition 2.5.** Soit  $f$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Soit  $p$  un entier compris entre 0 et la dimension de  $M$ . Le  $p$ -ième degré dynamique  $\lambda_p(f)$  est le rayon spectral de la suite d'opérateurs  $(f^n)^* : H^{p,p}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^{p,p}(M, \mathbf{R})$ .

Ceci signifie que

$$\lambda_p(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|(f^n)^*\|^{1/n} \right\}$$

pour toute norme d'opérateur  $\|\cdot\|$  sur les endomorphismes de l'espace vectoriel  $H^{p,p}(M, \mathbf{R})$  (voir [98], §2.1, pour d'autres définitions équivalentes et des références). Avec cette définition, les degrés dynamiques de l'involution de CREMONA  $\sigma$  valent tous 1. Lorsque  $p$  est égal à la dimension de  $M$ ,  $\lambda_p(f)$  est égal au degré topologique de  $f$ , c'est-à-dire au nombre d'antécédents d'un point générique de  $M$  par  $f$ ; nous le noterons  $\deg_{top}(f)$ .

Les autres quantités  $\lambda_p(f)$  sont plus délicates à appréhender. Notons toutefois que

- la suite  $\|(f^n)^*\|^{1/n}$  converge vers  $\lambda_p(f)$ , ce qui permet de remplacer la limite supérieure par une limite dans la définition de  $\lambda_p(f)$ ;
- si  $h : M' \dashrightarrow M$  est une application birationnelle, les degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$  et  $\lambda_p(h^{-1} \circ f \circ h)$  sont égaux.

Le lecteur peut se reporter à [98], ou directement à [68].

Comme l'ont montré DINH et SIBONY, la majoration de GROMOV concernant l'entropie topologique subsiste dans le cadre méromorphe,

$$h_{top}(f) \leq \max_{0 \leq p \leq \dim_{\mathbf{C}}(M)} \log(\lambda_p(f))$$

(voir [66], ou [98], §2.2 pour quelques détails dans ce volume).

**Exemple 2.6.** (voir [96]) L'endomorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$

$$F(x, y) = (x^2, y + 1)$$

s'étend en un endomorphisme holomorphe  $f$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  dont l'entropie topologique est égal à

$$h_{top}(f) = \log(2) = \log(\deg_{top}(f)).$$

Puisque l'unique point fixe de la translation  $y \mapsto y + 1$  se situe en  $\infty$ , la dynamique de  $f$  se concentre sur le cercle  $|x| = 1$  au sein de la courbe  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\infty\}$ ; par exemple, tous les points périodiques de  $f$  sont situés sur cette courbe et l'orbite de tout point  $m$  converge vers ce cercle, ou  $(0, \infty)$ , ou  $(\infty, \infty)$ .

L'application  $F$  peut aussi être étendue en une application rationnelle  $g$  du plan projectif,

$$g[x : y : z] = [x^2 : yz + z^2 : z^2].$$

En d'autres termes,  $g$  est conjuguée à  $f$  par l'application birationnelle de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  vers  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  obtenue en éclatant le point  $(\infty, \infty)$  puis en contractant les transformées strictes des droites horizontales  $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \infty$ . Par cette opération la droite supportant tous les points périodiques de  $f$  a été contractée sur le point  $[0 : 1 : 0]$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . Le point  $[0 : 1 : 0]$  est l'unique point d'indétermination de  $g$  et  $g$  contracte la droite  $\{z = 0\}$  sur le point  $[1 : 0 : 0]$ . Le degré topologique de  $g$  est égal à celui de  $F$ , donc à 2, mais l'entropie topologique de  $g$  est nulle car l'orbite de tout point  $m$  du plan converge vers le point  $[0 : 1 : 0]$  ou le point  $[1 : 0 : 0]$ .

Pour l'application rationnelle  $g$ , l'inégalité de GROMOV, DINH et SIBONY est donc stricte, mais  $g$  est conjuguée birationnellement à un endomorphisme pour lequel il y a égalité.

L'extension de la minoration de YOMDIN au cas méromorphe est donc délicate et constitue un problème essentiellement ouvert. On dispose toutefois de résultats complets dans un cas particulier.

**Définition 2.7.** Une transformation méromorphe  $f$  d'une variété complexe compacte kählérienne  $M$  de dimension  $k$  est dite cohomologiquement dilatante si son degré topologique  $\lambda_k(f)$  majore strictement ses autres degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$ ,  $0 \leq p \leq k - 1$ .

**Théorème 2.8** (GUEDJ, [97], DINH et SIBONY [68], voir §10.2). *Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation rationnelle d'une variété projective complexe  $M$ . Si  $f$  est cohomologiquement dilatante alors*

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\text{deg}_{\text{top}}(f)).$$

Ce théorème sera rediscuté au paragraphe 10.2 : nous nous sommes contenté ici d'extraire un corollaire relatif au calcul de l'entropie topologique.

## 2.5. Recherche d'exemples.

Il est difficile d'exhiber des variétés kählériennes compactes (ou projectives) qui admettent des endomorphismes ou des transformations méromorphes avec une entropie strictement positive. D'après l'inégalité de GROMOV, on recherchera des exemples pour lesquels l'un des degrés dynamiques  $\lambda_p$  est strictement plus grand que 1.

Le paragraphe 3 décrit les constructions géométriques classiques qui donnent naissance à des fibrations méromorphes sur  $M$  invariantes par

toute transformation méromorphe de  $M$ . Les exemples les plus intéressants, ceux qui ne se réduisent pas à des exemples de dimension plus petite, apparaissent donc lorsque toutes ces fibrations deviennent triviales. Le paragraphe 4 décrit succinctement le cas des variétés projectives complexes de dimension 1 et 2, et le paragraphe 5 traite trois cas particuliers instructifs.

### 3. FIBRATIONS INVARIANTES

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques constructions géométriques associées à une variété complexe, kählérienne ou projective  $M$  qui sont canoniquement invariantes (ou équivariantes) sous l'action des endomorphismes de  $M$ . L'essentiel de ce qui est résumé ici se trouve expliqué en détails dans le livre [147].

#### 3.1. Dimension de KODAIRA et applications pluricanoniques.

La dimension de KODAIRA  $\text{kod}(M)$  d'une variété complexe compacte  $M$  peut prendre les valeurs  $-\infty, 0, 1, 2, \dots, \dim_{\mathbf{C}}(M)$ . Elle est définie de la manière suivante.

Si  $L$  est un fibré en droites holomorphe sur  $M$ ,  $H^0(M, L)$  désignera le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de  $L$ . La dimension de ce  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel est finie. Soit  $x$  un point de  $M$  et  $L_x$  la fibre de  $L$  en ce point. L'évaluation des sections de  $L$  au point  $x$  détermine une application linéaire

$$\theta_{L_x} : H^0(M, L) \rightarrow L_x.$$

Cette application est identiquement nulle lorsque toutes les sections globales de  $L$  s'annulent en  $x$ ; on dit alors que  $x$  est un point base de  $L$ . Une fois fixé un isomorphisme de  $L_x$  avec la droite vectorielle complexe,  $\theta_{L_x}$  s'interprète comme une forme linéaire. Celle-ci ne dépend du choix de l'isomorphisme  $L_x \simeq \mathbf{C}$  que par un facteur multiplicatif. En tout point  $x$  de  $M$  qui n'est pas un point base de  $L$ , on obtient ainsi un élément  $[\theta_{L_x}]$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}(H^0(M, L)^*)$ . Pour les fibrés en droites qui possèdent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\Theta_L : M \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, L)^*) \quad (3.1)$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans les points base de  $L$ .

Pour chaque entier  $l$ , cette construction peut être répétée en remplaçant  $L$  par la puissance tensorielle  $L^{\otimes l}$ . La dimension de KODAIRA-ITAKA de  $L$  est alors définie comme le maximum des dimensions des images  $\Theta_{L^{\otimes l}}(M)$  lorsque  $l$  décrit  $\mathbf{N}^*$  :

$$\text{kod}(M, L) = \max_{l > 0} \{ \dim_{\mathbf{C}} (\Theta_{L^{\otimes l}}(M)) \}, \quad (3.2)$$

en convenant de poser  $\text{kod}(M, L) = -\infty$  si aucune puissance strictement positive de  $L$  ne possède de section non nulle.

Le fibré canonique de  $M$ , noté  $K_M$  est le déterminant du fibré cotangent :

$$K_M = \det(T^*M) ;$$

les sections holomorphes de  $K_M$  sont donc les formes holomorphes de degré maximal. La dimension de KODAIRA de  $M$ , notée  $\text{kod}(M)$ , est la dimension de KODAIRA-IITAKA de ce fibré. Les applications méromorphes  $\Theta_l = \Theta_{K_M^{\otimes l}}$  sont appelées « applications pluricanoniques ». La fibration méromorphe induite par  $\Theta_l$  ne dépend plus de  $l$  lorsque  $l$  est suffisamment divisible ; cette fibration est la « fibration canonique » de  $M$ .

Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une application méromorphe. La transformation  $f^*$  consistant à prendre l'image réciproque d'une forme holomorphe par  $f$  définit un endomorphisme linéaire de  $H^0(M, K_M^{\otimes l})$  pour tout  $l$  positif : l'image réciproque d'une forme est bien définie en dehors de l'ensemble d'indétermination  $\text{Ind}(f)$  et se prolonge à  $M$  par le procédé d'HARTOGS. Nous dirons que  $f$  est « dominante » si l'image de  $M \setminus \text{Ind}(f)$  est un ouvert de ZARISKI non vide de  $M$  ; ceci revient à dire que le degré topologique de  $f$  est strictement positif. Lorsque le fibré  $K_M^{\otimes l}$  a des sections non nulles, l'application  $f$  est dominante si et seulement si  $f^*$  appartient au groupe linéaire  $\text{GL}(H^0(M, K_M^{\otimes l}))$ . En notant  $F_l$  (ou  $F$  pour simplifier) la transformation projective associée à  $f^*$ , on a la relation

$$F_l \circ \Theta_l = \Theta_l \circ f. \quad (3.3)$$

Autrement dit, la fibration pluricanonique est une fibration méromorphe invariante par toute transformation méromorphe dominante  $f$  et l'action induite par  $f$  sur la base de la fibration est linéaire : c'est la restriction de  $F$  à l'image de  $\Theta_l$ . On montre par la même méthode que la dimension de KODAIRA d'une variété  $M$  est un invariant birationnel.

Soient  $l$  un entier positif et  $\Omega$  une section holomorphe du fibré  $K_M^{\otimes l}$ . Le produit  $\Omega$  avec  $\overline{\Omega}$  définit une section de  $(K_M \otimes \overline{K_M})^{\otimes l}$  ; localement,  $(i)^{k^2} \Omega \otimes \overline{\Omega}$  est la puissance  $l$ -ème d'une forme volume positive, ce qui permet de définir

$$\|\Omega\|_l = \int_M ((i)^{k^2} \Omega \otimes \overline{\Omega})^{1/l},$$

où  $k$  est la dimension complexe de  $M$ . L'application  $\|\cdot\|_l$  satisfait les propriétés suivantes.

- (i) **Homogénéité** :  $\|\lambda\Omega\|_l = |\lambda|^{2/l}\|\Omega\|_l$ .
- (ii) **Positivité** :  $\|\Omega\|_l \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\Omega$  est nulle.
- (iii) **Compacité** : le groupe des endomorphismes linéaires de  $H^0(M, K_M^{\otimes l})$  qui préservent  $\|\cdot\|_l$  est un groupe compact.

Pour toute transformation méromorphe  $f$  de  $M$ , on a bien sûr

$$\|f^*\Omega\|_l = \deg_{top}(f)\|\Omega\|_l,$$

ce qui montre la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $f$  une transformation méromorphe dominante de  $M$ . Pour tout entier positif  $l$ , la transformation projective*

$$F_l : \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes l})^*) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes l})^*)$$

*associée à  $f$  appartient au groupe compact des transformations qui préservent  $\|\cdot\|_l$ .*

Le théorème suivant renforce considérablement la proposition 3.1 lorsque  $M$  est projective. Pour chercher des transformations méromorphes avec une dynamique intéressante, il s'agit donc en premier lieu de restreindre notre attention aux variétés complexes compactes dont la dimension de KODAIRA est négative ou nulle.

**Théorème 3.2** ([147], [127]). *Soient  $M$  une variété complexe compacte kählérienne dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle et  $\Theta_l : M \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes l})^*)$ ,  $l > 0$ , les applications pluricanoniques. Si  $f$  est une transformation méromorphe et dominante de  $M$ , il existe une transformation projective périodique  $F_l$  de  $\mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes l})^*)$  telle que  $\Theta_l \circ f = F_l \circ \Theta_l$ .*

*Esquisse de démonstration lorsque  $f$  est birationnelle.* (voir [147], §VI, et [111], §7.6) Notons  $k$  la dimension complexe de  $M$ . L'application  $F_l$  est l'application linéaire duale de l'application  $f^*$ , agissant sur  $H^0(M, K_M^{\otimes l})$ . Il suffit donc de voir que l'application projective associée à  $f^*$  est périodique.

Tout d'abord,  $f^*$  préserve  $\|\cdot\|_l$ , donc  $f^*$  est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

**Lemme 3.3.** *Soit  $f$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Soit  $l$  un entier strictement positif et  $\Omega$  une*

section de  $K_M^{\otimes l}$ . S'il existe  $\chi \in \mathbf{C}$  tel que

$$f^* \Omega = \chi \Omega,$$

alors  $\chi$  est un entier algébrique.

Démontrons ce lemme dans le cas simple où  $l$  est égal à 1. En ce cas, la  $k$ -forme holomorphe  $\Omega$  détermine une classe d'homologie  $[\Omega]$ , qui est un vecteur propre (non nul puisque  $M$  est kählérienne) de la transformation linéaire

$$f^* : H^k(M, \mathbf{Z}) \rightarrow H^k(M, \mathbf{Z}).$$

Ceci montre que  $\chi$  est un entier algébrique : c'est une racine du polynôme caractéristique d'une transformation linéaire à coefficients entiers dont le terme dominant est égal à 1. Lorsque  $l$  est strictement supérieur à 1, le même argument s'applique après avoir appliqué le "covering trick" (voir [147], chapitre 6).

Utilisons maintenant le lemme. Soit  $\sigma$  un automorphisme du corps des nombres complexes. Puisque  $M$  est projective, la variété  $M$ , la transformation  $f$  et la forme  $\Omega$  sont définis par des polynômes à coefficients complexes. Faisant agir  $\sigma$  sur tous les coefficients, nous obtenons un nouveau triplet  $(M^\sigma, f^\sigma, \Omega^\sigma)$  satisfaisant l'ensemble des propriétés précédentes. En particulier, la valeur propre  $\sigma(\chi)$  est encore de module 1.

Puisque  $\chi$  est un entier algébrique dont tous les conjugués sont de module 1, le théorème de KRONECKER assure que  $\chi$  est une racine de l'unité. Puisque  $f^*$  est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont des racines de l'unité,  $f^*$  est périodique.  $\square$

**Remarque 3.4.** La preuve borne l'ordre de  $F_l$  en fonction de la dimension du groupe de cohomologie  $H^k(M, \mathbf{Z})$ . Nous renvoyons le lecteur à [147] pour des résultats plus précis.

**Remarque 3.5.** La preuve esquissée ci-dessus ne s'applique pas au cas d'une transformation méromorphe  $f$  de degré topologique  $d > 1$ . L'action de  $f^*$  sur l'espace des sections de  $K_M^{\otimes l}$  est une similitude de rapport  $(\sqrt{d})^l$ , et les valeurs propres  $\alpha$  de cette transformation sont donc des entiers algébriques satisfaisant

$$\left| \frac{\alpha}{(\sqrt{d})^l} \right| = 1,$$

mais les nombres  $\alpha/(\sqrt{d})^l$  ne sont a priori pas des entiers algébriques. Le théorème de KRONECKER ne peut donc pas être appliqué. Il se peut alors que la transformation  $(\sqrt{d})^l f^*$  soit une isométrie de  $H^0(M, K_M^{\otimes l})$  d'ordre infini. Ceci se produit si l'on prend pour  $f$  la multiplication par  $3 + 4i$  sur la courbe elliptique  $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$ . En effet

$$\frac{3 + 4i}{5}$$

est un nombre algébrique de module 1 (dont le conjugué est aussi de module 1) qui n'est pas une racine de l'unité.

Le théorème reste cependant valable si  $f$  est méromorphe et dominante mais une autre stratégie de preuve est nécessaire (voir [5] et [127]).

**Remarque 3.6.** Lorsque la dimension de KODAIRA de  $M$  est maximale, i.e.  $\text{kod}(M) = \dim_{\mathbf{C}}(M)$ , les fibres génériques de l'application  $\Theta_k$  sont finies ; par conséquent, toute transformation méromorphe dominante de  $M$  est inversible et d'ordre fini et le groupe des automorphismes de  $M$  est fini (c'est le théorème d'ANDREOTTI, voir [7] et [111], §7).

**Théorème 3.7** (PETERS, [132]). *Si  $M$  est une variété complexe compacte kählérienne dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle, tout endomorphisme surjectif de  $M$  est un revêtement étale.*

**Remarque 3.8.** Si, en outre, le groupe fondamental de  $M$  est fini, tout endomorphisme de  $M$  est donc un automorphisme : c'est donc le cas pour toutes les variétés de CALABI-YAU irréductibles qui ne sont pas des tores, par exemple pour les surfaces K3.

**Exercice 3.9.** Si  $f : M \dashrightarrow M$  est une transformation méromorphe dominante d'une variété complexe compacte, l'ensemble de ramification  $R_f$  de  $f$  est le lieu d'annulation du déterminant jacobien de  $f$  ; l'ensemble  $R_f$  est donc l'ensemble vide ou un diviseur.

(1) Montrer que  $f^* : H^0(M, K_M^{\otimes l}) \rightarrow H^0(M, K_M^{\otimes l})$  est diagonalisable pour toute valeur de  $l \in \mathbf{N}$ .

(2) Si  $\Omega \in H^0(M, K_M^{\otimes l})$  est un vecteur propre de  $f^*$ , relier le lieu des zéros de  $\Omega$  à son image réciproque par  $f$  et à  $R_f$  (c'est un cas particulier de la formule d'HURWITZ). En déduire que le lieu des zéros de  $\Omega$  contient  $R_f$ , puis que  $R_f$  est contenu dans l'ensemble des points base des sections de  $H^0(M, K_M^{\otimes l})$ .

(3) Démontrer le théorème de PETERS énoncé ci-dessus ( $f$  est donc holomorphe pour cette question).

(4) Soit  $f_0$  la multiplication par 2 sur un tore  $A$  et  $f$  la transformation rationnelle obtenue en éclatant un point de ce tore. Que dire de  $\text{kod}(A)$  et de  $R_f$  dans ce cas ?

### 3.2. Fibration d'ALBANESE.

Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'ALBANESE. Notons  $H^0(M, \Omega_M^1)$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de  $M$ . Puisque  $M$  est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque  $\gamma$  est un lacet de  $M$ , l'intégration d'une 1-forme holomorphe le long de  $\gamma$  détermine une application

$$\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

qui ne dépend que de la classe d'homologie  $[\gamma] \in H_1(M, \mathbf{Z})$ . La théorie de HODGE montre que la partie sans torsion de  $H_1(M, \mathbf{Z})$  se plonge de cette manière en un réseau cocompact de  $H^0(M, \Omega_M^1)^*$ . Le tore complexe obtenu en quotientant  $H^0(M, \Omega_M^1)^*$  par ce réseau sera noté  $\text{Alb}(M)$  : c'est la variété d'ALBANESE de  $M$ .

Choisissons un point base  $x$  dans  $M$ . Si  $y$  est un point de  $M$  et  $\omega$  est une 1-forme fermée, l'intégrale de  $\omega$  entre  $x$  et  $y$  dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de  $\omega$  sur les lacets basés en  $x$ . On dispose ainsi d'une application holomorphe  $a_M : M \rightarrow \text{Alb}(M)$ , définie par

$$a_M(y)(\omega) = \int_x^y \omega, \quad \forall \omega \in H^0(M, T^*M), \quad (3.4)$$

qui dépend du choix du point base  $x$  dans  $M$ . C'est la fibration d'ALBANESE de  $M$ . Elle est équivariante sous l'action de toute transformation méromorphe  $f$ . L'action induite par  $f$  sur  $\text{Alb}(M)$  est associée à celle de  $f^*$  sur les 1-formes holomorphes.

Pour trouver des transformations non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'ALBANESE de  $M$  est « triviale », c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles

ne préservant aucune fibration force  $M$  à être un tore (voir [147]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de  $M$  est fini.

### 3.3. Réduction algébrique.

Le troisième exemple de fibration invariante est fourni par le processus de réduction algébrique (voir [147]). Il donne naissance à une fibration méromorphe dont les fibres sont les sous-variétés sur lesquelles toute fonction méromorphe est constante. Toute transformation méromorphe  $f$  préserve cette fibration ; l'action induite sur la base correspond à celle de  $f$  par composition sur le corps des fonctions méromorphes. Cette fibration est réduite à l'application identité si  $M$  est projective.

### 3.4. Quotient rationnel.

Une variété complexe  $M$  est rationnellement connexe si deux points quelconques de  $M$  peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles (cf. [58]). Pour qu'une variété projective soit rationnellement connexe il faut et il suffit qu'il existe une courbe rationnelle  $c : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow M$  telle que le fibré  $c^*(TM)$  soit une somme de fibrés en droites  $O(m)$  strictement positifs (i.e.  $m > 0$ ).

Si  $M$  est une variété complexe, on définit sur  $M$  une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ , dénommée équivalence rationnelle, en disant que deux points sont en relation s'il existe une chaîne de courbes rationnelles dans  $M$  qui joint  $x$  à  $y$ . En général, l'espace quotient  $M/\mathcal{R}$  n'est pas une variété ; par exemple, toute surface K3 projective possède une infinité dénombrable de courbes rationnelles. On dispose toutefois du résultat suivant (cf. [58], chap. 5, [40], thm. 3.23) :

**Théorème 3.10.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne. Il existe une variété complexe normale (singulière)  $\text{Ratio}(M)$  et une fibration méromorphe  $\rho : M \dashrightarrow \text{Ratio}(M)$  qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (a)  $\rho$  est une fibration régulière propre en dehors d'un fermé de ZARISKI de  $M$  ;
- (b) les fibres de  $\rho$  sont rationnellement connexes ;
- (c) les fibres générales de  $\rho$  sont des classes de  $\mathcal{R}$ -équivalence ;
- (d) si  $\psi : M \dashrightarrow B$  est une autre fibration méromorphe satisfaisant (a) et (b), il existe une application rationnelle  $\pi : B \dashrightarrow \text{Ratio}(M)$  telle que  $\rho = \pi \circ \psi$ .

Le troisième point utilise la définition suivante : une propriété est « générale » si elle est valable sur le complémentaire d'une famille dénombrable de fermés de ZARISKI d'intérieurs vides. La fibration  $\rho$  est appelée « quotient rationnel de  $M$  ». D'après la propriété (d), cette fibration est invariante par toute transformation méromorphe de  $M$ .

Le premier point est une propriété très spécifique de la fibration rationnelle. On dit que cette fibration méromorphe est « presque holomorphe ». Le lecteur pourra consulter [58] pour cette propriété et des exemples.

### 3.5. Le coeur.

Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne. Dans [40], CAMPANA introduit une fibration méromorphe  $c_M : M \dashrightarrow \text{Coe}(M)$ , appelée « coeur » de  $M$ , que nous ne définirons pas ici. Cette fibration est équivariante sous l'action de toute transformation méromorphe dominante de  $M$ . Plus précisément, AMERIK et CAMPANA montrent le résultat suivant (voir [5]) :

**Théorème 3.11.** *Soient  $M$  une variété complexe compacte kählérienne et  $c_M : M \dashrightarrow \text{Coe}(M)$  le coeur de  $M$ . Si  $f$  est une transformation méromorphe dominante de  $M$ , il existe une transformation biméromorphe  $f_c$  de  $\text{Coe}(M)$  d'ordre fini telle que  $f_c \circ c_M = c_M \circ f$ .*

En particulier, si  $f$  possède une orbite ZARISKI-dense, la variété  $M$  est « spéciale » au sens de CAMPANA (voir [40], [5], [45]).

### 3.6. Bilan.

Les fibrations décrites dans les paragraphes précédents sont équivariantes sous l'action des transformations méromorphes dominantes de  $M$  ; si  $\pi : M \dashrightarrow B$  est l'une de ces fibrations et  $f : M \dashrightarrow M$  est dominante, il existe une transformation  $\bar{f}$  de  $B$  telle que  $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$ . Lorsqu'on cherche à déterminer les variétés  $M$  munies d'une dynamique riche, il convient donc en premier lieu de déterminer celles qui vérifient simultanément les quatre propriétés suivantes :

- (i) la dimension de KODAIRA  $\text{kod}(M)$  vaut 0 ou  $-\infty$  et  $M$  est une variété spéciale au sens de CAMPANA,
- (ii) la réduction algébrique  $\text{Alg}(M)$  est de dimension 0 ou  $\dim_{\mathbb{C}}(M)$ ,
- (iii) le quotient rationnel  $\text{Ratio}(M)$  est de dimension 0 ou  $\dim_{\mathbb{C}}(M)$ ,
- (iv) le premier nombre de BETTI de  $M$  est nul.

#### 4. TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES DES COURBES ET DES SURFACES

Voyons maintenant ce qui peut être dit de l'existence de transformations holomorphes ou méromorphes sur les variétés de dimension 1 et 2 en utilisant la classification des surfaces de RIEMANN et des surfaces complexes compactes.

##### 4.1. Courbes.

Il y a trois familles de courbes (complexes compactes) suivant la valeur de la dimension de KODAIRA :

- $\text{kod}(C) = -\infty$  : le seul représentant de cette famille est la droite projective, ou sphère de RIEMANN,  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .
- $\text{kod}(C) = 0$  : il s'agit ici de la famille des courbes elliptiques, obtenues par quotient de la droite affine  $\mathbf{C}$  par un réseau  $\Gamma$ .
- $\text{kod}(C) = 1$  : toutes les courbes de genre  $g \geq 2$ .

**La droite projective.** Tout automorphisme de la droite projective est une homographie. Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))$  s'identifie donc au groupe des homographies  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ . La dynamique de tout automorphisme est donc « triviale ». Par contre, la dynamique de certains sous-groupes de  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ , notamment des sous-groupes discrets, est riche et largement étudiée.

Les endomorphismes de la droite projective sont les transformations de la forme

$$f[x : y] = [P(x, y) : Q(x, y)]$$

où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes homogènes de même degré  $\text{deg}(f)$  sans facteur commun. Dès que  $\text{deg}(f) > 1$ , la dynamique de  $f$  est riche et intéressante (voir [121]).

**Les courbes elliptiques.** Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbf{C}$  et  $E = \mathbf{C}/\Gamma$  la courbe elliptique associée. Tout endomorphisme  $f$  de  $E$  se relève au revêtement universel  $\mathbf{C}$  de  $E$  en une transformation holomorphe de  $\mathbf{C}$  dont la dérivée est constante, car elle commute aux translations  $z \mapsto z + \gamma$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Les endomorphismes de  $E$  sont donc tous induits par des transformations affines de la droite complexe ; leur dynamique est donc relativement simple, même s'ils peuvent avoir une entropie strictement positive.

**Genre 2 et plus.** Lorsque  $C$  est une courbe de genre  $g$  supérieur ou égal à 2, nous pouvons appliquer la remarque 3.6 : son groupe d'automorphismes est fini et tout endomorphisme de  $C$  qui est surjectif est un automorphisme. De plus, le cardinal de  $\text{Aut}(C)$  est borné par  $42(2g - 2)$  (théorème d'HURWITZ, voir [121]).

#### 4.2. Surfaces : classification et transformations rationnelles.

Supposons désormais que  $X$  est une surface complexe compacte kählérienne. La dimension de KODAIRA de  $X$  peut donc prendre quatre valeurs,  $-\infty$ , 0, 1 ou 2. Dans chaque situation, nous allons préciser les remarques générales faites au paragraphe 3. Auparavant, rappelons que  $X$  est dite minimale lorsqu'elle ne possède aucune courbe rationnelle lisse d'auto-intersection  $-1$ . Si une telle courbe existe, elle peut être contractée et l'on obtient une nouvelle surface lisse birationnelle à  $X$  dont le deuxième nombre de BETTI a chuté d'une unité. En appliquant ce procédé un nombre fini de fois, on construit un morphisme birationnel  $\pi : X \rightarrow X'$  tel que  $X'$  soit minimale. Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou nulle, ce modèle minimal de  $X$  est unique. On observe alors que tout automorphisme  $f$  de  $X$  est conjugué par  $\pi$  à un automorphisme de  $X'$  puis que toute transformation birationnelle de  $X'$  est en fait un automorphisme de  $X'$ . Ainsi, lorsque  $\text{kod}(X) \geq 0$ , les groupes  $\text{Bir}(X)$ ,  $\text{Bir}(X')$  et  $\text{Aut}(X')$  coïncident (voir [8]).

Décrivons maintenant les grandes familles de surfaces complexes compactes kählériennes. Il s'agit d'une description à transformation birationnelle près. Nous ne présenterons pour l'instant que des exemples de surfaces qui sont minimales.

- $\text{kod}(X) = -\infty$  : la première famille est constituée de toutes les surfaces birationnelles au plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . Les modèles minimaux sont en nombre infini (le plan  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ , la quadrique  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et les surfaces de HIRZEBRUCH  $F_n$ , voir [8]).

La seconde famille est constituée des surfaces réglées non rationnelles : les modèles minimaux sont les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  au-dessus d'une courbe de genre  $g \geq 1$ . La fibration ainsi définie est invariante par toute transformation rationnelle (voir le paragraphe 3.4).

- $\text{kod}(X) = 0$  : il y a aussi deux familles, dont voici les modèles minimaux.

La première famille est formée des tores  $\mathbf{C}^2/\Gamma$  et des surfaces qui sont revêtues par les tores à l'aide d'un morphisme étale, dites surfaces hyper-elliptiques.

La seconde est formée des surfaces K3 et des surfaces de ENRIQUES. Par définition,  $X$  est une surface K3 si son fibré canonique et son groupe fondamental sont triviaux. Une surface de Enriques est un quotient d'une surface K3 par une involution holomorphe dépourvue de point fixe. Deux exemples essentiels de surfaces K3 sont les hypersurfaces quartiques de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  et les surfaces de KUMMER (voir les paragraphes 7.2 et 8.2). Les surfaces K3 forment une famille de dimension 20 et sont toutes kählériennes. Celles qui sont projectives constituent une réunion dénombrable dense d'hypersurfaces dans cet espace de modules de dimension 20 (voir par exemple [8] pour les propriétés des surfaces K3 et des références aux articles originaux).

- $\text{kod}(X) = 1$  : il s'agit des surfaces elliptiques. La fibration pluricanonique réalise en effet une fibration de  $X$  dont les fibres génériques sont des courbes de genre 1. Cette fibration est invariante par toute transformation méromorphe de  $X$ .
- $\text{kod}(X) = 2$  : il s'agit du vaste monde des surfaces de type général. Par exemple, toute hypersurface lisse de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  de degré supérieur ou égal à 5 est une surface de type général. Leurs transformations méromorphes dominantes forment un groupe fini d'automorphismes (quitte à passer au modèle minimal ; voir la remarque 3.6).

#### 4.3. Automorphismes et transformations birationnelles.

Le résultat bien connu suivant fait partie du folklore géométrique italien dans le cas des surfaces projectives. Il est démontré dans [41].

**Théorème 4.1.** *Soit  $X$  une surface complexe compacte qui possède un automorphisme  $f$  dont l'entropie topologique est strictement positive.*

- *Ou bien la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle et dans ce cas  $f$  est conjugué à un automorphisme de l'unique modèle minimal de  $X$ , qui doit être un tore, une surface K3 ou une surface d'ENRIQUES .*
- *Ou bien la surface  $X$  est rationnelle ; dans ce cas  $X$  s'obtient en éclatant le plan projectif en au moins dix points (éventuellement infiniment*

*proches) et  $f$  est birationnellement conjuguée à une transformation birationnelle du plan.*

*En particulier,  $X$  est une surface kählérienne.*

*Esquisse de démonstration.* Si  $f$  est un automorphisme d'une surface de RIEMANN compacte, son entropie est nulle. On en déduit sans peine qu'une transformation birationnelle d'une surface qui préserve un pinceau de courbes a aussi une entropie nulle. Ceci permet d'exclure les surfaces dont la dimension de KODAIRA est strictement positive, mais aussi les surfaces hyperelliptiques où les surfaces réglées non rationnelles.

Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle,  $X$  possède un unique modèle minimal, qui doit donc être une surface K3, une surface d'ENRIQUES ou un tore. Supposons maintenant que la surface  $X$  est rationnelle. Dans ce cas, il est montré dans [124, 125] que  $X$  est obtenue en éclatant le plan projectif en au moins dix points.

Le cas le plus délicat est celui des surfaces non kählériennes et nous renvoyons pour cela le lecteur à [41].  $\square$

Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle, l'existence de tels automorphismes est décrite par le « théorème de TORELLI » (voir [8]).

**Théorème 4.2** (dit « de TORELLI »). *Soit  $X$  une surface K3. Le morphisme de  $\text{Aut}(X)$  vers  $\text{GL}(H^2(X, \mathbf{Z}))$  qui à  $f$  associe la transformation linéaire  $f^*$  induite par  $f$  sur la cohomologie de  $X$  est injectif. Réciproquement, si  $F$  est un élément de  $\text{GL}(H^2(X, \mathbf{Z}))$  qui préserve la forme d'intersection sur  $H^2(X, \mathbf{Z})$  ainsi que la décomposition de HODGE de  $H^2(X, \mathbf{C})$  et le cône de KÄHLER dans  $H^2(X, \mathbf{R})$ , alors il existe un automorphisme  $f$  tel que  $f^* = F$ .*

Lorsque  $X$  est un tore  $\mathbf{C}^2/\Gamma$ , l'énoncé est le même, à ceci près que le noyau du morphisme  $f \mapsto f^*$  est constitué du groupe engendré par les translations et l'involution  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ .

Pour les surfaces rationnelles, la situation est loin d'être comprise : la description de celles qui ont un groupe d'automorphismes infini est un problème ouvert à la fois difficile et important. Toutefois, pour celles qui possèdent une 2-forme méromorphe ne s'annulant pas, i.e. une section holomorphe non nul du fibré anticanonique  $-K_X$ <sup>1</sup> on dispose d'une version

---

1. ce sont donc des surfaces très proches des surfaces K3

faible du théorème de TORELLI (voir [99], [100] et [120]). Ceci fournit de très jolis exemples qui seront décrits au paragraphe 9.2.

Seules les surfaces rationnelles possèdent des transformations bimorphes qui (1) ne sont pas (biméromorphiquement) conjuguées à un automorphisme et (2) ont un degré dynamique strictement plus grand que 1. La transformation de HÉNON

$$f[x : y : z] = [yz : xz + y^2 + cz^2 : z^2],$$

où  $c$  appartient à  $\mathbf{C}$ , est un exemple d'une telle transformation. La dynamique de ces transformations birationnelles est très intéressante et commence à être bien comprise (voir le §10.3).

#### 4.4. Endomorphismes et transformations rationnelles.

Comme nous l'avons dit, les surfaces complexes compactes qui possèdent des endomorphismes surjectifs non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de KODAIRA est 0 ou  $-\infty$ . À côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques, c'est-à-dire des compactifications du groupe  $(\mathbf{C}^*)^2$  auxquelles l'action du groupe sur lui-même par translation à gauche s'étend ; ainsi, la transformation polynomiale

$$[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$$

détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en  $[0 : 0 : 1]$ . Les exemples construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. D'après [126], les surfaces projectives  $X$  qui possèdent un endomorphisme non inversible appartiennent à la liste suivante :

- les surfaces toriques ;
- les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  au-dessus d'une courbe elliptique,
- les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  au-dessus d'une courbe  $C$  de genre  $\geq 2$ , pour lesquels il existe un revêtement (étale)  $C'$  de  $C$  tel que

$$X \times_C C' = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times C';$$

- les surfaces abéliennes ou hyperelliptiques ;
- les surfaces elliptiques avec  $\text{kod}(X) = 1$  dont la caractéristique d'EULER topologique est nulle.

Lorsqu'aucune fibration n'est invariante par l'endomorphisme,  $X$  est donc une surface torique ou un tore (mais l'endomorphisme ne préserve pas nécessairement la structure torique, comme le montre le cas du plan projectif). Une classification analogue est disponible pour toutes les surfaces compactes (voir [3], [126], [83]).

Les transformations méromorphes dominantes des surfaces kählériennes compactes sont beaucoup plus nombreuses que les endomorphismes. Par exemple, une surface K3 ne possède pas d'endomorphisme de degré topologique strictement supérieur à 1 (voir la fin du §3.1) mais certaines surfaces K3 possèdent des transformations rationnelles de ce type. C'est le cas lorsqu'elles possèdent des fibrations elliptiques (voir le §8.3 pour des exemples explicites).

## 5. EXISTENCE D'ENDOMORPHISMES : TROIS CAS PARTICULIERS

Dans ce paragraphe, nous donnons trois exemples de variétés illustrant les difficultés que l'on rencontre lorsque l'on cherche à construire des transformations holomorphes d'ordre infini sur des variétés complexes et compactes. Le premier exemple concerne les hypersurfaces lisses de l'espace projectif, le deuxième celui des variétés compactes et kählériennes dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle et le troisième concerne les variétés homogènes compactes (a priori non kählériennes). Pour ces dernières, une nouvelle fibration invariante fait son apparition, la fibration de TITS.

### 5.1. Hypersurfaces lisses.

Le cas des hypersurfaces lisses des espaces projectifs est complètement compris. Les courbes planes lisses de degré supérieur ou égal à 4 ont un genre strictement supérieur à 2 : toute transformation rationnelle dominante d'une telle courbe est donc un automorphisme et le groupe des automorphismes est fini. Les courbes cubiques planes lisses sont des courbes de genre 1. Elles possèdent donc une infinité d'automorphismes et d'endomorphismes de degré  $> 1$  ; c'est également le cas pour les coniques lisses et les droites puisqu'elles sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

**Théorème 5.1** ([6], [130], [11], [116]). *Soit  $M$  une hypersurface lisse de dimension  $k \geq 2$  et de degré  $d \geq 2$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbf{C})$ .*

- *La variété  $M$  n'a pas d'endomorphisme de degré topologique strictement plus grand que 1, sauf si  $d = k = 2$  auquel cas  $M$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ;*
- *le groupe d'automorphismes de  $M$  est fini sauf pour les quadriques ( $d = 2$ ) et certaines surfaces quartiques ( $d = 4$  et  $k = 2$ ) ; les surfaces quartiques génériques n'ont pas d'automorphisme distinct de l'identité.*

### Remarque 5.2.

**1.-** Les surfaces quartiques dans  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  sont des exemples de surfaces K3 (voir le paragraphe 8.2). Certaines ont un groupe d'automorphismes qui contient un groupe libre non abélien.

2.- Pour compléter l'énoncé précédent, il convient de remarquer que les quadriques lisses sont homogènes et ont donc une infinité d'automorphismes.

**Exercice 5.3** ([91], pages 177–178, ou [139]). Soit  $M$  une hypersurface (lisse) de  $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbf{C})$  de dimension supérieure ou égale à 3 et de degré  $d$  distinct de  $k+2$ . Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de  $M$  qui est surjectif. Soit  $H$  une section hyperplane de  $M$ .

(1) Montrer en utilisant le théorème de la section hyperplane de LEFSCHETZ que le groupe de PICARD de  $M$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}[H]$ .

(2) Dédire de la formule d'adjonction que  $[K_M] = (d - k - 2)[H]$ .

(3) Montrer que  $f^*([H]) = \lambda[H]$  où  $\lambda^k$  est le degré topologique de  $f$ , puis en déduire que  $f$  s'étend en un endomorphisme holomorphe surjectif de  $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbf{C})$ .

(4) En déduire que l'entropie de tout automorphisme de  $M$  est nulle.

## 5.2. Dimension de KODAIRA positive.

Les résultats les plus simples que l'on puisse obtenir en dimension quelconque concernent les variétés dont la dimension de KODAIRA est positive. D'après la remarque 3.6, les endomorphismes dominants d'une variété de type général sont en nombre fini, et les endomorphismes des variétés de dimension de KODAIRA intermédiaire  $\text{kod}(M) \in \{1, \dots, \dim_{\mathbf{C}}(M) - 1\}$  préservent une fibration non triviale en induisant des automorphismes linéaires unitaires sur la base de cette fibration. Ces endomorphismes ont donc un facteur inversible, au sens de la définition suivante.

**Définition 5.4.** Un endomorphisme  $f$  d'une variété complexe compacte (connexe)  $M$  admet un *facteur inversible* si les trois conditions suivantes sont réunies :

- (i) il existe une fibration méromorphe  $\pi : M \dashrightarrow B$  à valeurs dans une variété lisse de dimension non nulle (sauf si  $M$  elle-même est réduite à un point),
- (ii) les fibres de  $\pi$  sont permutées par  $f$ ,
- (iii) l'endomorphisme  $f_B : B \rightarrow B$  induit par  $f$  est un automorphisme.

Ce vocabulaire étant introduit, nous allons voir que la proposition suivante résulte sans difficulté de la partie 3, du théorème de BOGOMOLOV sur les variétés à première classe de CHERN nulle et d'un résultat de SERRE (voir respectivement [10] et [138]). Elle est démontrée dans [44].

**Proposition 5.5.** ([44]) *Soit  $M$  une variété kählérienne compacte (connexe) de dimension  $k$  dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle. Soit  $f : M \rightarrow M$  un endomorphisme dont le degré topologique  $d_t(f)$  est strictement plus grand que 1.*

(i) *Si  $d_t(f)$  n'appartient pas au spectre de*

$$f_* : H_{k-1, k-1}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H_{k-1, k-1}(M, \mathbf{R})$$

*alors, après un revêtement étale fini de  $M$ , ou bien  $M$  est un tore, ou bien  $f$  a un facteur inversible ;*

(ii) *si  $f$  est un endomorphisme cohomologiquement dilatant,  $M$  est revêtu par un tore et  $f$  par une transformation affine de ce tore ;*

(iii) *S'il existe une classe de cohomologie kählérienne  $[\alpha]$  et un réel  $q$  tels que  $f^*[\alpha] = q[\alpha]$ , il existe alors un revêtement fini de  $M$  qui est un tore auquel  $f$  se relève en un endomorphisme affine.*

Comme nous le verrons plus bas, un résultat de SERRE montre que tout endomorphisme vérifiant les hypothèses de (iii) est cohomologiquement dilatant ; le point (iii) apparaît ainsi comme cas particulier de (ii).

**Remarque 5.6.** L'hypothèse reliant le degré de  $f$  au spectre de  $f_*$  dans la première assertion n'est sans doute pas essentielle. Supposons en effet que la dimension de KODAIRA de  $M$  est nulle, car sinon  $f$  a un facteur inversible. Si  $f$  ne préserve aucune fibration, nous pouvons supposer que la fibration d'ALBANESE de  $M$  est triviale. Dans ce cas, CAMPANA conjecture que le groupe fondamental de  $M$  est fini. Le revêtement universel de  $M$  serait alors une variété complexe compacte simplement connexe dont la dimension de KODAIRA est nulle : tous ses endomorphismes sont donc des revêtements et sont donc des automorphismes (voir 3.7).

**Remarque 5.7.** Un endomorphisme d'une variété projective qui dilate une classe de KÄHLER,

$$f^*[\alpha] = q[\alpha],$$

ou un fibré en droites ample  $L$  ( $f^*L = L^{\otimes q}$ ), avec  $q > 1$ , est parfois appelé « endomorphisme polarisé ». Pour l'instant, on ne sait pas lister les variétés projectives munies d'un tel endomorphisme (voir [154]). Le paragraphe suivant montrera que la métrique de KOBAYASHI d'une telle variété dégénère totalement (ce qui répond à une question de ZHANG dans [154]).

Donnons maintenant une preuve de la proposition précédente lorsque  $f$  est polarisé (point (iii) de la proposition).

*Démonstration de (i) et (iii).* Sous les hypothèses de (iii), SERRE a montré dans [138] que les valeurs propres de  $f^*$  sur chaque groupe de cohomologie  $H^{p,p}(M; \mathbf{C})$  sont de module  $q^p$ . Le degré topologique de  $f$  est égal à  $q^k$  où  $k$  est la dimension de  $M$ ; en particulier,  $q$  est strictement plus grand que 1 et le degré topologique de  $f$  n'apparaît pas parmi les valeurs propres de  $f_*$  restreint à l'espace  $H_{k-1,k-1}(M, \mathbf{R})$ .

D'après le théorème 3.7,  $f$  est un revêtement étale de  $M$ . Précisons ici l'argument de PETERS conduisant à cet énoncé. Soit  $l$  un entier strictement positif pour lequel  $K_M^{\otimes l}$  possède une section non identiquement nulle. Puisque l'espace des sections holomorphes de  $K_M^{\otimes l}$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, il existe une section  $\Omega$  de  $K_M^{\otimes l}$  et un nombre complexe non nul  $\alpha$  tel que

$$f^* \Omega = \alpha \Omega.$$

En particulier, le diviseur des zéros de  $\Omega$  est invariant à la fois par  $f$  et par  $f^{-1}$ ; au niveau homologique, ceci se traduit par l'équation

$$f_* [(\Omega)_0] = d_t(f) [(\Omega)_0].$$

Puisque  $d_t(f)$  n'apparaît pas parmi les valeurs propres de

$$f_* : H_{k-1,k-1}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H_{k-1,k-1}(M, \mathbf{R})$$

nous en déduisons que la classe  $[(\Omega)_0]$  est nulle et donc que le diviseur  $(\Omega)_0$  est vide, ce qui signifie que la forme  $\Omega$  ne s'annule pas. Le fibré en droites  $K_M$  est donc un fibré de torsion ( $K_M^{\otimes l}$  est trivial).

D'après un théorème célèbre de BOGOMOLOV (voir [10], partie I), la variété  $M$  possède un revêtement fini  $M'$  qui est le produit d'un tore  $A$  par une variété simplement connexe  $Q$ . L'endomorphisme  $f$  se relève en un endomorphisme de  $A \times Q$ , ce qui se voit en suivant la construction du revêtement  $M'$  par "covering-trick". Nous ne détaillerons pas ce point car seule suffit l'existence du relevé d'un itéré  $f^l$  de  $f$  dans ce qui suit; nous continuerons à noter  $f$  le relevé.

La projection sur  $A$  coïncide avec le morphisme d'ALBANESE et détermine donc une fibration  $f$ -équivariante. Il existe donc un endomorphisme

$\bar{f}$  de  $A$  et une application holomorphe  $\Phi : A \rightarrow \text{End}(Q)$  tels que  $f$  soit de la forme

$$f(a, b) = (\bar{f}(a), \Phi(a)(b)), \quad \forall (a, b) \in A \times Q.$$

La variété  $Q$  est simplement connexe et sa dimension de Kodaira est nulle, donc tout endomorphisme de  $Q$  est un automorphisme (*cf.* thm. 3.7). En outre, par le principe de BOCHNER, le groupe des automorphismes de  $Q$  est discret (voir [10]). Donc  $\Phi$  est une application constante : il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $Q$  tel que  $f = (\bar{f}, \varphi)$ .

Soit  $a$  un point de la variété d'Albanese  $A$  de  $M'$  et  $Q_a$  la fibre du produit  $M' = A \times Q$  au-dessus de  $a$ . Puisque  $f$  agit par automorphisme sur  $Q$ ,  $f^{-1}(Q_a)$  est constitué d'exactly  $q^k$  fibres. Celles-ci sont toutes homologues à  $Q_a$  et,  $M'$  étant kählérienne, la classe d'homologie  $[Q]$  n'est pas nulle. Puisque la valeur propre  $q^k$  n'apparaît pas sur les homologies de dimension intermédiaire, ceci montre que  $Q$  est réduite à un point. Autrement dit,  $M'$  est un tore.  $\square$

### 5.3. Images de $\mathbf{C}^k$ .

**Proposition 5.8.** *Soit  $M$  une variété projective complexe de dimension  $k$  munie d'un endomorphisme cohomologiquement dilatant  $f$ . Il existe alors une application holomorphe  $\xi : \mathbf{C}^k \rightarrow M$  dont l'image recouvre le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique strict de  $M$  qui est laissé invariant par  $f$  et  $f^{-1}$ .*

**Remarque 5.9.** En général, par exemple pour un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  générique, le diviseur invariant est vide.

*Démonstration.* Soit  $m$  un point périodique répulsif de  $f$  situé dans le support de la mesure d'entropie maximale de  $f$  (voir [35] pour l'existence de  $m$ ). On peut alors conjuguer localement  $f$  à sa forme normale  $F$  au voisinage de  $m$ , ce qui donne une bijection holomorphe  $\xi : U \rightarrow V$  définie sur une boule  $U$  de  $\mathbf{C}^k$  centrée en l'origine vers un ouvert  $V$  de  $M$  centré en  $m$ , telle que  $f \circ \xi = \xi \circ F$ . L'application  $F$  est une dilatation uniforme bijective de  $\mathbf{C}^k$  ; on peut donc étendre  $\xi$  à  $\mathbf{C}^k$  en posant

$$\xi(z) = f^n(\xi(F^{-n}(z)))$$

avec  $n$  suffisamment grand pour que  $F^{-n}(z)$  appartienne à l'ouvert  $U$  sur lequel  $\xi$  est initialement définie.

Soit  $x$  un point de  $M$  situé hors de l'ensemble algébrique totalement invariant maximal de  $f$  (voir §10.2, proposition 10.7), la suite de mesure  $(\frac{1}{\lambda_k(f)^n})(f^*)^n \delta_x$  converge vers la mesure d'entropie maximale de  $f$ . En particulier, au moins une des préimages de  $x$  appartient à l'ouvert  $V$  contenant  $m$ . Ainsi,  $x$  appartient à l'image de  $\xi$ .  $\square$

**Remarque 5.10.** Il est possible d'étendre cette proposition au cas des transformations rationnelles,  $\xi$  étant alors méromorphe, en utilisant les résultats du paragraphe 10.2 ou au cas des variétés kählériennes en utilisant ceux de [62].

**Remarque 5.11.** Nous renvoyons le lecteur à [38] pour une description des surfaces projectives  $X$  munies d'une application holomorphe  $\xi : \mathbf{C}^2 \rightarrow X$  dont le jacobien n'est pas identiquement nul. Par exemple, le groupe fondamental d'une telle surface est virtuellement abélien.

#### 5.4. Variétés homogènes.

Pour trouver de nouveaux endomorphismes holomorphes de degré strictement plus grand que 1, il est donc nécessaire de s'intéresser aux variétés de dimension de KODAIRA négative. Les variétés homogènes classiques fournissent de bons exemples de telles variétés : espaces projectifs, quadriques, grassmanniennes ... Rappelons qu'une variété complexe compacte est homogène si le groupe de ses difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété. Dans ce cas, la variété est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie complexe  $G$  par un sous-groupe de Lie complexe fermé  $H$  (voir [1]). Elle possède évidemment de nombreux automorphismes. Le but de cette partie est de décrire les endomorphismes non inversibles de ces variétés.

Les travaux de LAZARSELD [113], de PARANJAPÉ et SRINIVAS [130] et de WINKELMANN [149] conduisent au résultat suivant.

**Théorème 5.12** (voir [44]). *Soit  $X$  une variété complexe, connexe, homogène et compacte. Si  $f : X \rightarrow X$  est un endomorphisme de  $X$  qui n'a pas de facteur inversible, alors :*

- (i)  $X$  fibre sur un produit d'espaces projectifs  $Q = \mathbb{P}^{m_1}(\mathbf{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^{m_k}(\mathbf{C})$ , et les fibres sont des nilvariétés ;
- (ii) les fibres de la fibration sont permutées par  $f$ , ce qui détermine un endomorphisme  $f_Q : Q \rightarrow Q$  ;

(iii) il existe des endomorphismes non injectifs  $f_i : \mathbb{P}^{m_i}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^{m_i}(\mathbf{C})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et un entier strictement positif  $l$  tels que  $f_Q^l$  soit l'application diagonale  $(f_1, \dots, f_k)$ .

Dans la suite, nous restreindrons l'étude aux variétés homogènes kählériennes. Après avoir traité les tores et les variétés de drapeaux, nous concluons à l'aide d'un théorème de BOREL et REMMERT.

#### 5.4.1. Les tores, once again.

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension finie  $n$ ,  $\Gamma$  un réseau de  $V$  et  $A = V/\Gamma$  le tore associé. Puisque le fibré tangent de  $A$  est trivial, le principe du maximum montre que la différentielle de tout endomorphisme  $f : A \rightarrow A$  est constante. Les endomorphismes de  $A$  sont donc les transformations affines de  $V$  qui permutent les orbites de  $\Gamma$ . Les homothéties de rapport entier fournissent des exemples explicites mais il existe quelques exemples nettement plus riches (voir le paragraphe 7.1).

#### 5.4.2. Variétés de drapeaux.

Le deuxième type d'exemples est fourni par les variétés de drapeaux, c'est-à-dire les quotients compacts et lisses  $S/P$  où  $S$  est un groupe de Lie complexe semi-simple et  $P$  est un sous-groupe de Lie complexe connexe. Les Grassmanniennes et l'espace des  $k$ -plans isotropes pour une forme quadratique ou une forme symplectique sont des exemples de telles variétés. On retrouve ainsi tous les espaces homogènes "classiques". On dispose pour ces variétés d'un très joli théorème dû à PARANJAPPE et SRINIVAS [130]) :

**Théorème 5.13** (PARANJAPPE et SRINIVAS). *Soit  $X$  une variété de drapeaux et  $f : X \rightarrow X$  un endomorphisme. Il existe alors un nombre fini d'endomorphismes  $f_i : \mathbb{P}^{n_i}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^{n_i}(\mathbf{C})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et un automorphisme d'une variété de drapeaux  $f_0 : X_0 \rightarrow X_0$  tels que  $X$  soit isomorphe au produit  $X_0 \times \mathbb{P}^{n_1}(\mathbf{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}(\mathbf{C})$  et l'un des itérés de  $f$  coïncide avec l'endomorphisme diagonal  $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ .*

Lorsque la variété  $X = S/P$  est le quotient d'un groupe de Lie simple, le théorème montre que tout endomorphisme est un automorphisme, sauf si  $X$  est un espace projectif. En particulier, les quadriques de dimension  $d \geq 3$  et les Grassmanniennes qui ne sont pas des espaces projectifs ne possèdent aucun endomorphisme de degré topologique strictement supérieur

à 1. Afin de présenter quelques-unes des idées qui peuvent être employées pour démontrer ce théorème, nous en donnons une preuve pour  $\mathbb{G}(1,3)$ , la Grassmannienne des droites de  $\mathbb{P}^3$ . C'est un cas particulier intéressant car il s'agit à la fois d'une quadrique et de la plus petite Grassmannienne qui ne soit pas un espace projectif.

*Démonstration pour  $\mathbb{G}(1,3)$ .* Commençons par introduire quelques notations standards. L'élément  $d$  de  $\mathbb{G}(1,3)$  et la droite  $d \subset \mathbb{P}^3$  qui lui correspond seront systématiquement identifiés. Soit  $p_0$  un point et  $H_0$  un plan de  $\mathbb{P}^3$ . On pose alors :

$$W_{2,0}(p_0) = \{d \in \mathbb{G}(1,3) \mid p_0 \in d\}, \quad (5.1)$$

$$W_{1,1}(H_0) = \{d \in \mathbb{G}(1,3) \mid d \subset H_0\}. \quad (5.2)$$

La classe d'homologie de chacune de ces deux variétés ne dépend pas du choix de  $p_0$  et de  $H_0$  ; elle sera donc notée  $[\sigma_{2,0}]$  (resp.  $[\sigma_{1,1}]$ ), sans référence aux choix effectués. Ces deux classes d'homologie forment une base du  $\mathbf{Z}$ -module  $H_4(\mathbb{G}(1,3), \mathbf{Z})$  qui est orthonormée pour la forme d'intersection (voir [91], §I.5). Puisque la classe d'homologie de toute sous-variété complexe de dimension 2 dans  $\mathbb{G}(1,3)$  doit couper  $[\sigma_{2,0}]$  et  $[\sigma_{1,1}]$  positivement, l'ensemble décrit par ces classes d'homologie coïncide avec le cadran  $\mathbf{N} \cdot [\sigma_{2,0}] + \mathbf{N} \cdot [\sigma_{1,1}]$ .

**Lemme 5.14.** *Soit  $S$  une sous-variété complexe de  $\mathbb{G}(1,3)$  de dimension 2. Supposons que cette surface est irréductible et réduite et qu'il existe un entier  $m$  strictement positif tel que  $[S] = m[\sigma_{1,1}]$ . Il existe alors un plan  $H$  dans  $\mathbb{P}^3$  tel que  $S = W_{1,1}(H)$ . En particulier,  $m$  est égal à 1.*

C'est le point-clef : la présence d'une telle classe d'homologie est un phénomène qui n'apparaît évidemment pas pour les espaces projectifs.

*Démonstration du lemme.* Soit  $S$  comme dans l'énoncé et  $V(S)$  la sous-variété de  $\mathbb{P}^3$  balayée par les droites de  $S$  :

$$V(S) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \exists d \in S, x \in d\}. \quad (5.3)$$

Comme  $[S]$  est proportionnelle à  $[\sigma_{1,1}]$ , le nombre d'intersection  $[S] \cdot [\sigma_{2,0}]$  est nul, ce qui signifie qu'un point générique de  $\mathbb{P}^3$  n'appartient pas à  $V(S)$ . La variété  $V(S)$  est donc une surface, qui est irréductible car  $S$  l'est. Pour

conclure, il suffit de remarquer qu'une hypersurface irréductible de  $\mathbb{P}^3$  balayée par une famille à deux paramètres de droites est un plan, puis de poser  $H = V(S)$ .  $\square$

Soit  $f : \mathbb{G}(1,3) \rightarrow \mathbb{G}(1,3)$  un endomorphisme et  $\delta$  son degré topologique : pour montrer que  $f$  est un automorphisme, nous allons montrer que  $\delta$  est égal à 1.

Notons  $f_*$  la transformation linéaire de  $H_4(\mathbb{G}(1,3), \mathbf{Z})$  associée à  $f$ . Le caractère holomorphe de  $f$  montre que  $f_*$  préserve le cadran  $\mathbf{N}.[\sigma_{2,0}] + \mathbf{N}.[\sigma_{1,1}]$ . Mais  $f_*$  est une similitude de  $H_4(\mathbb{G}(1,3), \mathbf{R})$  pour la forme d'intersection, donc  $f_*$  ou  $f_*^2$  est une homothétie. En particulier,  $f_*^2[\sigma_{1,1}]$  est un multiple de  $[\sigma_{1,1}]$ .

Si  $H$  est un plan générique de  $\mathbb{P}^3$ , la surface  $f^2(W_{1,1}(H))$  est une surface irréductible de  $\mathbb{G}(1,3)$ . D'après le lemme 5.14, elle coïncide donc avec la surface  $W_{1,1}(\Psi(H))$  associée à un autre plan  $\Psi(H)$ . Ceci détermine une application holomorphe  $\Psi : (\mathbb{P}^3)^* \rightarrow (\mathbb{P}^3)^*$ .

Montrons que  $\Psi$  envoie droite sur droite : si  $d$  est une droite de  $\mathbb{P}^3$  et  $H$  est un plan qui contient  $d$ , alors  $W_{1,1}(H)$  contient le point de  $\mathbb{G}(1,3)$  correspondant à la droite  $d$ , et réciproquement ; la droite de  $(\mathbb{P}^3)^*$  constituée des plans contenant  $d$  est donc envoyée par  $\Psi$  sur la droite des plans contenant  $f(d)$ .

Puisqu'elle envoie droite sur droite, l'application  $\Psi$  est de degré 1. Ceci entraîne que  $f$  est de degré 1 car l'image réciproque d'un point  $d$  de  $\mathbb{G}(1,3)$  doit coïncider avec la droite  $\Psi^{-1}(d)$ .  $\square$

**Remarque 5.15.** Cette preuve ne s'applique pas pour la quadrique lisse de dimension 3. Pour une preuve dans le cas général, nous renvoyons le lecteur à [130] et, pour le cas des quadriques, à [2].

#### 5.4.3. Cas général.

D'après un théorème de BOREL et REMMERT, toutes les variétés homogènes kählériennes compactes sont isomorphes au produit d'un tore  $T$  par une variété de drapeaux  $Q$ . Puisque la projection de  $T \times Q$  sur  $T$  coïncide avec le morphisme d'Albanese, ses fibres sont permutées par tout endomorphisme. Si  $f : T \times Q \rightarrow T \times Q$  est une application holomorphe surjective, on peut donc l'écrire sous la forme

$$f(t, q) = (a(t), g_t(q)), \quad (5.4)$$

où  $a$  est un endomorphisme de  $T$  et  $t \mapsto g_t$  est une application holomorphe à valeurs dans les endomorphismes de  $Q$ . Quitte à remplacer  $f$  par l'un de ses itérés, le théorème 5.13 et la connexité de  $T$  permettent de supposer que  $g_t$  est à valeurs dans :

- (i) les endomorphismes d'un certain degré d'un espace projectif, ou
- (ii) la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une variété de drapeaux.

Chacun de ces ensembles est égal au complémentaire d'une famille non vide d'hypersurfaces dans un espace projectif. L'application  $t \mapsto g_t$  doit donc être constante. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 5.16.** *Soit  $T$  un tore et  $Q$  une variété de drapeaux. Les endomorphismes de  $T \times Q$  sont tous du type  $(t, q) \mapsto (a(t), g(q))$  où  $a$  est un endomorphisme de  $T$  et  $g$  est un endomorphisme de  $Q$ .*

Ceci termine la preuve du théorème 5.12 lorsque la variété homogène est kählérienne. Pour le cas général, l'outil supplémentaire principal est la fibration de TITS : il s'agit d'une nouvelle fibration invariante par tout endomorphisme (voir [44]).

## 6. GROS GROUPES D'AUTOMORPHISMES

Au lieu de chercher les variétés qui possèdent une transformation rationnelle dont la dynamique est riche, on peut aussi s'intéresser à l'existence d'un gros groupe de transformations. Une façon de préciser cette question est de restreindre l'étude aux réseaux des groupes de LIE réels simples. Par définition, un réseau d'un groupe de LIE  $G$  est un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  tel que  $G/\Gamma$  soit de volume fini pour la mesure de HAAR de  $G$ . Par exemple le groupe  $SL_n(\mathbf{Z})$  est un réseau de  $SL(n, \mathbf{R})$ , ce qui est déjà un résultat non trivial (voir [32]). La taille d'un réseau peut-être mesurée par le rang du groupe de LIE  $G$ . Nous ne définirons pas le rang ici (voir [33]); signalons seulement que le rang de  $SL(n, \mathbf{R})$  est égal à  $n - 1$  et que le rang de  $SO(p, q)$  est  $\min(p, q)$ . D'une certaine manière, plus le rang réel du groupe de LIE est grand, plus le réseau est gros et plus il lui est difficile d'agir sur des variétés petites. Ce principe se concrétise dans l'un des résultats de MARGULIS : *si  $\Gamma$  est un réseau d'un groupe de LIE réel simple  $G$  de rang  $r \geq 2$  et si  $\Gamma$  agit linéairement et fidèlement sur un espace vectoriel réel de dimension  $k$ , alors  $k > r$ .*

Une conjecture importante formulée par ZIMMER vise à étendre ce principe aux actions non linéaires. En voici une version simple.

**Conjecture (ZIMMER)** : Soit  $G$  un groupe de LIE réel simple (connexe) et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . S'il existe un morphisme d'image infinie de  $\Gamma$  dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte  $M$ , le rang réel de  $G$  est inférieur ou égal à la dimension de  $M$ .

Il convient de noter que cette conjecture concerne les actions par difféomorphismes, ou plus généralement par homéomorphismes, sur les variétés réelles compactes. On peut toutefois l'étudier d'abord pour les actions holomorphes sur les variétés complexes compactes kählériennes. Nous allons voir qu'on dispose de résultats satisfaisants dans ce cadre. Auparavant, signalons toutefois que la conjecture de ZIMMER admet une réponse positive lorsque la variété  $M$  est de dimension 1 (voir [88, 87, 128, 150]) ou lorsque  $M$  est une surface, lorsque l'action du réseau est supposée préserver l'aire, et lorsque de surcroît le réseau n'est pas cocompact (voir [107, 133, 81]).

### 6.1. Automorphismes des variétés complexes compactes.

Soit  $M$  une variété complexe compacte. Le théorème de BOCHNER et MONTGOMERY affirme que, muni de la topologie de la convergence uniforme, le groupe  $\text{Aut}(M)$  est un groupe de LIE complexe dont l'algèbre de LIE est l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$ . Il s'agit donc d'un groupe de dimension finie, mais qui peut avoir une infinité de composantes connexes, comme le montrent les exemples 7.1 et 8.3.

Lorsque  $M$  est kählérienne, la composante neutre  $\text{Aut}(M)^0$  est décrite par deux théorèmes de LIEBERMAN (voir [114]). Tout d'abord,  $\text{Aut}(M)^0$  est un sous-groupe d'indice fini dans le noyau de la représentation linéaire

$$\begin{aligned} \text{Aut}(M) &\rightarrow \text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z})) \\ f &\mapsto f^*. \end{aligned}$$

En particulier, le groupe  $\text{Aut}(M)^\sharp = \text{Aut}(M)/\text{Aut}(M)^0$  s'injecte presque dans le groupe linéaire  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z}))$ .

Notons  $a_M : M \rightarrow \text{Alb}(M)$  le morphisme d'ALBANESE. Pour tout élément  $g$  de  $\text{Aut}(M)^0$  il existe une translation  $\tau(g)$  de  $\text{Alb}(M)$  pour laquelle

$$a_M \circ g = \tau(g) \circ a_M.$$

D'après [114], ceci détermine un morphisme

$$\tau : \text{Aut}(M)^0 \rightarrow \text{Alb}(M)$$

dont le noyau est un groupe algébrique complexe linéaire.

Tout ceci montre que le groupe des automorphismes d'une variété complexe compacte kählérienne peut être étudié à l'aide des outils disponibles pour étudier les groupes linéaires. Si l'on veut borner la taille d'un groupe agissant holomorphiquement sur une variété compacte kählérienne  $M$ , il suffit donc de maîtriser les actions possibles sur la cohomologie de  $M$ . C'est ce que permet le résultat suivant.

**Théorème 6.1** ([47], [65]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne.*

- *Si  $A$  est un sous-groupe abélien libre de  $\text{Aut}(M)$  dont tous les éléments distincts de l'identité ont une entropie positive, le rang de  $A$  est strictement inférieur à la dimension (complexe) de  $M$ .*
- *Si  $\Gamma$  est un réseau d'un groupe de LIE réel simple de rang réel  $r$ , et si  $r$  majore strictement la dimension de  $M$ , tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(M)$  a une image finie.*

Ainsi, toute action holomorphe du groupe  $SL_n(\mathbf{Z})$  sur une variété complexe compacte kählérienne de dimension inférieure à  $n - 1$  strictement transite par l'action d'un groupe fini. Ceci conforte le principe suivant lequel de gros groupes ne peuvent agir sur des variétés trop petites.

Récemment, Kenji Oguiso, De-Qi Zhang, et leurs co-auteurs se sont également intéressés aux sous-groupes nilpotents de  $\text{Aut}(M)$  et obtiennent des bornes sur le groupe dérivé des groupes nilpotents qui contiennent des automorphismes avec une entropie positive. Nous renvoyons le lecteur à [152] et aux références qui s'y trouvent pour des compléments.

## 6.2. Transformations birationnelles.

La situation est bien plus délicate pour ce qui concerne les groupes de transformations birationnelles. Par exemple, bien qu'ils soient au cœur de la géométrie algébrique, les groupes  $\text{Bir}(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}))$  sont pour l'instant très mal compris. La situation est plus simple en dimension 2, ce qui permet d'atteindre l'énoncé suivant.

**Théorème 6.2** ([59], [49]). *Soit  $\Gamma$  un réseau d'un groupe de LIE réel simple  $G$ . Soient  $S$  une surface complexe compacte kählérienne et  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Bir}(S)$  un morphisme de groupe.*

- *Si le rang réel de  $G$  est supérieur ou égal à 3, l'image de  $\rho$  est finie.*
- *Si le rang est égal à 2, ou bien l'image de  $\rho$  est finie, ou bien  $S$  est rationnelle et il existe une transformation birationnelle  $\Phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  telle que l'image du morphisme*

$$\gamma \mapsto \Phi \circ \rho(\gamma) \circ \Phi^{-1}$$

*soit contenue dans le groupe  $\text{PGL}(3, \mathbf{C})$  des automorphismes du plan projectif.*

Par exemple, toute action birationnelle de  $SL(3, \mathbf{Z})$  sur une surface est conjuguée à l'action standard par transformations homographiques sur le plan projectif, éventuellement tordue par l'isomorphisme  $A \mapsto {}^t(A^{-1})$ .

On peut également montrer que si  $f$  est une transformation birationnelle d'une surface dont le premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  est strictement positif, et si  $g$  commute avec  $f$ , alors  $f$  et  $g$  ont deux itérés communs : il existe  $k > 0$  et  $l \geq 0$  tel que  $g^k = f^l$  (éventuellement  $l = 0$ , ce qui signifie que  $g$  est d'ordre fini).

En dimension supérieure, on ne dispose pas de résultat analogue, ni pour les actions de réseaux, ni pour les actions de groupes abéliens.

## **Deuxième chapitre : exemples de transformations méromorphes**

Dans cette deuxième partie, nous présentons quelques exemples de transformations rationnelles ou holomorphes sur des variétés complexes compactes qui sont projectives ou kählériennes.

Nous commençons par le cas des tores et des exemples qui peuvent en être déduits par passages au quotient et déformation. En particulier, le paragraphe 7.2 introduit la notion d'exemples de LATTÈS et de KUMMER.

La partie 8 concerne une famille spéciale de variétés dont la dimension de KODAIRA est nulle : les variétés de CALABI-YAU. Enfin, la partie 9 traite des variétés rationnelles ou unirationnelles.

## 7. LES TORES, LEURS QUOTIENTS, LES EXEMPLES DE LATTÈS ET LES EXEMPLES DE KUMMER

### 7.1. Tores.

Si  $A$  est un tore  $\mathbf{C}^k/\Gamma$ , toute application de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  dans  $A$  se relève à  $\mathbf{C}^k$  et est donc constante, car  $\mathbf{C}^k$  ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension strictement positive. Par ailleurs, l'« image » d'un point d'indétermination par une application méromorphe entre deux variétés lisses contient toujours une copie de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  (voir le paragraphe 1.11 de [58]). En particulier, si  $f : A \dashrightarrow A$  est une transformation méromorphe de  $A$ , alors  $f$  est holomorphe et est donc revêtue par une transformation affine  $F : \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{C}^k$ . Le semi-groupe  $\text{Dom}(A)$  s'identifie donc au sous-ensemble du groupe  $\text{Aff}(\mathbf{C}^k)$  constitué des transformations affines  $F$  satisfaisant la propriété suivante

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \exists \beta \in \Gamma, \quad \forall z \in \mathbf{C}^k, \quad F(z + \gamma) = F(z) + \beta.$$

Un tore  $A$  étant donné, la description du semi-groupe  $\text{Dom}(A)$  est un problème de nature arithmétique délicat (voir [123], [89]). Lorsque  $\Gamma$  est un réseau générique, tout élément  $f$  de  $\text{Dom}(A)$  est défini par une transformation affine  $F$  dont la partie linéaire est une homothétie de rapport entier. Voici un exemple pour lequel  $\text{Dom}(A)$  contient des automorphismes à entropie strictement positive.

**Exemple 7.1. 1.-** Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbf{C}$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , toute transformation affine  $F$  de  $\mathbf{C}^k$  dont la partie linéaire est à coefficients entiers détermine un endomorphisme  $f$  du tore  $A = \mathbf{C}^k/\Lambda^k$ . Soit  $f$  une telle transformation et  $B$  la partie linéaire de  $F$ . Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont les valeurs propres de  $B$ , rangées par ordre décroissant de leur module, alors

$$\lambda_p(f) = \prod_{i=1}^p |\alpha_i|^2.$$

**2.-** Si l'on choisit pour  $\Lambda$  un réseau particulier, par exemple  $\Lambda = \mathbf{Z}[i]$  ou  $\mathbf{Z}[j]$ , on peut enrichir le semi-groupe  $\text{Dom}(A)$ . Ainsi, dans le cas des entiers de GAUSS, le groupe  $\text{SL}(k, \mathbf{Z}[i])$  s'injecte dans le groupe des automorphismes de  $A$ .

## 7.2. Quotients.

Une fois qu'on dispose de transformations méromorphes, on peut en construire d'autres en utilisant les trois mots-clé suivants : produit, quotient et déformation. Rappelons qu'une surface de KUMMER (au sens classique du terme) est une surface  $X$  obtenue en quotientant un tore  $\mathbf{C}^2/\Gamma$  par l'involution  $\sigma(x,y) = (-x, -y)$ . Plus généralement, nous appellerons variété de KUMMER toute variété complexe compacte obtenue en quotientant un tore par un groupe fini. La définition suivante étend cette dénomination aux transformations méromorphes construites à partir de tels quotients.

**Définition 7.2.** Soit  $f$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte  $M$ . Nous dirons que  $f$  est un exemple de KUMMER s'il existe un tore complexe compact  $A$ , un groupe fini  $G$  d'automorphismes de  $A$  et un endomorphisme affine  $F$  de  $A$  tels que

- (1)  $F$  passe au quotient en un endomorphisme  $\bar{F}$  du quotient  $A/G$  ;
- (2) il existe une transformation birationnelle  $\pi : M \dashrightarrow A/G$  telle que  $\pi \circ f = \bar{F} \circ \pi$ .

Nous dirons que  $f$  est un exemple de LATTÈS si les modules des valeurs propres de la partie linéaire de  $F$  sont égaux entre eux et strictement supérieurs à 1.

**Exemple 7.3.** Commençons par rappeler le cas de la dimension 1, bien connu des dynamiciens (voir [122] pour les détails). Si une courbe possède un exemple de LATTÈS, le genre de cette courbe est égal à 0 ou 1. Pour construire un exemple de LATTÈS sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , on se donne une courbe elliptique  $E$ , un groupe fini cyclique non trivial  $G$  d'automorphismes de  $E$  fixant un point base  $e$  et une transformation affine  $F : E \rightarrow E$  qui commute à  $G$ . Le cardinal de  $G$  est alors égal à 2, 3, 4 ou 6, la courbe  $E/G$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et  $F$  passe au quotient en un exemple de LATTÈS  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

Plus précisément, il existe une unique structure d'orbifold sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  avec des points coniques situés sur l'ensemble post-critique de  $f$  pour laquelle  $f$  devient un endomorphisme d'orbifold. Les listes d'indices sur l'ensemble post-critique valent  $\{2, 2, 2, 2\}$ ,  $\{3, 3, 3\}$ ,  $\{2, 4, 4\}$  ou  $\{2, 3, 6\}$  ; le revêtement de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié aux trois ou quatre points de l'ensemble post-critique de  $f$  avec la liste d'indices de ramification ainsi prescrite

coïncide avec  $E$ . L'endomorphisme  $f$  détermine donc l'application  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , le groupe  $G$  et la transformation affine  $F$ .

On remarquera que, en dimension 1, la distinction entre exemples de KUMMER et exemples de LATTÈS n'a pas lieu d'être car tout exemple de KUMMER dont le degré topologique est strictement supérieur à 1 est un exemple de LATTÈS.

**Exemple 7.4.** Soit  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  un exemple de LATTÈS de dimension 1. L'action diagonale de  $f$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})^k$  détermine un exemple de LATTÈS de dimension  $k$  qui commute à l'action du groupe symétrique  $S_k$  par permutation des coordonnées. Passant au quotient, nous obtenons un exemple de LATTÈS sur  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  (voir [75] et [145, 146] pour des formules explicites et une étude de ces exemples).

Les deux exemples précédents déterminent des endomorphismes d'une variété lisse, l'espace projectif. Dans les exemples qui suivent, la variété quotient est singulière. Les endomorphismes construits peuvent alors être considérés, au choix, comme des endomorphismes d'orbifolds ou des transformations méromorphes de variétés lisses après désingularisation de la variété quotient.

**Exemple 7.5.**

**1.-** Soient  $A = \mathbf{C}^k/\Gamma$  un tore complexe compact et  $\sigma$  l'involution  $a \mapsto -a$ . Soient  $B$  un endomorphisme linéaire de  $\mathbf{C}^k$  qui préserve le réseau  $\Gamma$  et  $f$  l'endomorphisme de  $A$  déterminé par  $B$ . Puisque  $f$  commute avec  $\sigma$ , il est possible de passer au quotient sur la variété de KUMMER  $A/\sigma$ . Ceci détermine une transformation méromorphe de la variété de KUMMER désingularisée. L'application  $f$  détermine un exemple de LATTÈS lorsque toutes les valeurs propres de  $B$  ont même module.

**2.-** Plaçons nous en dimension 2, et choisissons pour  $\Gamma$  un réseau produit  $\Lambda \times \Lambda$ . Les trois endomorphismes linéaires de  $\mathbf{C}^2$  définis par

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B_b = \begin{pmatrix} b & 3 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B_c = c \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers non nuls déterminent ainsi des endomorphismes de KUMMER de  $A/\sigma$ . Les transformations associées à  $B_a$  et  $B_b$  sont des exemples de LATTÈS lorsque  $a$  et  $b$  sont supérieurs ou égaux à 2, mais celles associées à  $B_c$  n'en sont pas.

**Exemple 7.6** (voir [27], [28], [9]). Soient  $C$  une courbe elliptique,  $A$  le tore  $C \times C$  et  $\Phi$  un endomorphisme de  $A$  induit par une homothétie de  $\mathbf{C}^2$ . Soit  $\eta$  la transformation d'ordre 3 définie par  $\eta(x, y) = (y, -x - y)$ . La surface  $A/\eta$  est une surface K3 avec neuf singularités cuspidales localement isomorphes à la singularité  $uv = w^3$ . L'endomorphisme  $\Phi$  détermine une transformation rationnelle de la désingularisée de  $A/\eta$  pour laquelle  $d_t(\Phi) = \lambda_1(\Phi)^2$ .

Voici une construction alternative de  $A/\eta$  en se donnant  $C$  comme cubique lisse du plan projectif : la courbe duale de  $C$  est une sextique  $C'$  possédant neuf cusps, un par point d'inflexion de  $C$ . Le revêtement double du plan projectif dual ramifié le long de  $C'$  est isomorphe à  $A/\eta$ . Les surfaces K3 possèdent au plus neuf singularités cuspidales ; celles qui en possèdent exactement neuf sont toutes obtenues de la sorte (voir [9]).

### 7.3. Déformations.

Nous allons ici décrire le cas particulier des variétés de KUMMER du type  $A/\sigma$  où  $A = \mathbf{C}^k/\Gamma$  est un tore de dimension  $k$  et  $\sigma(a) = -a$ . Nous noterons  $X$  la variété de KUMMER  $A/\sigma$  désingularisée.

En dimension 1,  $X$  est la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Toute déformation de  $X$  est donc triviale. Par contre, les exemples de LATTÈS construits sur  $X$  peuvent être déformés au sein de  $\text{End}(X)$  en des endomorphismes de  $X$  qui ne sont plus des exemples de LATTÈS.

À partir de la dimension 2, la variété  $X$  ne possède aucun champ de vecteurs holomorphe non nul. Il est donc impossible de déformer une transformation méromorphe dominante de  $X$  sans déformer simultanément la structure complexe de  $X$ .

En dimension 2, la surface  $X$  est une surface K3 et peut être déformée en d'autres surfaces K3 qui ne sont plus des surfaces de KUMMER, mais ce phénomène est propre à la dimension 2 et s'arrête dès la dimension 3 ; comme l'écrit SCHLESSINGER dans [137], « one cannot parody the construction of KUMMER varieties, in dimension higher than 2, to obtain examples of smooth projective varieties with interesting deformation theories. For, if  $A$  is an abelian variety of dimension  $\geq 2$ , and  $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  acts on  $A$  by  $a \mapsto -a$ , then the deformations of the singular points of  $A/G$  account entirely for the difference between the deformation theory of  $A$  and that

of the KUMMER variety  $K$  obtained by desingularizing  $A/G$ . If  $\dim A = 2$ , then the sixteen singular points of  $A/G$  are conical  $z^2 = xy$ , with one parameter family  $z^2 = xy + t$  of deformations. Thus  $K$  has more moduli than  $A$  does (16 more), but only in dimension 2 ».

À partir de la dimension 3, la situation est donc totalement rigide : on ne peut déformer ni  $X$  ni ses transformations méromorphes dominantes.

Revenons donc au cas des surfaces. Lorsqu'on déforme  $X$  en une famille  $X_\varepsilon$ , il est parfois possible de suivre une transformation méromorphe de  $X$  le long de la déformation, ce qui donne une famille de transformations méromorphes  $f_\varepsilon : X_\varepsilon \dashrightarrow X_\varepsilon$ . Au paragraphe 8.2, nous donnerons un exemple explicite de telles déformations. Remarquons dès à présent que les degrés dynamiques de  $f_\varepsilon$  peuvent varier discontinûment avec  $\varepsilon$ . Nous verrons par exemple au paragraphe 11.3.4 que les exemples de LATTÈS des surfaces K3 sont caractérisés par la relation  $\lambda_1(f)^2 = \lambda_2(f) > 1$  : cette relation disparaît donc par petite déformation.

## 8. SURFACES K3 ET VARIÉTÉS DE CALABI-YAU

### 8.1. Variétés de CALABI-YAU.

Les variétés de CALABI-YAU sont les variétés complexes compactes kählériennes  $M$  dont le fibré canonique est trivial : elles possèdent donc une forme volume holomorphe

$$\Omega = h(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

qui ne s'annule pas ( $k = \dim_{\mathbb{C}}(M)$ ). Si l'on impose à  $\Omega$  la relation

$$(i)^{k^2} \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1,$$

la forme volume  $(i)^{k^2} \Omega \wedge \bar{\Omega}$  est uniquement déterminée par la structure complexe de  $M$ . Elle est alors invariante par toute transformation méromorphe dominante de  $M : \forall f \in \text{Dom}(M)$ ,

$$f^*(\Omega \wedge \bar{\Omega}) = \deg_{\text{top}}(f) \Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

Les variétés de CALABI-YAU constituent l'exemple le plus naturel de variétés à dimension de KODAIRA nulle. Les tores en font partie. Une deuxième sous-famille est constituée des variétés symplectiques : ce sont celles qui possèdent une 2-forme holomorphe  $\omega$  (fermée car la variété est kählérienne) partout non dégénérée, ce qui signifie que la forme

$$\Omega = \omega^{k/2}$$

est une forme volume partout non nulle sur  $M$ .

**Théorème 8.1** (Bogomolov, Yau, voir [10]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne dont la première classe de CHERN est de torsion. Il existe un revêtement fini  $M'$  de  $M$  qui est isomorphe au produit  $A \times V \times X$  où*

- $A$  est un tore  $\mathbb{C}^{n_1}/\Gamma$  ;
- $V$  est un produit  $\prod_{i=1}^{n_2} V_i$  où chaque  $V_i$  est une variété de CALABI-YAU simplement connexe satisfaisant  $H^0(V_i, \Omega_{V_i}^p) = 0$  si  $0 < p < \dim(V_i)$  ;
- $X$  est un produit  $\prod_{j=1}^{n_3} X_j$  de variétés symplectiques simplement connexes.

Chaque transformation méromorphe dominante  $f$  de  $M$  admet un itéré  $f^l$ ,  $l > 0$ , qui se relève en une transformation méromorphe de  $M'$  préservant chacun des facteurs de la décomposition (voir la démonstration de la proposition 5.5). Il suffit donc d'étudier les variétés de CALABI-YAU irréductibles (celles pour lesquelles la décomposition fournie par le théorème précédent se réduit à un seul facteur). Puisque le cas des tores a déjà été étudié, il convient maintenant de donner des exemples sur les variétés symplectiques et les variétés de CALABI-YAU simplement connexes avec  $H^0(V, \Omega_V^p) = 0$  si  $0 < p < \dim_{\mathbb{C}}(V)$ .

Il n'y a pas d'exemple en dimension 1 puisque la seule courbe simplement connexe est la sphère de RIEMANN, dont le fibré canonique est négatif. En dimension 2, les seules surfaces simplement connexes à fibré canonique trivial sont les surfaces K3. Elles sont toutes kählériennes et forment une famille à 20 paramètres. Les surfaces K3 projectives correspondent à une union dénombrable dense d'hypersurfaces dans cet espace de module connexe (voir [8]).

## 8.2. Automorphismes des surfaces K3.

Nous avons déjà vu des exemples d'automorphismes sur certaines surfaces K3 : si  $A$  est un tore de dimension 2 la surface de KUMMER obtenue en désingularisant le quotient de  $A$  par l'involution  $\sigma : a \mapsto -a$  est une surface K3. Lorsque  $A$  possède des automorphismes qui commutent avec cette involution, ceci détermine des automorphismes de la surface de KUMMER. Dans ce paragraphe, nous allons décrire deux variations liées à cet exemple.

**Exemple 8.2** (KEUM, voir aussi le §11.3.4). D'après les travaux de KEUM et de KONDO, la plupart des surfaces de KUMMER  $X = A/\sigma$  possèdent des automorphismes qui ont une entropie strictement positive et qui ne proviennent pas d'un automorphisme de  $A$  par passage au quotient (voir [109], [112], [110]).

**Exemple 8.3** (MAZUR, [117]). Déformons maintenant explicitement un exemple d'automorphisme « linéaire » sur une surface de KUMMER en un automorphisme sur une autre surface.

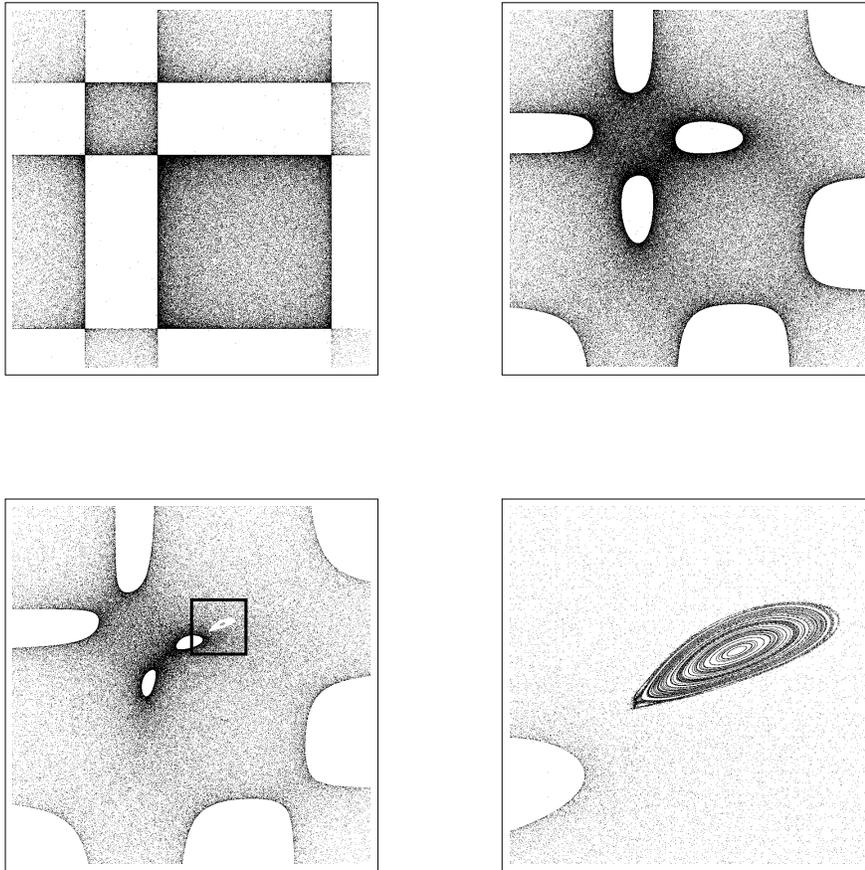


FIGURE 2. Surfaces de KUMMER et déformation : La première figure, en haut à gauche, représente l'orbite de quelques points sur une surface de KUMMER non désingularisée. Les deux figures suivantes sont des déformations de cette dynamique, avec un petit zoom de la dernière déformation montrant un point fixe elliptique.

Considérons pour cela l'ensemble des surfaces K3 lisses de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . La formule d'adjonction montre que chacune de ces surfaces est définie par une équation polynômiale  $P(x, y, z) = 0$ , où  $P$  est de degré 2 par rapport à chacune des trois variables. Si l'on projette une telle surface  $X$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  en oubliant l'une des coordonnées,  $X$  est alors réalisée comme revêtement double de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Ceci détermine trois involutions, une par revêtement, que nous noterons  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ .

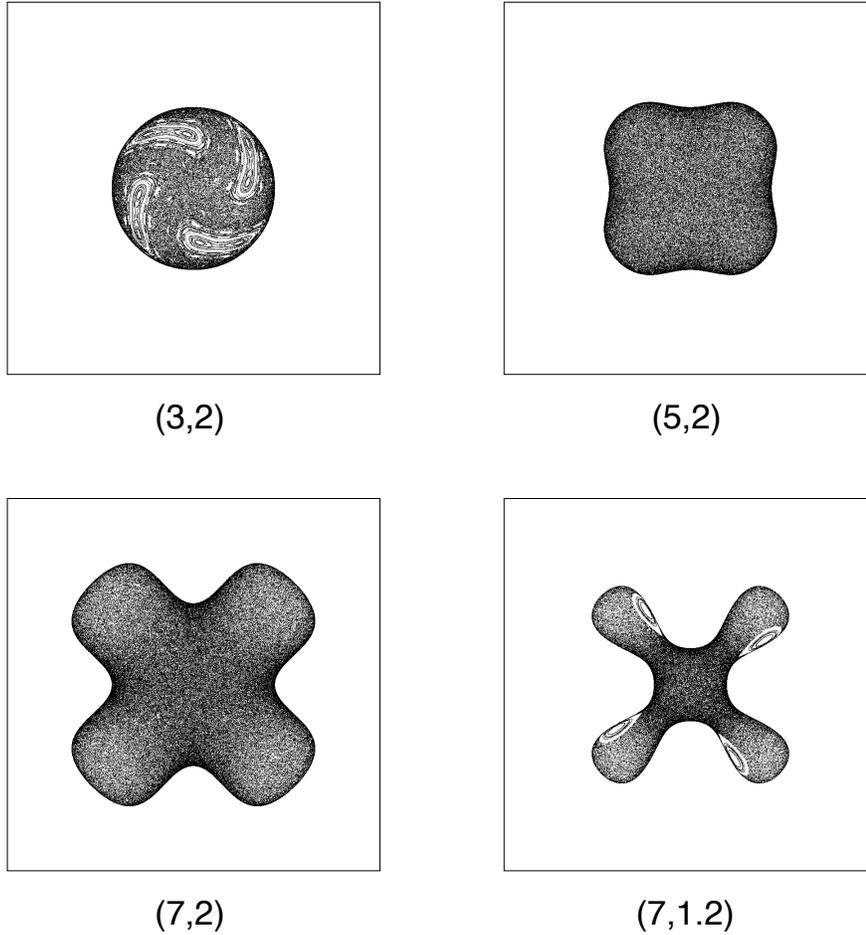


FIGURE 3. Orbits sur des surfaces réelles : Quatre exemples de dynamiques sur la surface d'équation  $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + Axyz = B$  où les paramètres  $(A, B)$  sont précisés.

Il se trouve que pour un choix générique de l'équation  $P$ , le groupe d'automorphismes de  $X$  coïncide avec le produit libre des groupes engendrés par ces involutions :

$$\text{Aut}(X) = \langle \sigma_x \rangle * \langle \sigma_y \rangle * \langle \sigma_z \rangle = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

L'action de chaque involution sur la cohomologie de  $X$  est facile à évaluer et l'on obtient ainsi des automorphismes dont on sait explicitement calculer les degrés dynamiques. Par exemple, l'entropie de  $f = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_z$  est égale à  $\log(9 + 4\sqrt{5})$ .

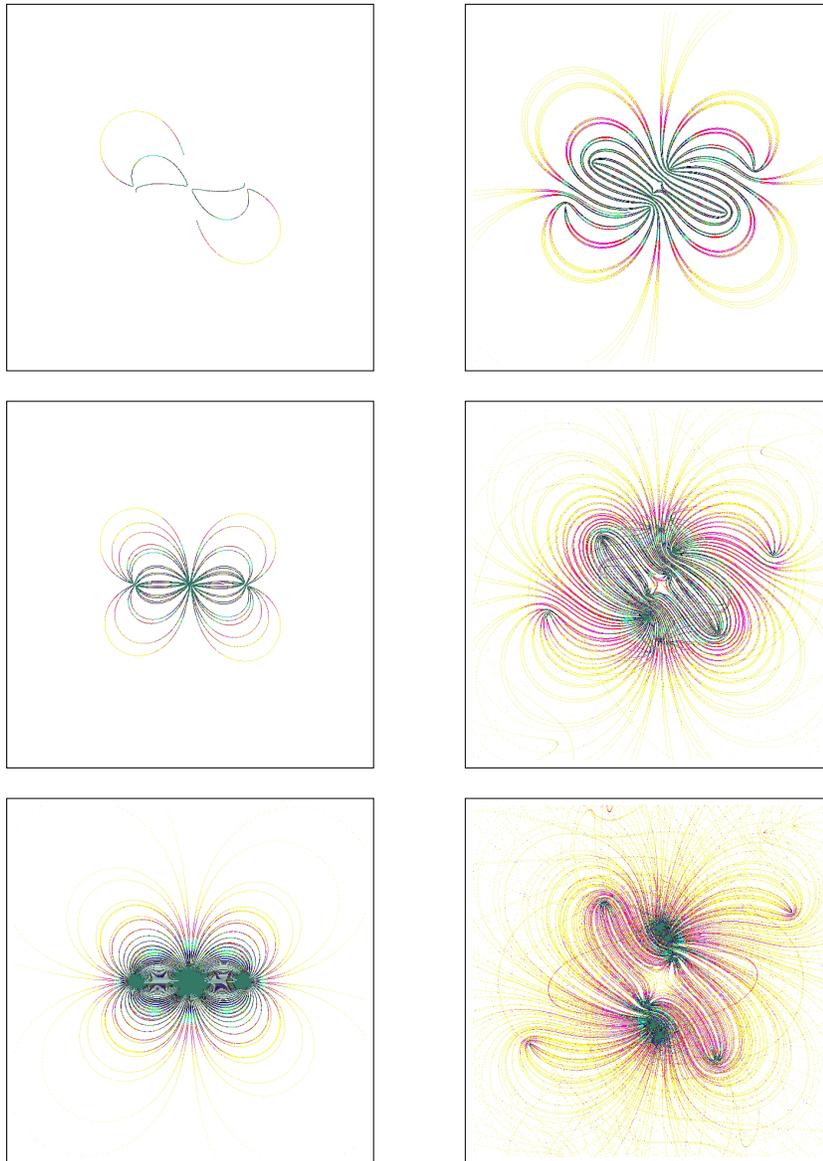


FIGURE 4. Projections d'orbites complexes sur l'axe des  $x$  : Colonne de gauche : une seule orbite sur la surface d'équation  $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + Axyz = B$  pour  $A = 0.1$  et  $B = 1$ . Le nombre d'itérations est égal à 10 mille, 100 mille ou 500 mille. Colonne de droites : plusieurs orbites distinctes sur la même surface.

Considérons maintenant une cubique plane lisse  $C$  écrite sous sa forme de WEIERSTRASS

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

À chaque paire de points  $m_1 = (x_1, y_1), m_2 = (x_2, y_2)$  de  $C$  faisons correspondre la somme

$$m_3 = m_1 + m_2 = (x_3, y_3)$$

pour la loi de groupe sur  $C$  puis le triplet  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . Ceci détermine une application holomorphe de  $C \times C$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . L'image est la surface de KUMMER (singulière)  $(C \times C)/\sigma$  où  $\sigma$  est le passage à l'inverse. L'équation de la surface ainsi obtenue dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$  est

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \frac{g_2}{2}(xy + yz + zx) + g_3(x + y + z) + \frac{g_2^2}{16} = 2xyz(x + y + z).$$

Cette surface est donc de degré 2 par rapport à chaque variable et l'on peut y définir les trois involutions  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Par ailleurs, le groupe  $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$  agit sur  $C \times C$  linéairement (voir l'exemple 7.1) et, comme il n'y a pas de miracle, les transformations involutives  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$  sont induites respectivement par les involutions linéaires

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de déformer explicitement les exemples linéaires de certaines surfaces de KUMMER en des automorphismes non linéaires. Les figures 2, 3 et 4 fournissent quelques simulations numériques obtenues par cette méthode. Elles ont été obtenues à l'aide d'un programme de McMULLEN développé par CRAMPON, PIT et moi-même.

### 8.3. Transformations rationnelles des surfaces K3.

Nous allons maintenant construire quelques transformations rationnelles sur des surfaces K3 et calculer leurs degrés dynamiques mais, auparavant, rappelons qu'une surface K3 ne possède pas d'endomorphisme holomorphe de degré strictement supérieur à 1 : un tel endomorphisme serait un revêtement non ramifié d'une variété simplement connexe (voir 3.7).

Remarquons tout d'abord que si  $E$  est une courbe de genre 1 avec  $k$  points marqués ( $k > 1$ ), on peut définir la multiplication par  $k + 1$  (il suffit de placer l'origine de  $E$  au barycentre des  $k$  points : cela laisse  $k^2$  choix pour ce barycentre, mais la multiplication par  $k + 1$  ne dépend pas de

ce choix). Donnons nous maintenant une variété complexe compacte  $M$  et une fibration elliptique  $\pi : M \rightarrow B$ . Si  $M$  contient une sous-variété  $H$  de codimension 1 qui coupe les fibres génériques de  $\pi$  en  $k$  points, avec  $k > 0$ , la multiplication par  $k + 1$  le long des fibres de  $\pi$  détermine alors une transformation méromorphe de  $M$ . Lorsque  $M$  possède plusieurs fibrations elliptiques distinctes, on peut ensuite composer ces transformations méromorphes entre elles.

Considérons l'exemple d'une hypersurface lisse  $X$  de degré  $(2, 2, 2)$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . La projection de  $X$  sur l'un des  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  détermine une fibration elliptique qui possède des sections doubles. On peut donc définir la multiplication par  $3^q$  (pour tout  $q$ ) le long des trois fibrations ainsi déterminées, puis composer ces transformations rationnelles ensemble. Lorsque  $X$  est choisie de manière générique parmi les surfaces K3 de degré  $(2, 2, 2)$ , les transformations rationnelles ainsi construites *ne sont pas* cohomologiquement dilatantes : ces exemples sont des déformations des transformations linéaires sur les surfaces de KUMMER singulières construites au paragraphe 7.2. Parmi celles-ci, certaines sont cohomologiquement dilatantes, mais cette propriété est perdue par petite déformation car les degrés dynamiques ne varient que semi-continûment.

Considérons un second exemple plus simple. Soit  $X$  un revêtement double de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié le long d'une courbe de bidegré  $(4, 4)$ . Il s'agit d'une surface K3 munie de deux fibrations elliptiques, issues des deux fibrations de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Si la courbe de ramification est générique, toute courbe algébrique tracée sur  $X$  est homologue à une combinaison linéaire de fibres de ces deux fibrations. Autrement dit, le groupe de NÉRON-SEVERI  $\text{NS}(X) = H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(X, \mathbf{R})$  est isomorphe à  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ . Chaque fibre d'une des deux fibrations coupe les fibres de l'autre fibration en 2 points. On peut donc définir la multiplication par 3 le long de chacune des fibrations. L'action de ces deux transformations rationnelles  $f$  et  $g$  sur  $\text{NS}(X)$  correspond aux matrices  $2 \times 2$  suivantes

$$f_* = \begin{pmatrix} 9 & 135 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 135 & 9 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors sans peine que le semi-groupe engendré par ces deux transformations rationnelles ne contient pas d'élément cohomologiquement dilatant.

Les deux questions suivantes paraissent ouvertes à l'heure actuelle. Il s'agit, en termes pompeux, de déterminer les « surfaces K3 à multiplication complexe ».

**Question 8.1.** Quelles sont les surfaces K3 qui possèdent une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante ?

**Question 8.2.**<sup>2</sup> Les surfaces K3 projectives génériques possèdent-elles des transformations rationnelles dominantes de degré topologique strictement supérieur à 1 ? Par exemple, une surface quartique de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  générique possède-t-elle une telle transformation rationnelle ?

#### 8.4. Deux exemples en dimension supérieure.

L'exemple de MAZUR s'étend aux hypersurfaces de multidegré  $(2, \dots, 2)$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^{k+1}$  : ceci fournit des exemples de variétés de CALABI-YAU irréductibles avec de nombreux automorphismes et de nombreuses transformations rationnelles.

Décrivons maintenant un exemple, dû à Claire VOISIN, d'une transformation rationnelle sur une variété symplectique irréductible de dimension 4 (voir [10], [12], et [148]).

Soit  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  une surface K3 projective. Soit  $M = X^{[2]}$  le produit symétrique constitué des paires de points de  $X$ , que l'on désingularise en éclatant la diagonale dans  $X \times X$  avant de passer au quotient par l'involution  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$ . La variété  $M$  est une variété symplectique de dimension 4 projective (plongée dans un espace projectif  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ). La théorie des déformations nous apprend que  $M$  peut être déformée en une famille à 21 paramètres de variétés kählériennes symplectiques et que les déformations de  $M$  dans  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  forment un sous-espace de dimension 20 dans cet espace de déformation. Une façon de déformer  $M \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  est de déformer  $X$  elle-même en une autre surface K3 projective dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  mais ceci ne couvre qu'une hypersurface dans l'espace des déformations projectives de  $M$ . Par conséquent certaines déformations de  $M$  ne sont pas des produits symétriques.

Partons maintenant d'une hypersurface cubique lisse  $V$  dans  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ . Notons  $F(V)$  la variété qui paramètre les droites contenues dans  $V$ . Dans [12],

---

2. This question has been answered by Xi Chen : a generic quartic surface in  $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$  has no non-trivial dominant rational endomorphism. (I haven't read the proof yet)

BEAUVILLE et DONAGI montrent que  $F(V)$  est une variété symplectique irréductible de dimension 4 qui est une déformation de  $X^{[2]}$ , où  $X$  est une surface K3 de degré 14 dans  $\mathbb{P}^8(\mathbf{C})$ . Plus précisément, si  $X \subset \mathbb{P}^8(\mathbf{C})$  est une telle surface K3, toute déformation projective générique de  $M = X^{[2]}$  coïncide avec l'une des variétés  $F(V)$ , où  $V$  décrit l'ensemble des hypersurfaces cubiques lisses de  $\mathbb{P}^5(\mathbf{C})$ . Ceci permet d'obtenir de manière « concrète » des variétés symplectiques de dimension 4 qui ne sont pas des produits symétriques. Lorsque la cubique  $V$  est générique, le groupe de PICARD de  $F(V)$  est de dimension 1.

Venons en à la construction de VOISIN d'une transformation rationnelle dominante  $f$  sur la variété  $F(V)$ . Soit  $l$  un point de  $F(V)$ , *i. e.* une droite de  $V$ . Si la situation est générique, il existe un unique plan  $\Pi_l$  (de dimension 2) de  $\mathbb{P}^5(\mathbf{C})$  qui est partout tangent à  $V$  le long de la droite  $l$ . Ce plan  $\Pi_l$  coupe alors  $V$  le long d'une courbe cubique constituée de  $l$ , qui compte doublement, et d'une seconde droite  $l'$ . L'application  $f$  définie par  $f(l) = l'$  détermine une application rationnelle dominante

$$f : F(V) \dashrightarrow F(V).$$

Les degrés dynamiques  $\lambda_p$  de cette application valent respectivement 1, 7, 31, 28, 16, pour  $p = 0, 1, \dots, 4$  (voir [4]). En particulier,  $f$  est cohomologiquement hyperbolique et son degré topologique est égal à 16. Cet exemple montre que, à partir de la dimension 4, il existe des variétés symplectiques dont le groupe de PICARD est de rang 1 qui admettent des transformations rationnelles de degré strictement supérieur à 1. Je ne connais pas de tel exemple sur les surfaces K3 (voir la question 8.2).

**Remarque 8.4.** Cette construction reste valable en dimension supérieure. Si  $V$  est une hypersurface cubique lisse de  $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ , la famille  $F(V)$  des  $r$ -plans contenus dans  $V$  est une variété lisse dont le fibré canonique est trivial dès que

$$n + 1 = \dim(H^0(\mathbb{P}^{r+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r+1}}(2))).$$

Si  $P$  est un  $r$ -plan de  $V$  générique, l'intersection des plans tangents à  $V$  le long de  $P$  est un  $(r + 1)$ -plan  $\Pi_P$  qui coupe  $V$  sur l'union de  $P$  et d'un second  $r$ -plan  $P'$  (qui compte avec multiplicité double) : l'application qui à  $P$  associe  $P'$  détermine une transformation rationnelle de  $F(V)$  dans elle-même de degré topologique strictement supérieur à 1.

## 9. SURFACES ET VARIÉTÉS (PRESQUE) RATIONNELLES

Il reste maintenant à donner des exemples significatifs pour des variétés dont la dimension de KODAIRA est strictement négative, en particulier pour des variétés rationnellement connexes. Dans le paragraphe 9.1 nous présentons l'exemple célèbre de MANIN et ISKOVSKIKH (voir [105] et [106]). Au paragraphe suivant, nous décrivons un problème essentiellement ouvert qui nous semble intéressant : quelles sont les surfaces rationnelles qui possèdent un groupe infini d'automorphismes ? Nous terminons alors par l'exemple des transformations monomiales.

### 9.1. Variétés unirationnelles non rationnelles.

Soit  $M$  une hypersurface quartique lisse de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ . Dans [105], ISKOVSKIKH et MANIN montrent que le groupe des transformations birationnelles de  $M$  coïncide avec le groupe de ses automorphismes (qui est fini d'après le théorème 5.1). En particulier,  $M$  n'est pas une variété rationnelle (i.e.  $M$  n'est pas birationnelle à  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ ). Cependant, on sait depuis SEGRE que certaines hypersurfaces quartiques lisses de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  sont unirationnelles : c'est le cas, par exemple, de l'hypersurface  $M_0$  d'équation

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_0x_4^3 + x_3^2x_4 = 6x_1^2x_2^2$$

Par définition de l'unirationalité, il existe une application rationnelle dominante  $p : \mathbb{P}^3(\mathbf{C}) \dashrightarrow M_0$ . Soit  $\pi : M_0 \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  la projection de  $M_0$  sur un hyperplan quelconque de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ . Pour toute transformation rationnelle dominante  $g$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ , l'application  $f = p \circ g \circ \pi$  est une application rationnelle dominante de  $M_0$ . Si  $g$  est un endomorphisme holomorphe de degré suffisamment grand, alors  $f$  est cohomologiquement dilatante ([68], remarque 8.b).

**Exercice 9.1** (tiré de [68]). On garde les notations de ce paragraphe et l'on suppose que  $g$  est un endomorphisme holomorphe de degré strictement plus grand que 1. Utiliser les résultats de [98], paragraphe 2.1, pour montrer que

- (a) le degré topologique de  $f$  est égal au produit des degrés de  $p$ , de  $\pi$  et de  $g$  ;

(b) il existe une constante  $c$  dépendant des choix de  $p$  et de  $\pi$  telle que

$$\lambda_l(f) \leq c\lambda_l(g)$$

pour tout  $l$  entre 1 et 3 ;

(c) si le degré de l'endomorphisme  $g$  est suffisamment grand, alors  $c\lambda_l(g) < \deg_{top}(g)$  pour tout  $l$  distinct de  $\dim_{\mathbf{C}}(M) = 3$  et  $f$  est une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante.

Voir le paragraphe 3.3.4 de[98] pour des compléments.

**Remarque 9.2.** Supposons que  $M$  soit maintenant une hypersurface quartique de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  avec une unique singularité  $x_0$  qui est un point double ordinaire. Une droite  $D$  passant par  $x_0$  est contenue dans  $M$  si les termes quadratique, cubique et quartique de l'équation de  $M$  au voisinage de  $x_0$  sont nuls en restriction à  $D$ . Ceci détermine  $2 \times 3 \times 4 = 24$  droites au plus. Supposons désormais que  $M$  contient exactement 24 droites distinctes passant par  $x_0$ , que nous noterons  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq 24$ .

La variété  $M$  est alors munie de 25 involutions birationnelles  $\tau_i$  définies comme suit. Si  $m$  est un point de  $M$  qui n'est pas sur l'une des droites  $L_i$  la droite joignant  $m$  à  $x_0$  coupe  $M$  en  $m$ , en  $x_0$  doublement et donc en un unique quatrième point  $\tau_0(m)$ . Ceci définit la première involution birationnelle  $\tau_0 : M \dashrightarrow M$ . Choisissons maintenant une des droites  $L_i$ . Si  $m$  est un point de  $M$  qui n'est pas situé sur  $L_i$  le plan engendré par  $m$  et  $L_i$  coupe  $M$  le long d'une courbe quartique réductible, formée de  $L_i$  et d'une courbe cubique  $C_m$  contenant  $m$  et  $x_0$ . En général,  $C_m$  est une courbe lisse de genre 1. Le point  $\tau_i(m)$  est alors le point de  $C_m$  tel que  $m + \tau_i(m) = 2x_0$  (autrement dit, pour la loi de groupe sur  $C_m$  pour laquelle l'origine est  $x_0$ ,  $\tau_i(m)$  coïncide avec l'opposé de  $m$ ). Ceci définit les 24 involutions birationnelles restantes  $\tau_i$ ,  $1 \leq i \leq 24$ .

Si  $M$  est générique parmi les quartiques de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  avec un point double, il se trouve alors que

- les 25 involutions  $\tau_i$  ne satisfont pas de relation non triviale, si bien qu'elles engendrent un sous-groupe  $H$  de  $\text{Bir}(M)$  isomorphe au produit libre de 25 copies de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,
- $\text{Bir}(M)$  est le produit semi-direct de  $H$  et du groupe fini formé des automorphismes homographiques de  $M$ .

Ceci est démontré dans [134].

**Remarque 9.3.** D'après les travaux de Clemens et Griffith's, les hypersurfaces cubiques lisses de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  ne sont pas non plus rationnelles. Les arguments précédents permettent de construire des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes sur ces hypersurfaces. Par ailleurs, le groupe des transformations birationnelles des cubiques sont toujours infinis. Chaque point  $m$  de la cubique détermine en effet une involution, qui à un point  $p$  associe le troisième point d'intersection de la droite  $(mp)$  avec la cubique. Par composition, ceci fournit des transformations birationnelles avec une dynamique intéressante.

## 9.2. Transformations holomorphes des surfaces rationnelles.

La dernière famille d'exemples que nous allons décrire concerne un problème délicat. Il s'agit de comprendre les surfaces rationnelles  $S$  qui possèdent un groupe infini d'automorphismes. Si  $\text{Aut}(S)$  contient une infinité d'éléments isotopes à l'identité, la surface  $S$  possède un champ de vecteurs holomorphes : cette situation est bien comprise (voir [36]). Dans le cas contraire, et si  $\text{Aut}(S)$  est infini, il existe des automorphismes  $f$  dont aucun itéré n'est isotope à l'identité et deux cas se produisent :

- $\lambda_1(f) = 1$  et alors  $f$  préserve une fibration elliptique ; puisque les fibrations elliptiques des surfaces rationnelles s'obtiennent toutes à partir de pinceaux d'HALPHEN, ces automorphismes sont bien compris (voir [73], [90]) ;
- $\lambda_1(f) > 1$  et l'entropie de  $f$  est strictement positive ; à l'heure actuelle, on ne sait pas déterminer les surfaces rationnelles qui possèdent de tels automorphismes.

Dans la suite, nous donnons donc quelques exemples sporadiques et présentons une construction dûe à BEDFORD, KIM, HARBOURNE et McMULLEN dans un cas particulier proche des surfaces K3. Commençons par deux exemples construits par quotient d'un tore ou d'une surface K3.

**Exemple 9.4** (KUMMER, suite de l'exemple 7.1-2). Soit  $E$  la courbe elliptique obtenue en quotientant la droite complexe  $\mathbf{C}$  par le réseau  $\Lambda$  des entiers de GAUSS  $\mathbf{Z}[i]$  (resp. des entiers d'EISENSTEIN  $\mathbf{Z}[j]$ ). Le groupe  $\text{SL}(2, \Lambda)$  agit linéairement sur  $\mathbf{C}^2$  en préservant le réseau  $\Lambda \times \Lambda$ . Par passage au quotient, tout élément  $B$  de  $\text{SL}(2, \Lambda)$  détermine donc un automorphisme  $f_B$  de la variété abélienne  $E \times E$ , qui commute avec l'homothétie  $\eta : (x, y) \rightarrow (ix, iy)$  (resp.  $(x, y) \rightarrow (jx, jy)$ ). Passant à nouveau au quotient,

puis désingularisant  $E \times E/\eta$ , nous obtenons un automorphisme  $\overline{f_B}$  d'une surface rationnelle. L'entropie de cet automorphisme est strictement positive dès que l'une des valeurs propres de  $B$  a un module strictement plus grand que 1.

**Exemple 9.5 (COBLE).** Soit  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  une courbe sextique avec 10 points doubles. Soit  $X$  la surface obtenue en éclatant ces 10 points. Si  $C$  est choisie génériquement, le groupe  $\text{Aut}(X)$  s'identifie à un sous-groupe discret et de covolume fini dans le groupe de LIE réel  $\text{SO}(1,9)$ . C'est donc un groupe infini dénombrable qui contient un groupe libre non abélien. La surface  $X$ , dénommée surface de COBLE, est le quotient d'une surface K3 par une involution qui a des points fixes. Les automorphismes de  $X$  proviennent de ceux de la surface K3 (voir [55]).

On peut construire des automorphismes de  $X$  de la façon suivante. Soit  $p$  l'un des points doubles de  $C$ . Les courbes de degré six passant doublement par les 9 points restant forment un pinceau de courbes de genre 1 : si l'on éclate les 9 points, on obtient une surface  $X_p$  et les transformées strictes de ces courbes forment les fibres d'une fibration elliptique singulière  $\pi_p : X_p \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Chacun des 9 diviseurs exceptionnels coupe la fibre générique de  $\pi_p$  en 2 points. Fixons l'un de ces diviseurs  $E_0$ . Si  $E$  est un autre diviseur, on peut alors définir un automorphisme  $f$  de  $X_p$  par translation le long des fibres de la façon suivante : si  $m$  est un point d'une fibre lisse  $F$  de  $\pi_p$ , l'image  $f(m)$  est l'unique point de  $F$  pour lequel

$$f(m) + E \cap F = m + E_0 \cap F$$

(autrement dit,  $f$  translate de la quantité  $E - E_0$  le long des fibres). Cette transformation s'étend aux fibres singulières pour déterminer un automorphisme de  $X_p$  qui satisfait  $\pi_p \circ f = \pi_p$ . Variant le choix de  $E$ , on obtient ainsi 8 automorphismes, et pour un choix générique de  $C$ , on montre que ces automorphismes engendrent un groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}^8$ . Par ailleurs, chacun de ces automorphismes fixe la fibre singulière obtenue par transformée stricte de  $C$ , et en particulier fixe le point singulier de cette fibre (i.e. le point  $p$ ). Si l'on éclate ce point, les automorphismes ainsi construits se relèvent donc à la surface de COBLE  $X$ .

Variant le choix de  $p$  parmi les 10 singularités de  $C$ , on construit ainsi 10 copies de  $\mathbf{Z}^8$  dans  $\text{Aut}(X)$ . Il se trouve que, pour un choix générique de

$C$ , les dix groupes abéliens ainsi obtenus ne satisfont pas de relation non triviale. Ainsi, le produit libre de 10 copies de  $\mathbf{Z}^8$  se plonge dans  $\text{Aut}(X)$ .

Voici maintenant deux exemples apparus récemment dans la littérature.

**Exemple 9.6** (TAKENAWA, [144]). La transformation birationnelle du plan projectif définie par

$$f[x : y : z] = [y^3 : -xy^2 + y^3 + z^3 : y^2z]$$

devient un automorphisme d'une surface rationnelle si l'on effectue successivement 15 éclatements judicieux du plan projectif. L'entropie de cet automorphisme est strictement positive.

**Exemple 9.7** (BEDFORD et KIM, MCMULLEN). Dans [16], BEDFORD et KIM se sont intéressés à la famille à deux paramètres

$$f_{a,b}(x,y) = (a + y, b + y/x).$$

La transformation birationnelle  $f_{a,b}$  éclate les sommets et contracte les côtés du triangle  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  avec  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (\infty, 0)$  et  $p_3 = (0, \infty)$ ; l'image de ce triangle est le triangle  $\Delta(p_2, p_3, p_4)$  avec  $p_4 = (a, b)$ .

Les paramètres  $(a, b)$  pour lesquels l'orbite de  $p_4$  repasse par  $p_1$  à l'instant  $n$  sont déterminés par deux équations polynomiales; l'ensemble des solutions  $(a, b) \in \mathbf{C}^2$  de ce système d'équations sera noté  $P(n)$ . BEDFORD et KIM montrent que  $f_{a,b}$  se relève en un automorphisme d'une surface rationnelle (obtenue en éclatant l'orbite de  $p_4$ ) précisément lorsque  $(a, b)$  est un élément de  $P(n)$  pour un certain  $n$ . De plus,

- lorsque  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  est périodique de période 6, 5, 8, 12, 18 ou 30,
- lorsque  $n = 6$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  préserve une fibration elliptique,
- et lorsque  $n \geq 7$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  a une entropie topologique strictement positive; celle-ci est égale au logarithme de la racine dominante de l'équation

$$t^{n+1}(t^3 - t - 1) + t^3 + t^2 - 1 = 0.$$

Ceci conduit à

- l'existence pour  $n = 7$  d'un automorphisme, l'« automorphisme de LEHMER », dont l'entropie est égale au logarithme du nombre de LEHMER  $\lambda_L = 1,1763$ ;

- l'existence d'automorphismes avec un point fixe attractif ; ces automorphismes ne proviennent donc pas d'un automorphisme d'une surface de dimension de KODAIRA positive ou nulle en effectuant un quotient fini équivariant.

Récemment, MCMULLEN a obtenu un procédé général pour construire de tels automorphismes en développant les travaux antérieurs de HARBOURNE et NAGATA. Ces automorphismes sont définis sur les surfaces rationnelles « anticanoniques » ; ce sont celles qui possèdent une unique (à un facteur multiplicatif près) 2-forme méromorphe  $\Omega$  ne s'annulant pas. La géométrie de ces surfaces ressemble en bien des points à celle des surfaces K3. Si  $f$  est un automorphisme d'une telle surface,  $f^*\Omega$  est proportionnelle à  $\Omega$ . En particulier,  $f$  préserve le lieu des pôles de  $\Omega$ . En projetant birationnellement la surface  $S$  sur le plan projectif,  $f$  détermine alors une transformation birationnelle du plan qui préserve une courbe cubique.

Les travaux de MCMULLEN permettent de construire des automorphismes sur certaines surfaces anticanoniques tout en prescrivant l'action de l'automorphisme sur les groupes de cohomologie de la surface. Il s'agit d'un théorème analogue au théorème de TORELLI pour les surfaces K3. Ceci permet de retrouver certains des exemples de BEDFORD et KIM, mais aussi de montrer les propriétés suivantes en utilisant [42], [41] :

**Théorème 9.8** (BEDFORD, KIM, MCMULLEN, [16], [120] et [15]).

- (i) *L'automorphisme de LEHMER construit par BEDFORD et KIM est un automorphisme d'entropie minimale parmi tous les automorphismes de surfaces complexes compactes d'entropie strictement positive.*
- (ii) *Il existe un automorphisme d'une surface projective rationnelle dont l'entropie est strictement positive et qui possède un domaine de SIEGEL : l'automorphisme est holomorphiquement conjugué à une rotation irrationnelle sur un ouvert de la surface.*
- (iii) *Il existe un automorphisme d'une surface rationnelle dont l'entropie est positive et dont les points périodiques s'équirépartissent vers une mesure de probabilité  $\mu_f$  étrangère à la mesure de LEBESGUE.*

Le point (iii) a été précisé par BEDFORD et KIM : on peut choisir un exemple de telle sorte que  $f$  et la surface  $S$  soient définis par des polynômes à coefficients réels et que  $\mu_f$  soit contenue dans la partie réelle  $S(\mathbf{R})$  de la

surface et soit singulière par rapport à la mesure de LEBESGUE sur  $S(\mathbf{R})$  (voir [15]).

**Remarque 9.9.**

- 1.- Nous expliquerons au paragraphe §10.3.1 quelle est la mesure de probabilité vers laquelle s'équirépartissent les points périodiques du troisième exemple.
- 2.- L'existence de domaines de SIEGEL était déjà connue depuis [118] pour des surfaces K3 non projectives.

La construction de MCMULLEN n'englobe pas tous les automorphismes construits par BEDFORD et KIM. Ainsi, certains d'entre eux ne préservent aucune courbe (et ont une entropie strictement positive). Ces automorphismes ne préservent, dilatent ou contractent donc aucune forme méromorphe  $\Omega$  (voir [15]).

**Remarque 9.10.** Soit  $X$  une surface K3 projective et  $\Omega$  une 2-forme holomorphe non nulle sur  $X$ . Si  $f$  est un automorphisme de  $X$ , alors  $f^*\Omega = \xi\Omega$  où  $\xi$  est une racine de l'unité (voir la preuve du théorème 3.2). Il y a donc des résonances entre les valeurs propres de la différentielle de  $f$  en chacun de ses points périodiques. La linéarisation de  $f$  autour de ses points périodiques est donc délicate et, pour l'instant, on ne dispose pas d'exemple de domaine de SIEGEL sur les surfaces K3 projectives. Il se pourrait tout à fait qu'aucun exemple de tel domaine n'existe.

**Exemple 9.11** (BLANC). Jérémy BLANC a également proposé une construction d'automorphismes sur les surfaces rationnelles en partant de transformations birationnelles du plan qui fixent une courbe. On peut déduire de sa construction l'existence de surfaces rationnelles  $S_n$  dont le groupe d'automorphismes contient un produit libre  $L$  de  $n$  copies de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et un sous-groupe libre de rang  $n$ ,  $L_n < L$ , dont tous les éléments distincts de l'identité ont une entropie strictement positive (voir [29]).

### 9.3. Transformations monomiales.

Les « transformations monomiales » sont les endomorphismes holomorphes du groupe multiplicatif  $(\mathbf{C}^*)^k$  : il s'agit donc de l'analogue multiplicatif des endomorphismes des tores compacts  $\mathbf{C}^k/\Gamma$ . Ceci fournit des transformations holomorphes de  $(\mathbf{C}^*)^k$  qui peuvent ensuite être considérées comme

des transformations rationnelles de compactifications de  $(\mathbf{C}^*)^k$ . En dimension 1, tout endomorphisme holomorphe du groupe  $\mathbf{C}^*$  est un monôme  $f(z) = z^d$  où  $d$  est un entier relatif. En dimension 2, toute application monomiale  $f : (\mathbf{C}^*)^2 \rightarrow (\mathbf{C}^*)^2$  est du type

$$f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice à coefficients entiers ; en particulier, les deux composantes de  $f$  sont donc des monômes. Ceci reste valable en dimension quelconque, ce qui justifie l'appellation « transformations monomiales » et montre que le monoïde des transformations monomiales de  $(\mathbf{C}^*)^k$  est isomorphe à celui des matrices à coefficients entiers  $\text{Mat}(k, \mathbf{Z})$ . Si  $A$  est une telle matrice, nous noterons  $f_A$  la transformation monomiale associée ; ainsi  $(f_A)^n = f_{A^n}$  pour tout entier  $n$  positif (ou négatif si  $A$  est inversible). Les transformations monomiales déterminent des transformations rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})^k$  qui préservent le tore  $(\mathbb{S}^1)^k$  constitués des points de  $(\mathbf{C}^*)^k$  dont les coordonnées sont de module 1 et induisent des endomorphismes lisses de ce tore compact.

En dimension 2, lorsque le déterminant de  $A$  est différent de 0, nous disposons des résultats suivants (voir [77]) :

- (i) Le degré topologique  $\lambda_2(f_A)$  est égal au déterminant de  $A$  et le premier degré dynamique  $\lambda_1(f_A)$  est égal au rayon spectral de  $A$  ; en particulier, le tore  $(\mathbb{S}^1)^k$  est totalement invariant.
- (ii) lorsque le spectre de  $A$  est réel, on peut toujours trouver une surface rationnelle  $X$  et un morphisme birationnel  $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  tel que  $f = \phi^{-1} \circ f_A \circ \phi$  soit algébriquement stable (ou 1-stable au sens de [98] ; autrement dit, l'action de  $f$  sur la cohomologie de  $X$  satisfait  $(f^*)^n = (f^n)^*$  pour tout  $n$  positif). Cette propriété n'est plus valable lorsque les valeurs propres de  $A$  sont de même module et de la forme  $\rho e^{2i\pi\theta}$  avec  $\theta$  irrationnel (dans ce cas, il y a un résonance entre les degrés dynamiques,  $\lambda_2(f_A) = \lambda_1(f_A)^2 > 1$ ).

En dimension plus grande, le lecteur pourra consulter [101] pour des résultats partiels.

**Exercice 9.12.** Soit  $A$  un élément de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ . Notons  $\lambda$  et  $1/\lambda$  les deux valeurs propres de  $A$  et supposons que le rayon spectral de  $A$  est strictement supérieur à 1 ; quitte à permuter  $\lambda$  et son inverse, nous pouvons supposer que ce rayon spectral est égal à  $|\lambda|$ .

Montrer que tout point périodique de  $f_A$  situé dans  $(\mathbf{C}^*)^2$  appartient au tore  $(\mathbb{S}^1)^2$  et que le nombre de points périodiques de période  $N$  croît comme  $|\lambda|^N$ .

**Remarque 9.13.** Par passage au quotient, les endomorphismes des tores donnent naissance aux exemples de LATTÈS et de KUMMER. Les transformations monomiales conduisent au même type de constructions (voir l'exemple 11.11).



## Troisième chapitre : Dynamique et rigidité

Le premier but de cette troisième partie est de décrire la dynamique des transformations rationnelles dans deux situations qui sont assez bien comprises au niveau ergodique : les transformations « cohomologiquement dilatantes » et les automorphismes des surfaces.

Nous ne donnerons pas de détails sur les preuves mais utiliserons les résultats obtenus pour décrire plus précisément certains liens entre géométrie complexe, dynamique holomorphe et géométrie diophantienne.

Nous verrons ensuite comment il est possible de caractériser les transformations dont la dynamique est lisse et uniforme : il s'agit de caractériser les exemples de LATTÈS et les automorphismes dont la dynamique est de type ANOSOV.

## 10. DYNAMIQUE

Dans cette partie, nous présentons quelques propriétés stochastiques satisfaites par la dynamique des transformations rationnelles des variétés projectives. Les deux classes de transformations pour lesquelles on sait montrer ces propriétés sont les transformations cohomologiquement dilatantes et les automorphismes des surfaces. Après des définitions classiques de théorie ergodique, nous décrirons chacune de ces deux familles. Le dernier paragraphe applique les idées précédentes à des questions de géométrie hyperbolique complexe et de géométrie diophantienne.

### 10.1. Mesure d'entropie maximale.

#### 10.1.1. Entropie métrique.

Soient  $X$  un espace mesurable et  $f : X \rightarrow X$  une transformation mesurable. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité invariante sous l'action de  $f$ , ce qui signifie que

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

pour toute partie mesurable  $A$  de  $X$ . L'entropie métrique de  $f$  relative à  $\mu$  est définie de la manière suivante. Pour toute partition  $\mathcal{P}$  de  $X$  en un nombre fini ou dénombrable d'atomes mesurables  $A_1, \dots, A_s, \dots$ , posons

$$h_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^s -\mu(A_j) \log(\mu(A_j)).$$

Fixons une telle partition  $\mathcal{P}$  et notons  $\mathcal{P}_n$  la partition obtenue en intersectant les atomes de  $\mathcal{P}$ ,  $f^*(\mathcal{P})$ , ...  $(f^n)^*(\mathcal{P})$ . Deux points  $x$  et  $y$  appartiennent au même atome de  $\mathcal{P}_n$  si, à chaque instant  $i$  entre 0 et  $n$ , les points  $f^i(x)$  et  $f^i(y)$  sont dans le même atome  $A_{j_i}$  de  $\mathcal{P}$ . L'entropie de  $f$  relativement à  $\mu$  et à  $\mathcal{P}$  est alors définie par

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} h_\mu(\mathcal{P}_n) \right)$$

et l'entropie métrique  $h_\mu(f)$  est le supremum de ces entropies lorsque  $\mathcal{P}$  décrit l'ensemble des partitions mesurables de  $X$  (voir [108] ou [115]). Il se trouve que

- (i) si  $f$  est une transformation continue d'un espace métrique compact (muni de la tribu des boréliens)

$$h_{\text{top}}(f) = \sup(h_\mu(f))$$

où  $\mu$  décrit l'ensemble des mesures de probabilité  $f$ -invariantes (principe variationnel de GOODMAN) ;

- (ii) si  $f$  est une transformation de classe  $C^\infty$  sur une variété compacte, ce supremum est atteint (théorème de NEWHOUSE).

Nous renvoyons le lecteur à [98], chapitre 2, pour une discussion précise des notions d'entropie lorsque l'application  $f$  est méromorphe.

### 10.1.2. Dilatation.

Lorsqu'une mesure invariante  $\mu$  a une entropie métrique strictement positive, la transformation  $f$  doit dilater certaines zones de l'ensemble  $X$ . Précisons ceci par deux résultats généraux.

Soient  $f$  une transformation continue d'un espace métrique compact  $X$  et  $\mu$  une mesure de probabilité  $f$ -invariante. Pour tout point  $x$  de  $X$  et pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, notons  $h_\mu(f, x, \varepsilon)$  la quantité

$$h_\mu(f, x, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{n} \log(\mu(B_n(x, \varepsilon))) \right)$$

où  $B_n(x, \varepsilon)$  est l'ensemble des points  $y$  de  $X$  dont l'orbite entre 0 et  $n$  reste  $\varepsilon$ -proche de  $x$  à chaque instant. Notons  $h_\mu(f, x)$  la limite de  $h_\mu(f, x, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. BRIN et KATOK ont montré que ceci détermine une fonction intégrable sur  $X$  pour laquelle

$$h_\mu(f) = \int_X h_\mu(f, x) d\mu(x).$$

Supposons que  $\mu$  est ergodique, ce qui signifie que tout ensemble mesurable invariant est de mesure nulle ou totale, ou encore que toute fonction intégrable  $f$ -invariante est constante (presque partout). Dans ce cas, la fonction  $h_\mu(f, x)$  est constante, car invariante. Si l'entropie de  $f$  vis-à-vis de  $\mu$  est strictement positive, ceci montre que les itérés de  $f$  distordent  $X$  exponentiellement vite au voisinage de  $\mu$ -presque tout point.

L'inégalité de RUELLE fournit un autre résultat allant dans le même sens. Elle majore l'entropie métrique d'une transformation  $C^1$  d'une variété compacte par l'intégrale de la somme de ses exposants de LYAPOUNOFF positifs :

$$h_\mu(f) \leq \int_M \chi^+(f, x) d\mu(x).$$

Le lecteur pourra consulter [108] ou [115] pour la définition précise des exposants de LYAPOUNOFF.

### 10.1.3. Exemples.

Donnons maintenant deux exemples qui seront repris et généralisés par la suite. Le premier exemple concerne les polynômes d'une variable complexe ; le lecteur trouvera des démonstrations pour cet exemple dans [98], chapitre 1 (voir aussi [26]).

**Exemple 10.1.** Soit  $f(z)$  un polynôme d'une variable complexe de degré  $d$ . La transformation  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  s'étend à la sphère de RIEMANN  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  en posant  $f(\infty) = \infty$  : ceci détermine une application holomorphe de degré topologique  $d$ . L'entropie topologique de  $f$  est alors égale au logarithme de  $d$  (voir le théorème 2.2). Lorsque celle-ci est strictement positive, c'est-à-dire lorsque  $d \geq 2$ ,  $f$  possède une unique mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ , qui peut être décrite de trois façons différentes. Premièrement, si  $P_n(f)$  désigne l'ensemble des points périodiques de  $f$  de période  $n$ , alors

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|P_n(f)|} \sum_{y \in P_n(f)} \delta_y \right).$$

Deuxièmement, il existe un ensemble  $\mathcal{E}(f)$  de cardinal inférieur ou égal à 2 tel que, pour tout  $x$  hors de cet ensemble,

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{d^n} \sum_{z \in f^{-n}(x)} \delta_z \right).$$

Enfin,  $\mu_f$  décrit le comportement asymptotique de la dérivée de  $f^n$  : si  $\omega$  est une forme de FUBINI-STUDY sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  dont l'aire totale vaut 1, la suite de formes différentielles

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega$$

converge vers  $\mu_f$  au sens des mesures.

**Exemple 10.2** (Applications dilatantes). Soit  $M$  une variété compacte. Un endomorphisme  $f$  de  $M$  de classe  $C^1$  est « dilatant » s'il existe une métrique riemannienne sur  $M$  et un nombre réel  $\chi$  strictement plus grand que 1 tels que

$$\|Df(v)\| \geq \chi \|v\|$$

pour tout vecteur  $v$  tangent à  $M$ . Pour une telle transformation on sait que (voir par exemple [140], [136] et [93])

- l'entropie topologique de  $f$  est strictement positive et se calcule à l'aide de l'action de  $f$  sur le groupe fondamental de  $M$  (formule analogue à celle produite par le théorème 2.2) ;
- $f$  préserve une unique mesure de probabilité  $\nu_f$  absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE de  $M$  ; si  $f$  est de classe  $C^k$ , avec  $2 \leq k \leq \infty$ , alors  $\nu_f$  est déterminée par une densité strictement positive de classe  $C^{k-1}$  ;
- $f$  admet une unique mesure d'entropie maximale, notée  $\mu_f$ , et celle-ci décrit la répartition des points périodiques et des préimages de points génériques.

En général,  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE et diffère donc de  $\nu_f$ . Pour les endomorphismes du cercle définis par

$$\tau_d(z) = z^d, \quad d \neq -1, 0, 1,$$

ces deux mesures coïncident avec la mesure de HAAR du cercle.

## 10.2. Transformations cohomologiquement dilatantes.

Soient  $M$  une variété complexe compacte kählérienne de dimension  $k$  et  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation méromorphe de  $M$  qui est cohomologiquement dilatante (voir le §2.4, définition 2.7). Rappelons que cela signifie que le degré topologique de  $f$ , noté  $d_t(f)$  ou  $\lambda_k(f)$ , majore strictement ses autres degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$ . L'exemple le plus simple de transformation méromorphe cohomologiquement dilatante est fourni par les endomorphismes (holomorphes) des espaces projectifs de degré supérieur ou égal à 2.

### 10.2.1. Ensembles critique et postcritique.

Lorsque  $f : M \rightarrow M$  est un endomorphisme holomorphe, l'ensemble critique  $\text{Crit}(f)$  est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  en lesquels la différentielle  $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$  n'est pas inversible. C'est donc le lieu d'annulation du déterminant jacobien de  $f$  ; en particulier,  $\text{Crit}(f)$  est vide ou est une hypersurface.

Dans le cas d'une transformation rationnelle, on définit  $\text{Crit}(f)$  de la façon suivante. Soit  $\Gamma_f \subset M \times M$  le graphe de  $f$ . Soit  $\pi_i : \Gamma_f \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ , les deux projections de  $\Gamma_f$  sur  $M$ , de sorte que  $\pi_1$  soit un morphisme birationnel et  $f$  coïncide avec  $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ . On pose alors  $\text{Crit}(f) = \pi_1(\text{Crit}(\pi_2))$ .

Par exemple, si le point  $p$  est contenu dans une courbe qui est contractée par  $f$  sur un point,  $p$  appartient à l'ensemble critique de  $f$ .

L'ensemble postcritique de  $f$  est l'union des images par  $f^n$  de  $\text{Crit}(f)$ . On le note  $\text{PC}(f)$  :

$$\text{PC}(f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{Crit}(f)).$$

**Remarque 10.3.** Soit  $p$  un point de  $M$ . Soit  $(\mathcal{U}_n)$  une suite décroissante de voisinages de  $p$  dont l'intersection est égale à  $\{p\}$ . Par définition, l'image de  $\mathcal{U}_n$ , notée  $f(\mathcal{U}_n)$ , est l'adhérence de  $f(\mathcal{U}_n \setminus \text{Ind}(f))$ . Notons  $d_n$  le nombre maximum d'antécédents qu'un point  $q$  de  $f(\mathcal{U}_n)$  peut posséder dans  $\mathcal{U}_n$ , et appelons degré de  $f$  en  $p$  le minimum des  $d_n$  (le degré est infini si  $p$  est contenu dans un ensemble analytique contracté) ; cette définition ne dépend pas du choix de la suite  $(\mathcal{U}_n)$ . L'ensemble critique de  $f$  coïncide alors avec l'ensemble des points  $p$  de  $M$  en lesquels le degré de  $f$  est supérieur ou égal à 2.

**Exercice 10.4.** Soit  $A = \mathbf{C}^2/\Gamma$  un tore de dimension 2 et  $\sigma : A \rightarrow A$  l'involution définie par

$$\sigma(x, y) = (-x, -y).$$

Soit  $X$  la surface de KUMMER obtenue en désingularisant  $A/\sigma$  (voir l'exemple 7.5). La multiplication par 3 sur  $A$  commute à l'action de  $\sigma$  et détermine donc par passage au quotient une transformation rationnelle  $f : X \dashrightarrow X$ . Soit  $q$  un point de torsion d'ordre 3 sur  $A$  distinct de l'origine  $(0, 0)$ . Soit  $p$  son image dans  $X$ .

- (1) Montrer que  $p$  est un point d'indétermination de  $f$ .
- (2) Montrer que  $p$  est un point critique de  $f$  qui est isolé. Calculer le degré de  $f$  en  $p$ .
- (3) Décrire l'ensemble d'indétermination et l'ensemble critique de  $f$ .
- (4) Montrer que le déterminant jacobien de  $f$  ne s'annule pas sur le complémentaire des points d'indétermination de  $f$ .

Dans cet exemple, la codimension de  $\text{Crit}(f)$  est donc égale à 2.

**Exercice 10.5.** Soit  $g : \mathbb{P}^n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbf{C})$  un endomorphisme holomorphe de degré  $d$  (donc de degré topologique  $d^n$ ). Montrer que l'ensemble critique de  $g$  est une hypersurface et calculer son degré.

### 10.2.2. *Equidistribution et entropie.*

Suite aux résultats de FORNAESS et SIBONY, puis BRIEND et DUVAL, DINH et SIBONY, et GUEDJ, nous savons maintenant que les transformations méromorphes cohomologiquement dilatantes jouissent de propriétés dynamiques remarquables qui généralisent le cas de la dimension 1 et les apparentent aux endomorphismes dilatants des variétés compactes (voir [142] pour les résultats antérieurs à 1999, [34, 35], [62, 64], et [97] et [68]).

**Théorème 10.6.** *Si  $M$  est une variété projective complexe et si  $f$  est une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante de  $M$ , alors*

- (i) *la transformation  $f$  possède une unique mesure invariante d'entropie maximale, qui vaut  $\log(d_t(f))$ ; cette mesure est ergodique ;*
- (ii) *les points périodiques (resp. périodiques et répulsifs) de  $f$  de période  $n$  s'équirépartissent vers la mesure  $\mu_f$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ;*
- (iii) *pour tout point  $x$  en dehors d'un ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  contenu dans l'ensemble postcritique  $PC(f)$ , les images réciproques  $f^{-n}\{x\}$  s'équirépartissent vers  $\mu_f$  ;*
- (iv) *les exposants de LYAPOUNOFF de  $f$  pour la mesure  $\mu_f$  sont strictement positifs ;*
- (v) *la mesure  $\mu_f$  est caractérisée par l'équation  $f^*\mu_f = d_t(f)\mu_f$  parmi l'ensemble des mesures de probabilité de  $M$  ne chargeant pas les ensembles analytiques strictes.*

Nous retiendrons en particulier de ce résultat qu'une hypothèse cohomologique se traduit directement au niveau dynamique, notamment avec l'existence de points périodiques répulsifs et l'absence d'exposants de LYAPOUNOFF négatifs ou nuls, ce qui précise les résultats généraux du paragraphe 10.1.2. Les propriétés stochastiques de  $f$  vis-à-vis de sa mesure d'entropie maximale sont donc similaires à celles des endomorphismes dilatants des variétés compactes. Le lecteur remarquera cependant qu'aucun endomorphisme holomorphe de l'espace projectif n'est dilatant, puisque son déterminant jacobien s'annule dès que son degré topologique est supérieur ou égal à 2. Le théorème 10.6 sera démontré au chapitre 3 de [98].

### 10.2.3. *L'ensemble exceptionnel.*

Lorsque  $f$  est holomorphe, les théorèmes 3.4.4 de [64] et 5.4.12 de [62] montrent que l'ensemble exceptionnel est un sous-ensemble algébrique de  $M$  (voir aussi [35], mais la preuve du lemme 2.1 qui y est présentée est incorrecte) :

**Proposition 10.7.** *Lorsque  $f$  est un endomorphisme holomorphe, l'ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  est un sous-ensemble analytique de  $M$  ; il coïncide avec le plus grand sous-ensemble analytique strict de  $M$  invariant par  $f$  et  $f^{-1}$ .*

Lorsque  $f$  est rationnelle, l'ensemble  $\mathcal{E}(f)$  peut contenir une infinité dénombrable d'ensembles analytiques. Lorsque  $f$  contracte un diviseur sur un point  $p$ , il convient en effet d'inclure l'orbite positive de  $p$  dans  $\mathcal{E}(f)$ .

**Remarque 10.8.** Il est possible de préciser quantitativement la vitesse de répartition au point (iii), et de contrôler ainsi les propriétés ergodiques de la mesure  $\mu_f$ . Nous renvoyons pour cela à [80], [51], [69], [70] et [71] pour des estimations précises et l'usage qui peut en être fait.

#### 10.2.4. Complément.

Lorsque  $f$  est un endomorphisme de l'espace projectif  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ , la mesure  $\mu_f$  peut être obtenue de la manière suivante. Soit  $\omega$  une forme de FUBINI-STUDY sur  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ . Si le degré de  $f$  est supérieur ou égal à 2, la suite de courants positifs fermés

$$\frac{1}{\lambda_1(f)^n} (f^n)^* \omega$$

converge vers un courant positif fermé  $T$  à potentiels continus, appelé courant de GREEN de  $f$ . La mesure  $\mu_f$  est alors proportionnelle au produit extérieur  $T^k$ . Cette remarque ne s'applique pas au cas général. Considérons par exemple la transformation dilatante  $g$  induite par la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sur le produit  $A = E \times E$  de deux courbes elliptiques. Toute classe de cohomologie  $[\alpha] \in H^{(1,1)}(A, \mathbf{R})$  qui est une classe propre pour  $g^*$  et pour laquelle  $[\alpha]^2 \geq 0$  est proportionnelle à  $[dy \wedge d\bar{y}]$  et correspond à la fibration elliptique invariante  $y = c^{ste}$ . Son carré est donc nul.

### 10.3. Transformations inversibles.

### 10.3.1. Transformations de HÉNON et automorphismes des surfaces.

La dynamique des transformations inversibles, et plus généralement des transformations qui ne sont pas cohomologiquement dilatantes est plus délicate à décrire. L'exemple le plus simple d'une telle transformation avec une entropie topologique strictement positive est la transformation de HÉNON

$$h_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x^2 + b \\ ax \end{pmatrix},$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes et  $a$  n'est pas nul. Plus généralement, nous appellerons automorphisme de type HÉNON tout automorphisme polynomial du plan complexe  $\mathbf{C}^2$  qui n'est pas conjugué à un automorphisme affine ou élémentaire, c'est-à-dire à un difféomorphisme polynomial de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + P(y) \\ by \end{pmatrix}.$$

Une telle transformation peut être considérée au choix comme un automorphisme du plan ou une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ ; il revient au même de dire qu'un automorphisme est de type HÉNON ou que la transformation birationnelle associée a un premier degré dynamique strictement plus grand que 1.

Grâce aux travaux de de BEDFORD, LYUBICH et SMILLIE et de FORNAESS et SIBONY, la mesure d'entropie maximale des transformations de type HÉNON est bien comprise (voir [18] et [17]). Certains de ces résultats ont été étendus à tout automorphisme d'une surface projective (voir [42] et [74]) :

**Théorème 10.9.** *Soit  $f$  un automorphisme d'une surface projective complexe (resp. un automorphisme de type HÉNON) dont l'entropie topologique est strictement positive. Il existe alors une unique mesure de probabilité  $\mu_f$  qui est  $f$ -invariante et d'entropie maximale. Il se trouve en outre que les points périodiques de  $f$  sont équirépartis pour cette mesure et que le système ergodique  $(X, \mu_f, f)$  est mesurablement conjugué à un décalage de BERNOULLI.*

En d'autres termes, la dynamique de  $f$  est semblable à un jeu de pile ou face si on l'observe à l'aide de la mesure qui lui est naturellement associée.

**Remarque 10.10.** 1.— L’hypothèse de projectivité faite sur  $X$  est une hypothèse technique qui semble hors sujet.

2.— La démonstration montre que les techniques développées dans [18] et [142] pour étudier les propriétés ergodiques de l’application de HÉNON sont valables sur les surfaces projectives. Certaines constructions sont d’ailleurs valables pour n’importe quel automorphisme d’une variété projective (voir [67], [95]).

**Remarque 10.11.** Pour un automorphisme, on ne peut pas espérer que la mesure  $\mu_f$  décrive la répartition de l’orbite d’un point générique pour la mesure de LEBESGUE : il existe en effet des automorphismes  $f$  avec une entropie positive et un domaine de SIEGEL sur lequel  $f$  est conjugué à une rotation ; l’orbite d’un point intérieur à un tel domaine ne se distribue donc pas suivant la mesure  $\mu_f$  (voir §9.2, théorème 9.8). La même remarque vaut d’ailleurs pour un endomorphisme cohomologiquement dilatant si l’on considère ses orbites positives  $f^n(x)$ ,  $n > 0$  (voir [135] pour des exemples frappants).

**Remarque 10.12.** Pour les automorphismes de HÉNON et les automorphismes des surfaces compactes considérés au théorème 10.9, la mesure  $\mu_f$  peut être construit de la manière suivante. On commence par construire des courants positifs fermés  $T^+$  et  $T^-$  qui vérifient l’équation

$$f_*(T^\pm) = \lambda_1(f)^{\mp 1} T^\pm.$$

Ces courants sont analogues au courant de GREEN mentionné au paragraphe 10.2. Ils admettent des potentiels locaux höldériens et  $\mu_f$  est le produit  $T^+ \wedge T^-$ . En général, ces courants ne sont pas lisses (voir [79]) : s’ils étaient de classes  $\mathcal{C}^3$ , ils définiraient des feuilletages  $f$ -invariants car ils satisfont l’équation

$$T^\pm \wedge T^\pm = 0.$$

Ces feuilletages seraient holomorphes et  $f$  serait un exemple de KUMMER (appliquer la proposition 11.2 et le théorème 11.12, voir [42])

Puisque nous considérons principalement le cas des variétés projectives, nous avons ici traité en parallèle automorphismes de type HÉNON et automorphismes des surfaces complexes compactes, ce qui est doublement frauduleux puisque les résultats concernant les automorphismes de type HÉNON sont antérieurs et ont inspiré les suivants et, surtout, parce que

la dynamique des automorphismes du plan est bien mieux comprise que celle des automorphismes des surfaces compactes. Le lecteur pourra par exemple consulter

- [19] pour une description de propriétés topologiques du support de la mesure  $\mu_f$  ou des courants mentionnés ci-dessus ;
- les travaux de HUBBARD et ses coauteurs concernant la description de la dynamique des applications de Hénon « à l’infini » (voir notamment [104] et [103]) ;
- [20] pour l’étude de la dynamique des automorphismes de  $\mathbf{R}^2$  en comparaison à la dynamique sur le plan complexe  $\mathbf{C}^2$  ;
- [79], [80] et [60] pour des compléments importants sur les courants et les résultats d’équirépartition.

### 10.3.2. *Transformations birationnelles et dimension supérieure.*

Pour la dynamique des transformations birationnelles du plan projectif, on ne dispose pas encore de résultats aussi performants, du moins pas en toute généralité. La première difficulté consiste à définir une mesure  $\mu_f$  susceptible d’être l’unique mesure d’entropie maximale. Lorsque l’orbite positive des points d’indétermination de  $f^{-1}$  ne s’approche pas trop vite des points d’indétermination de  $f$ , les résultats du paragraphe précédent ont été généralisés par BEDFORD, DILLER et DUJARDIN (voir [13], [14] et [74]). Pour les automorphismes des variétés de dimension supérieure, DINH et SIBONY ont développé des outils qui permettent de construire des courants invariants et une mesure naturelle  $\mu_f$  qui est ergodique (et même mélangeante). Nous renvoyons le lecteur à [67], [64] et [70] pour les résultats obtenus par ces deux auteurs concernant la répartition des orbites d’une transformation holomorphe : ceux-ci incluent la dynamique de certaines transformations transcendentes et de correspondances. Mentionnons enfin les travaux de DE THÁLLIN sur les exposants de Lyapounov des transformations rationnelles (voir [57]).

## 10.4. **Quelques compléments.**

Dans ce dernier paragraphe, nous apportons quelques précisions dans le cas des transformations rationnelles des surfaces K3.

### 10.4.1. *La mesure d’entropie maximale.*

Soit  $M$  une variété de CALABI-YAU projective de dimension  $k$ . Soit  $\Omega$  une  $d$ -forme holomorphe sur  $M$  ne s'annulant pas, que l'on normalise en imposant

$$(i)^{k^2} \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1.$$

La mesure de probabilité associée à la forme volume  $(i)^{k^2} \Omega \wedge \bar{\Omega}$  ne dépend pas du choix de  $\Omega$  et sera notée  $\mu_M$  : c'est la « mesure canonique » de  $M$ . Si  $f$  est une application rationnelle de  $M$  dans  $M$  alors

$$f^*(\Omega \wedge \bar{\Omega}) = \lambda_k(f) \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

où  $\lambda_k(f)$  est le degré topologique de  $f$ . Lorsque  $f$  est cohomologiquement dilatante, ceci montre que la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  coïncide avec la mesure  $\mu_M$  (appliquer le théorème 10.6, (v)). Le fait que  $\mu_f$  soit lisse est un phénomène rare (voir le chapitre 11). En particulier, (i) l'orbite d'un point générique pour la mesure de LEBESGUE de  $M$  s'équidistribue vers la mesure canonique  $\mu_M$  et (ii) les points périodiques répulsifs de  $f$  sont denses dans  $M$ .

Notons, cependant, qu'on ne connaît pas beaucoup d'exemples de transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes sur les variétés de CALABI-YAU, y compris sur les surfaces K3.

L'existence d'une application cohomologiquement dilatante sur  $M$  force l'existence d'une application rationnelle dominante  $\xi : \mathbf{C}^k \rightarrow M$  (voir la proposition 5.8). A l'heure actuelle, on ne sait pas si toute variété de CALABI-YAU possède une telle application  $\xi$ .

#### 10.4.2. Actions de groupes et ergodicité.

Au lieu d'étudier la dynamique d'une seule transformation, il est parfois naturel d'étudier l'action d'un groupe de transformations. En voici un exemple tiré de [43].

**Théorème 10.13.** *Si  $X$  est une surface K3 qui admet deux fibrations elliptiques invariantes par des automorphismes d'ordre infini, alors l'adhérence de toute  $\text{Aut}(X)$ -orbite est soit finie, soit une surface totalement réelle  $\text{Aut}(X)$ -invariante, soit la surface  $X$  tout entière, soit contenue dans un diviseur  $\text{Aut}(X)$ -invariant et contractible.*

La démonstration, simple, est une variation sur l'exercice suivant.

**Exercice 10.14** (preuve du théorème 10.13 pour les tores). Soit  $A$  le tore  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ . Le groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$  agit « linéairement » sur  $A$ . Soit  $O$  l'adhérence d'une orbite de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ .

- (1) Montrer que  $O$  est finie ou coïncide avec  $A$  tout entier. Pour cela, on pourra étudier d'abord l'orbite d'un point  $(x, y)$  sous l'action de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suivant que  $y$  est rationnel ou irrationnel.

- (2) Étendre ce résultat au cas de l'action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$  sur le produit  $A = E \times E$  d'une courbe elliptique  $E$  par elle-même.

La même stratégie permet aussi de classer les mesures de probabilité  $\mathrm{Aut}(X)$ -invariantes sous les mêmes hypothèses ou dans d'autres contextes proches. Ainsi, lorsque  $M$  est une hypersurface de CALABI-YAU dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{k+1}$  (donc de degré 2 par rapport à chaque variable), son groupe d'automorphismes agit de manière ergodique par rapport à la mesure canonique de  $M$ . L'orbite d'un point générique sous l'action de ce groupe est donc équidistribuée vis-à-vis de la mesure  $\mu_M$  (voir [129], [37]).

Dans la direction opposée, on sait grâce aux travaux de MCMULLEN qu'il existe des automorphismes de surfaces K3 (non projectives) dont l'entropie est strictement positive pour lesquels la mesure canonique n'est pas ergodique : plus précisément, il existe de tels automorphismes qui ont un domaine de SIEGEL (voir la fin du §9.2 et [118]). Par contre, on ne sait pas à l'heure actuelle si de tels exemples existent sur des surfaces K3 projectives (voir la remarque 9.10). On ne dispose donc pas d'exemple d'automorphisme sur une surface K3 projective pour lequel on sache prouver que la mesure canonique n'est pas ergodique. Qu'en est-il pour les exemples de la figure 8.3 ?

En guise d'application, ce théorème montre la densité potentielle des points rationnels de  $X$  : *sous les mêmes hypothèses, mais en supposant en outre que  $X$  est définie sur un corps de nombres  $k$ , il existe une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que  $X(k')$  soit dense dans  $X(\mathbf{C})$  pour la topologie usuelle (voir [43]).* Ceci fournit, dans un cas particulier, une preuve dynamique d'une part du théorème de BOGOMOLOV et TSCHINKEL suivant lequel une surface K3 projective et munie d'une fibration elliptique qui est définie sur

un corps de nombres  $k$  a un ensemble de points rationnels ZARISKI-dense si l'on autorise une extension finie du corps  $k$  (voir [30], [31]).

Le lecteur pourra consulter l'article de CHAMBERT-LOIR dans ce volume pour les constructions de géométrie diophantienne analogues à celles employées en dynamique holomorphe (voir [46] pour une introduction et [143], [153], [78], [52] pour des textes plus pertinents).

#### 10.4.3. *Surfaces K3.*

Pour conclure cette partie, résumons quelques uns des problèmes rencontrés dans le cas des surfaces K3.

- (i) On sait qu'aucune surface K3 n'est hyperbolique au sens de KOBAYASHI. Si une surface K3 possède une fibration elliptique, ou est une surface de KUMMER, il existe une application dominante holomorphe de  $\mathbf{C}^2$  dans cette surface (voir [38]). Par contre, on ne sait pas si une surface K3 projective générique, par exemple une quartique générique de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ , possède une telle application dominante  $\xi : \mathbf{C}^2 \rightarrow X$ .
- (ii) Dès qu'une surface K3 admet une fibration elliptique, elle possède une transformation méromorphe de degré strictement supérieur à 1. Par contre, on ne sait pas classer les surfaces K3 qui sont munies d'une transformation cohomologiquement dilatante et on ne sait pas si une surface K3 projective générique possède une transformation rationnelle de degré strictement supérieur à 1.
- (iii) Si  $X$  est une surface K3 projective définie sur un corps de nombres  $k$ , existe-t-il une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que  $X(k')$  soit dense dans  $X(\mathbf{C})$ ? Ce résultat est démontré lorsque  $X$  possède une fibration elliptique ([31]).

Comme nous l'avons vu, ces trois problèmes sont liés entre eux (au moins par des analogies) et la dynamique permet parfois d'apporter des éléments de réponses dans des cas simples.

## 11. RIGIDITÉ

Nous avons vu dans les parties précédentes qu'il existe des transformations rationnelles ou holomorphes sur certaines variétés projectives complexes avec une dynamique riche, mais que ces exemples sont difficiles à construire. Cette partie montre que l'on peut classer les transformations de ce type si l'on impose une contrainte classique et naturelle à la dynamique : il s'agit de caractériser les exemples pour lesquels les objets associés à la dynamique (feuilletage stable ou instable, mesure d'entropie maximale) sont lisses (holomorphes par exemple).

### 11.1. Automorphismes de type ANOSOV.

Les endomorphismes dilatants forment une famille de référence pour la dynamique des endomorphismes lisses et non inversibles des variétés compactes. Nous les avons d'ailleurs choisis comme exemple au paragraphe 10.1.3. Les difféomorphismes de type ANOSOV jouent un rôle similaire pour la dynamique des difféomorphismes. Dans ce paragraphe, nous résumons les résultats principaux de [45] et [86] visant à classer les automorphismes de type ANOSOV des variétés complexes compactes. Les endomorphismes holomorphes dilatants seront classés au théorème 11.16, paragraphe 11.3.1.

#### 11.1.1. Dynamique Anosov.

Soit  $M$  une variété compacte munie d'une métrique riemannienne. Un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  est de type ANOSOV s'il existe deux sous-fibrés  $E^+$  et  $E^-$  du fibré tangent  $TM$  et deux constantes strictement positives  $c$  et  $\chi$  tels que

- (i)  $TM$  est la somme directe de  $E^+$  et  $E^-$  ;
- (ii)  $E^+$  et  $E^-$  sont invariants sous l'action de  $f$  ;
- (iii) pour tout entier positif  $n$ , pour tout vecteur  $v^+$  de  $E^+$  et tout vecteur  $v^-$  de  $E^-$ ,

$$\begin{aligned} \|Df^{-n}(v^+)\| &\leq c \|v^+\| \exp(-n\chi) \\ \|Df^n(v^-)\| &\leq c \|v^-\| \exp(-n\chi). \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, les deux champs de plans déterminés par  $E^+$  et  $E^-$  sont continus et intégrables : ils déterminent deux feuilletages continus de  $M$ , le feuilletage instable  $\mathcal{F}^+$  et le feuilletage stable  $\mathcal{F}^-$ . En général,  $\mathcal{F}^+$

et  $\mathcal{F}^-$  ne sont pas différentiables, même lorsque le difféomorphisme  $f$  est de classe  $C^\infty$ , mais leurs feuilles le sont.

**Remarque 11.1.** Si  $f$  préserve une structure complexe  $j$ ,  $E^+$  et  $E^-$  sont  $j$ -invariants et les feuilles de  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  sont donc holomorphes. A priori, la structure transverse de  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  est seulement continue, toutefois nous ne connaissons aucun exemple d'automorphisme sur une variété complexe compacte qui soit de type ANOSOV et dont les feuilletages stable et instable ne soient pas holomorphes.

Nous utiliserons le vocabulaire suivant : si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage continu d'une variété complexe  $M$  dont les feuilles sont holomorphes, la *dimension de  $\mathcal{F}$*  est la dimension complexe de ses feuilles. Un automorphisme ANOSOV est de *codimension 1* si  $\mathcal{F}^+$  ou  $\mathcal{F}^-$  est de dimension 1.

Lorsque  $f$  est un difféomorphisme ANOSOV d'une variété compacte  $M$ , et lorsque  $\mathcal{F}^+$  est un feuilletage en courbes, le feuilletage  $\mathcal{F}^-$  est continûment différentiable (cf. [102]). Cette propriété s'étend aux automorphismes ANOSOV des variétés complexes compactes et l'on peut même remplacer « continûment différentiable » par « holomorphe » :

**Proposition 11.2** (GHYS, [86]). *Soit  $f$  un automorphisme ANOSOV d'une variété complexe compacte  $M$ . Si  $\mathcal{F}^+$  est de dimension 1, alors  $\mathcal{F}^-$  est un feuilletage holomorphe. En particulier, si  $M$  est une surface, alors  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  sont holomorphes.*

### 11.1.2. Conjecture de SMALE.

Une conjecture célèbre de SMALE affirme que toute variété compacte possédant un difféomorphisme de type ANOSOV est une infra-nilvariété, c'est-à-dire qu'après un revêtement fini la variété est le quotient d'un groupe de LIE nilpotent par un réseau cocompact. De nombreux résultats sont disponibles si l'on fait des hypothèses de régularité sur les feuilletages stable et instable du difféomorphisme ANOSOV ([84], [85], [21], [22]). Par exemple, BENOIST et LABOURIE ont montré le résultat suivant (voir [22]).

**Théorème 11.3** (BENOIST, LABOURIE). *Soit  $V$  une variété compacte symplectique et  $f$  un difféomorphisme symplectique de  $V$  de classe  $C^\infty$ . Si  $f$  est un difféomorphisme ANOSOV qui possède une orbite dense et dont les*

feuilletages stable et instable sont  $C^\infty$ , alors  $f$  est conjugué à un automorphisme hyperbolique d'une infra-nilvariété par un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ .

En ce qui concerne les automorphismes, on dispose du très joli résultat suivant.

**Théorème 11.4** (GHYS, [86]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $f$  un automorphisme de  $M$ .*

- (i) *Si  $f$  est un automorphisme ANOSOV de codimension 1 qui a une orbite dense, alors  $M$  est homéomorphe à un tore et  $f$  est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire de ce tore.*
- (ii) *Si  $M$  est une surface, et si  $f$  est ANOSOV, alors  $M$  est un tore complexe et  $f$  en est un automorphisme linéaire.*

Lorsque les feuilletages stable et instable sont holomorphes et que la variété  $M$  est projective, il est possible d'obtenir une classification complète, ceci sans faire d'hypothèse sur la codimension des feuilletages ou l'existence d'une orbite dense.

**Théorème 11.5** (CANTAT, [45]). *Soient  $M$  une variété projective complexe et  $f$  un automorphisme de  $M$  de type ANOSOV.*

- (i) *Si les feuilletages stable et instable de  $f$  sont holomorphes, alors  $M$  est revêtue par un tore et  $f$  provient d'un automorphisme linéaire de ce tore.*
- (ii) *Si  $f$  est un automorphisme ANOSOV de codimension 1, alors  $M$  est un tore et  $f$  est linéaire.*

**Exemple 11.6.** Soient  $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\alpha$  un réseau cocompact de la droite complexe,  $A$  le tore  $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$  et  $\tau$  le point de  $A$  associé au point  $(1/2, 1/2)$  de  $\mathbf{C}^2$ . La transformation linéaire  $(x, y) \mapsto (3x + 2y, 2x + y)$  préserve le réseau  $\Lambda^2$  et induit donc un automorphisme ANOSOV de  $A$ . Nous noterons  $f$  l'automorphisme ANOSOV obtenu en faisant agir cette transformation diagonalement sur  $A \times A$ . Soit  $\eta$  la transformation d'ordre 2 de  $A \times A$  définie par

$$\eta(a, b) = (a + \tau, -b).$$

Puisque  $f$  et  $\eta$  commutent,  $f$  induit un automorphisme de type ANOSOV sur la variété projective  $(A \times A)/\eta$ . Celle-ci n'est pas un tore.

**Remarque 11.7.** (i) La conclusion du théorème 11.5 est plus forte que la conjecture de SMALE puisque la variété  $M$  est revêtue par un tore. Ceci résulte de la remarque suivante : soient  $N$  un groupe de Lie complexe connexe et  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $N$ , alors  $N/\Gamma$  est kählérienne si et seulement si  $N$  est abélien ; dans ce cas  $N/\Gamma$  est un tore (voir [23]).

(ii) Dans le même ordre d'idée, si  $M$  est une variété complexe compacte kählérienne dont le groupe fondamental est nilpotent sans être virtuellement abélien il est facile de déduire de [39] qu'aucun automorphisme de  $M$  n'est ANOSOV.

(iii) Puisque toute variété compacte kählérienne homéomorphe à un tore est un tore complexe, la seconde affirmation du théorème 11.5 est une généralisation faible du théorème de GHYS.

**Remarque 11.8.** Dans [86], GHYS étudie aussi les actions holomorphes de  $\mathbf{C}^*$  qui sont de type ANOSOV (les fibrés stable et instable forts sont en somme directe avec le champ de droites complexes tangent au flot) : ces actions y sont complètement classées pour les variétés de dimension 3.

Sur une variété kählérienne, l'inégalité de GROMOV montre que tout automorphisme isotope à l'identité a une entropie nulle. En particulier, il n'y a pas de flot d'ANOSOV (voir les §2.2 et 2.3).

## 11.2. Feuilletages et dynamiques pseudo-ANOSOV des surfaces.

Soit  $f$  un automorphisme d'une surface projective complexe  $X$ . Supposons que son premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  soit strictement supérieur à 1, ce qui signifie que son entropie topologique est strictement positive (voir §2.2) :

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\lambda_1(f)) > 0.$$

Nous avons signalé au paragraphe 10.3.1, remarque 10.12, que l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$  peut-être construite de la manière suivante : il existe deux courants positifs fermés  $T^+$  et  $T^-$  tels que, pour toute forme de KÄHLER  $\kappa$  sur  $X$ , la suite de courants

$$\frac{1}{\lambda_1(f)^n} (f^n)^* \kappa$$

converge vers un multiple non nul de  $T^+$  (resp.  $T^-$ ) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ; le produit de ces deux courants (existe et) est proportionnel à la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ . Pour les exemples de KUMMER (voir §7.2), ces deux courants sont des courants d'intégration le long des

feuilles de deux feuilletages holomorphes (singuliers). Dans [42], il est démontré que ceci caractérise les automorphismes de KUMMER des surfaces. Plus généralement, il est possible de classer les surfaces projectives  $X$  munies d'un feuilletage holomorphe (singulier)  $\mathcal{F}$  pour lequel le groupe des symétries birationnelles  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est infini. Décrivons ces résultats.

### 11.2.1. Les feuilletages et leurs symétries.

Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage holomorphe (singulier) d'une variété complexe  $X$  nous noterons  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  (resp.  $\text{Bir}(\mathcal{F})$ ) le groupe des automorphismes (resp. des transformations birationnelles) de  $X$  qui préservent  $\mathcal{F}$ .

Soient  $X$  une surface complexe compacte et  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe sur  $X$ , donné par une famille  $v_i$  de champs de vecteurs holomorphes à zéros isolés. Les champs  $v_i$  sont définis sur les ouverts  $\mathcal{U}_i$  d'un recouvrement de  $X$  et sont soumis à des relations de compatibilité

$$v_i = g_{ij}v_j, \quad g_{ij} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j),$$

assurant que les courbes intégrales de  $v_i$  et  $v_j$  se recollent sur  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$  pour former les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Le fibré en droites associé au cocycle  $\{g_{ij}\}$  ne dépend que de  $\mathcal{F}$  : c'est le *fibré cotangent* de  $\mathcal{F}$ . Il est noté  $T_{\mathcal{F}}^*$  et sera parfois dénommé *fibré canonique*. À ce fibré est associée une dimension de KODAIRA  $\text{kod}(\mathcal{F}) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$  qui mesure son degré de positivité (voir [36]).

Lorsque  $\text{kod}(\mathcal{F})$  est égale à 2, le feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit *de type général*. C'est le cas pour un feuilletage de  $\mathbb{P}^2$  générique dont le degré est supérieur ou égal à 2. Dans [131], PEREIRA et SANCHEZ ont étendu le théorème d'ANDREOTTI (cf. remarque 3.6) au cas feuilleté en démontrant que  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est un groupe fini pour tout feuilletage de type général. BRUNELLA a montré que les feuilletages pour lesquels  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  contient strictement  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  (ceci pour toute surface feuilletée birationnelle à  $(X, \mathcal{F})$ ) sont tous, à une exception près, des fibrations rationnelles ou des feuilletages de RICCATI et en a déduit que les transformations de HÉNON ne préservent pas de feuilletage holomorphe.

Nous allons maintenant préciser ces énoncés en classant complètement les surfaces feuilletées  $(X, \mathcal{F})$  pour lesquelles  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  ou  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est infini (voir [50]).

### 11.2.2. Exemples.

Voici les exemples principaux de surfaces feuilletées munies de nombreuses symétries holomorphes ou rationnelles. Le premier d'entre eux est fourni par les feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme holomorphe de type ANOSOV.

**Exemple 11.9 (KUMMER).** Nous disposons déjà des exemples de KUMMER décrits au paragraphe 7.2 : si  $f$  est un automorphisme d'Anosov d'un tore  $A$  de dimension 2 complexe, ses deux feuilletages stable et instable sont holomorphes ; si  $f$  permute les orbites d'un groupe fini  $G$  d'automorphismes de  $A$ , on peut passer au quotient, ce qui détermine une transformation birationnelle de  $A/G$  préservant deux feuilletages singuliers.

**Exemple 11.10 (fibrations).** Certaines applications biméromorphes d'ordre infini préservent des fibrations elliptiques ou rationnelles. C'est le cas des flots des champs de vecteurs parallèles à de telles fibrations ou de l'automorphisme linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur le produit  $E \times E$  de deux courbes elliptiques. Si  $X$  est le produit de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  par une surface de Riemann compacte  $B$  et si  $\alpha : B \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  est une application méromorphe non constante, la transformation  $f(z, w) = (\alpha(w) \cdot z, w)$  est une transformation birationnelle de  $X$  d'ordre infini qui préserve la fibration rationnelle  $X \rightarrow B$ .

**Exemple 11.11 (transformations monomiales).** Cet exemple est analogue à l'exemple 11.9 si l'on remplace le groupe additif  $\mathbf{C}$  par son analogue multiplicatif  $\mathbf{C}^*$  (voir le §9.3). Il conduit à des transformations birationnelles.

**a.-**Toute application rationnelle du type  $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sera appelée *transformation monomiale* ; lorsque  $|ad - bc| = 1$ , c'est une application birationnelle. Supposons que le rayon spectral de la matrice associée,

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

soit de module strictement plus grand que 1. L'application  $f$  préserve alors les deux feuilletages holomorphes définis par les 1-formes  $\alpha w dz + \beta z dw$

où  $(\alpha, \beta)$  est un vecteur propre de  ${}^tB$ . Le tore réel  $\{|z| = |w| = 1\}$  est invariant par cette transformation ; elle y induit un difféomorphisme ANOSOV.

**b.-** Le quotient de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  par l'involution  $\tau(z, w) = (1/z, 1/w)$  est une surface rationnelle possédant quatre points singuliers. Notons  $Y$  la surface obtenue après leur résolution. Les applications monomiales de l'exemple précédent commutent à  $\tau$  et induisent donc des applications birationnelles de  $Y$  préservant les images des deux feuilletages  $f$ -invariants.

### 11.2.3. Classification.

**Théorème 11.12.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une surface projective  $X$  possédant un groupe de symétries holomorphes  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  infini. Il existe alors au moins un élément  $f$  d'ordre infini dans  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  et la situation est l'une des trois suivantes :*

- (i)  $\mathcal{F}$  est invariant par un champ de vecteurs holomorphe ;
- (ii)  $\mathcal{F}$  est une fibration elliptique ;
- (iii) la surface  $X$  est une surface de KUMMER,  $f$  se relève en un automorphisme ANOSOV  $\psi$  du tore et  $\mathcal{F}$  est la projection sur  $X$  du feuilletage stable ou instable de  $\psi$  (exemples 11.9).

Notons que les deux derniers cas sont mutuellement exclusifs. Lorsque  $X$  n'est pas un tore, les feuilletages apparaissant au cas (iii) ne sont jamais préservés par un champ de vecteurs.

**Théorème 11.13.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage tel que l'inclusion stricte  $\text{Aut}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Bir}(\mathcal{F})$  soit vérifiée pour tout modèle birationnel de  $\mathcal{F}$ . Alors  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  possède un élément d'ordre infini  $f$  et, soit  $\mathcal{F}$  est une fibration rationnelle, soit la situation est birationnellement conjuguée à celle de l'exemple 11.11.*

Réciproquement, toute fibration rationnelle possède une symétrie birationnelle d'ordre infini qui n'est pas birationnellement conjuguée à un automorphisme.

**Corollaire 11.14.** *Soit  $f : X \rightarrow X$  une application birationnelle d'une surface projective préservant un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$ . Si le premier degré dynamique de  $f$  est strictement plus grand que 1, il existe un changement de variables birationnel, puis un revêtement fini par un tore (resp. par  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ), tel que  $f$  se relève en un automorphisme ANOSOV du tore (resp. une application monomiale de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ) et le feuilletage  $\mathcal{F}$  en un feuilletage linéaire. En particulier,  $f$  préserve automatiquement deux feuilletages.*

Dans cette situation, la dynamique de  $f$  est « pseudo-ANOSOV » : deux feuilletages singuliers transverses sont invariants sous l'action de  $f$ , l'un est dilaté uniformément et l'autre est contracté uniformément (voir [50]).

### 11.3. Mesure d'entropie maximale lisse.

Nous avons vu au paragraphe 10.2 que les applications rationnelles cohomologiquement dilatantes possèdent une unique mesure d'entropie maximale. Nous allons voir maintenant que cette mesure, en général, n'est pas lisse. Plus précisément : il est possible de caractériser les exemples de LATTÈS par l'absolue continuité de la mesure  $\mu_f$  par rapport à la mesure de LEBESGUE (modulo des hypothèses de nature cohomologique naturelles). C'est un résultat surprenant et, afin d'en montrer toute la force, nous commencerons par décrire une situation similaire : celle des endomorphismes dilatants.

#### 11.3.1. Endomorphismes dilatants.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, reprenons l'exemple 10.2 des endomorphismes dilatants des variétés compactes. Rappelons que si  $M$  est une variété compacte, un endomorphisme  $f$  de  $M$  de classe  $C^1$  est dilatant s'il existe une métrique riemannienne sur  $M$  et un nombre réel  $\chi$  strictement plus grand que 1 tels que

$$\|Df(v)\| \geq \chi \|v\|$$

pour tout vecteur  $v$  tangent à  $M$ .

Deux mesures de probabilité  $f$ -invariantes sont naturellement associées à un tel endomorphisme. La première, notée  $\nu_f$ , est l'unique mesure de probabilité invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE de  $M$ . La seconde mesure, notée  $\mu_f$ , est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$ . En général,  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE et diffère donc de  $\nu_f$ . Pour les endomorphismes du cercle définis par

$$\tau_d(z) = z^d, \quad d \neq -1, 0, 1,$$

ces deux mesures coïncident avec la mesure de HAAR du cercle.

D'après les travaux de SHUB et GROMOV, seules les infra-nilvariétés possèdent des endomorphismes dilatants et deux endomorphismes dilatants qui sont homotopes sont conjugués par un homéomorphisme (voir

[140] et [93]). En particulier, l'entropie topologique d'un endomorphisme dilatant  $f$  est déterminée par son action  $f_*$  sur le groupe fondamental de  $M$ .

Appliquons ceci lorsque  $M$  est le cercle et  $f$  est un endomorphisme dilatant de degré  $d$  et de classe  $C^k$ . Il existe alors un homéomorphisme  $h$  du cercle conjuguant  $f$  à  $\tau_d$ . L'entropie topologique de  $f$  est égale à  $\log(|d|)$  et la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  est égale à l'image réciproque  $h^*\lambda$ , où  $\lambda$  est la mesure de HAAR du cercle. Pour que  $\mu_f$  coïncide avec  $\nu_f$ , il faut donc que  $h$  soit absolument continu par rapport à la mesure de LEBESGUE. Il s'agit d'un phénomène rare. On dispose en effet du résultat suivant : deux endomorphismes du cercle  $f$  et  $g$  dilatants et de classe  $C^k$  qui sont conjugués par un homéomorphisme absolument continu le sont automatiquement par un difféomorphisme de classe  $C^k$  (pour  $2 \leq k \leq \omega$ , [141]).

Dans certaines situations proches des situations holomorphes qui nous préoccupent, la rigidité entraînée par l'égalité de  $\nu_f$  et  $\mu_f$  est encore plus forte. Par exemple, deux produits de BLASCHKE dilatants qui sont conjugués par un homéomorphisme absolument continu sont en fait conjugués par une homographie (voir [141], page 289). Ainsi lorsque  $f$  est un produit de BLASCHKE dilatant de degré  $d$  qui n'est pas conjugué à  $\tau_d$  par une homographie, la mesure  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE.

Nous retiendrons que, en dimension 1, la lissité ou l'absolue continuité de la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  rigidifie la situation : l'endomorphisme est alors conjugué (resp.  $C^k$ -conjugué, resp. homographiquement conjugué) à l'endomorphisme de même degré le plus simple, à savoir  $\tau_d$ .

De tels résultats ne sont plus valables en dimension plus grande que 1 pour les raisons suivantes. Si  $f$  et  $g$  sont conjugués par un difféomorphisme  $h$ , les valeurs propres de  $Df$  en un point fixe  $p$  sont égales à celles de  $Dg$  en  $h(p)$ . Si  $\mu_f$  est lisse, le jacobien de  $f$  en ses points périodiques est alors égal à  $d$ , où  $d$  est le degré topologique. En dimension 1, ceci fixe l'unique valeur propre de  $Df$ , mais en dimension plus grande, seul le produit des valeurs propres est ainsi fixé ; on peut donc changer les valeurs propres et annihiler l'existence d'une conjugaison lisse tout en préservant la mesure d'entropie maximale.

**Exemple 11.15.** Soient  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif et  $f_\varepsilon$  l'endomorphisme du tore  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  défini par

$$f_\varepsilon(x, y) = (2x + 2\varepsilon \sin(2\pi y), x + 2y + \varepsilon \sin(2\pi y)).$$

L'endomorphisme  $f_\varepsilon$  est isotope à l'endomorphisme linéaire  $f_0$  et la mesure de HAAR du tore est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f_\varepsilon$ . Puisque les valeurs propres de  $Df_\varepsilon$  aux points fixes de  $f_\varepsilon$  varient avec  $\varepsilon$ , l'endomorphisme  $f_0$  n'est en général pas conjugué à  $f_\varepsilon$  par un difféomorphisme.

Nous allons maintenant décrire des résultats analogues à ceux rappelés ci-dessus, mais pour des endomorphismes holomorphes et des transformations méromorphes de variétés complexes compactes kählériennes de dimension supérieure ou égale à 1. Nous ferons deux hypothèses. La première est de nature dynamique et consiste à supposer que la mesure d'entropie maximale de l'endomorphisme est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE. La seconde est de nature cohomologique. L'hypothèse analogue pour les endomorphismes dilatants serait que  $f$  est isotope à une transformation linéaire dont tous les exposants de LYAPOUNOFF sont égaux (c'est le cas dans l'exemple 11.15).

Avant cela, signalons que les endomorphismes dilatants des variétés complexes compactes kählériennes sont faciles à classer en utilisant le théorème de GROMOV qui affirme que seules les infra-nilvariétés possèdent de tels endomorphismes.

**Théorème 11.16.** *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe d'une variété complexe compacte kählérienne  $M$ . Si  $f$  est dilatant, alors  $M$  est revêtue par un tore et  $f$  est revêtu par une transformation affine de ce tore.*

*Démonstration.* (GROMOV, BENSON et GORDON). D'après les travaux de GROMOV,  $M$  est une infra-nilvariété. Puisque  $M$  est une variété complexe kählérienne, le théorème principal de [23] montre que  $M$  est revêtue par un tore. Plus précisément, nous disposons d'un revêtement universel  $\pi : \mathbf{C}^k \rightarrow M$  pour lequel  $\pi_1(M)$  s'identifie à un sous-groupe du groupe affine de  $\mathbf{C}^k$  agissant par automorphismes de revêtement ; les automorphismes qui sont des translations forment un sous-groupe  $T \subset \pi_1(M)$  distingué et d'indice fini, si bien que  $\mathbf{C}^k/T$  est un tore.

L'application  $f$  se relève en une transformation  $F$  de  $\mathbf{C}^k$ , affine car  $M$  est compacte. Le sous-groupe  $T$  de  $\pi_1(M)$  est normalisé par  $F$ , et ainsi  $F$  passe au quotient en un automorphisme affine de  $\mathbf{C}^k/T$  revêtant  $f$ .  $\square$

**Remarque 11.17.** Lorsque  $M$  est projective, une seconde preuve consiste à reprendre les arguments de [45] concernant le cas des difféomorphismes holomorphes ANOSOV ; ceci remplace le théorème de GROMOV par des résultats récents de géométrie algébrique complexe.

### 11.3.2. Exemples de LATTÈS et de KUMMER.

Les résultats de SHUB et GROMOV montrent que tout endomorphisme dilatant  $f$  est conjugué topologiquement au modèle algébrique auquel  $f$  est isotope. Dans le monde des transformations méromorphes, l'analogie de ces modèles algébriques est fourni par les exemples de KUMMER.

Rappelons qu'un exemple de KUMMER est une transformation méromorphe d'une variété compacte kählérienne qui est obtenue en quotientant un endomorphisme affine d'un tore  $\mathbf{C}^n/\Gamma$  par l'action d'un groupe fini. Les exemples de LATTÈS sont les exemples de KUMMER pour lesquels la transformation affine associée a une partie linéaire dont toutes les valeurs propres sont situées sur un même cercle, de rayon strictement plus grand que 1.

### 11.3.3. Caractérisation des endomorphismes de LATTÈS.

Les travaux de ZDUNICK en dimension 1, puis de BERTELOOT, DUPONT et LOEB en dimension supérieure conduisent à la caractérisation suivante de certains endomorphismes de LATTÈS, ceux qui sont « polarisés » (voir la remarque 5.7).

**Théorème 11.18.** *Soit  $g$  un endomorphisme holomorphe d'une variété projective complexe  $M$ . Supposons qu'il existe une classe de KÄHLER  $[\kappa]$  et un réel  $\delta > 1$  tels que  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$ . Si la mesure d'entropie maximale de  $g$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE,  $g$  est un exemple de LATTÈS.*

**Remarque 11.19.** L'existence d'une unique mesure d'entropie maximale pour  $g$  résulte des travaux de BRIEND et DUVAL (voir §10.2).

Cet énoncé doit être pondéré par la remarque suivante : très peu de variétés possèdent des endomorphismes holomorphes et l'existence d'un endomorphisme  $g$  pour lequel il existe un tel couple  $(\delta, [\kappa])$  avec  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$

est très restrictive (voir le paragraphe 5.2); les exemples principaux sont les endomorphismes des espaces projectifs. Nous retiendrons qu'il n'y a donc pas d'exemple similaire à l'exemple 11.15 pour les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs.

Les deux remarques suivantes donnent une petite idée des méthodes qui peuvent conduire à la démonstration du résultat lorsque  $\mu_f$  est lisse. Les détails de la preuve seront présentés au paragraphe 12 lorsque la dimension de  $M$  est égale à 1.

- la mesure  $\mu_g$  est une puissance d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé  $T^+$  qui est invariant par  $g$  et dont la classe de cohomologie est proportionnelle à  $[\kappa]$  :

$$\mu_g = T^+ \wedge T^+ \wedge \dots \wedge T^+.$$

Lorsque  $\mu_f$  est lisse, ce courant est lisse (voir [24]). On passe donc d'une hypothèse sur la mesure à une hypothèse sur le courant  $T^+$ , ce qui est plus contraignant.

- soit  $z$  un point périodique répulsif de période  $n$ , au voisinage duquel on peut linéariser  $g^n$  à l'aide d'une conjugaison holomorphe  $\xi : \mathbf{C}^d \rightarrow M$  (encore faut-il qu'un tel point existe !); la lissité de  $T^+$  et son invariance montrent que la linéarisation de  $g$  est une similitude de rapport  $\sqrt{\delta}$ ; ceci permet de montrer que  $\xi^*T^+$  est donné par un champ de formes hermitiennes définies positives constant sur  $\mathbf{C}^d$  puis que  $\xi$  est (presque) un revêtement de  $\mathbf{C}^d$  sur  $M$  : son groupe de monodromie agit de manière isométrique, discrète et cocompacte sur  $\mathbf{C}^d$  (voir les articles de BERTELOOT et LOEB, notamment [25], et le cas de la dimension 1 au paragraphe 12.5).

C'est donc l'existence du courant qui rigidifie la situation. Sans l'hypothèse cohomologique  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$ , l'existence d'un tel courant n'est pas assurée. Le paragraphe suivant montre que, en dimension 2, il est possible d'étendre le théorème précédent au cas des transformations rationnelles tout en s'affranchissant de cette contrainte cohomologique.

#### 11.3.4. Transformations méromorphes des surfaces.

Lorsque  $f : X \dashrightarrow X$  est une transformation rationnelle d'une surface, on dispose de trois nombres, le degré topologique  $d_t(f) = \lambda_2(f)$ , le premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  (que nous noterons simplement  $\lambda(f)$ ) et le rayon

spectral  $\rho(f^*)$  de l'application linéaire  $f^* : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ , défini par

$$\rho(f^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \| (f^*)^k \|^{1/k} \right).$$

Les inégalités

$$d_t(f) \leq \lambda(f)^2 \leq \rho(f^*)^2$$

sont toujours valables et sont des égalités pour les exemples de LATTÈS. Le lecteur trouvera dans [77] des exemples simples et instructifs pour lesquels  $\lambda(f) < \rho(f^*)$ . Le résultat suivant concerne le cas « résonant », ou « extrémal »,  $d_t(f) = \rho(f^*)^2$  (voir [48]).

**Théorème 11.20.** *Une transformation rationnelle  $f$  d'une surface projective complexe est un exemple de LATTÈS si, et seulement si  $f$  est birationnellement conjuguée à une transformation rationnelle  $f'$  pour laquelle  $d_t(f')$  est égal à  $\rho(f'^*)^2$  et  $\mu_{f'}$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE.*

Il reste ici une condition cohomologique qui remplace la condition  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$  du théorème 11.18. Le théorème suivant montre que cette condition de « résonance cohomologique » s'avère nécessaire :

**Théorème 11.21.** *Il existe une transformation rationnelle  $f : X \dashrightarrow X$  d'une surface projective telle que*

- (i)  *$f$  est cohomologiquement dilatante :  $d_t(f) > \lambda(f) = \rho(f^*)$ ;*
- (ii) *la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle ;*
- (iii) *l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$  est lisse ;*
- (iv)  *$f$  n'est pas conjuguée topologiquement à un exemple de KUMMER.*

**Remarque 11.22.** Pour les automorphismes des surfaces K3, on ne sait pas si la lissité de la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  assure que  $f$  est un exemple de KUMMER (voir [42] et [119]).

**Question 11.1.** Peut-on classer les automorphismes des surfaces projectives complexes dont l'entropie est strictement positive et la mesure d'entropie maximale est lisse ?<sup>3</sup>

---

3. Yes, they are Kummer examples : see my preprint with Christophe Dupont.

### 11.3.5. Complément.

En dimension 1, les exemples de LATTÈS et leurs cousins, à savoir les exemples de TCHEBYCHEFF et les transformations monomiales  $z \rightarrow z^d$ , possèdent d'autres caractérisations. Par exemple, ce sont les transformations  $f$  qui commutent à d'autres endomorphismes  $g$  pour lesquels tout itéré de  $g$  diffère de tout itéré de  $f$ . Pour les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs qui commutent entre eux, DINH et SIBONY ont obtenu un résultat (quasiment) complet (voir [63]), mais le cas des transformations rationnelles reste ouvert.

Nous avons fait le choix d'ignorer la dynamique des correspondances holomorphes. Signalons tout de même un énoncé frappant valable en dimension 1.

Soit  $S$  une surface de RIEMANN compacte de genre supérieur ou égal à 2. Le revêtement universel de  $S$  est donc biholomorphe au disque unité ouvert  $\mathbb{D} \subset \mathbf{C}$ . Il existe donc un sous-groupe discret et cocompact  $\Gamma$  de  $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{PSL}(2, \mathbf{R})$  pour lequel  $S = \mathbb{D}/\Gamma$ . Nous munissons  $S$  de la mesure de probabilité  $\mu_S$  obtenue par quotient de la forme d'aire associée à la métrique de POINCARÉ sur  $\mathbb{D}$ .

Une correspondance de  $S$  vers  $S$  est la donnée d'une courbe  $Y$  et de deux revêtements ramifiés  $\pi_h : Y \rightarrow S$  et  $\pi_v : Y \rightarrow S$ . À chaque correspondance  $Y$  est associée l'application multivaluée  $g_Y = \pi_h \circ \pi_v^{-1}$  de  $S$  dans  $S$ .

Les correspondances modulaires de  $S$  sont celles pour lesquelles  $\pi_h$  et  $\pi_v$  sont des revêtements non ramifiés. Elles sont toutes obtenues par le procédé suivant. Soit  $c$  un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$  situé dans le commensurateur de  $\Gamma$ , ce qui signifie que le groupe

$$\Gamma_c = \Gamma \cap (c\Gamma c^{-1})$$

est un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma$  et dans  $c\Gamma c^{-1}$ . La surface de RIEMANN

$$Y_c = \mathbb{D}/\Gamma_c$$

se projette donc sur  $S$  par  $\pi_v(x\Gamma_c) = x\Gamma$  et par  $\pi_h(x\Gamma_c) = xc\Gamma$ . Ces deux projections sont des revêtements non ramifiés de même degré  $[\Gamma : \Gamma_c]$ . La correspondance  $Y_c$  est la correspondance modulaire associée à  $c$ .

CLOZEL et ULLMO ont caractérisé les correspondances modulaires de la manière suivante (voir [54], [53]) :

**Théorème 11.23.** *Soit  $S = \mathbb{D}/\Gamma$  une surface de RIEMANN compacte et  $\mu_S$  sa mesure de POINCARÉ.*

*Une correspondance de  $S$  vers  $S$  est modulaire si et seulement si elle préserve la mesure  $\mu_S$ .*

*Si  $Y_c$  est une correspondance modulaire de  $S$  vers  $S$  pour laquelle le groupe engendré par  $\Gamma$  et  $c$  n'est pas discret, et si  $Y'$  est une correspondance qui commute à  $Y_c$ , alors  $Y'$  est une correspondance modulaire.*

Par leur construction et leurs caractérisations, les correspondances modulaires peuvent donc être considérées comme des analogues multivalués des exemples de LATTÈS. Notons toutefois que leurs propriétés dynamiques sont très différentes puisque les correspondances modulaires sont des isométries locales, contrairement aux exemples de LATTÈS qui eux sont localement dilatants.

En dimension plus grande, les correspondances modulaires peuvent être caractérisées par l'invariance d'une métrique hermitienne : cette propriété est semblable au résultat de BERTELOOT et LOEB suivant lequel les exemples de LATTÈS sur l'espace projectif sont caractérisés par le fait que le courant  $T^+$  est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide.

Le lecteur intéressé par la dynamique des correspondances pourra consulter les travaux de DINH et SIBONY sur le sujet, par exemple [70], [72] et [61].

## 12. EXEMPLES DE LATTÈS EN DIMENSION 1.

Dans ce paragraphe nous détaillons la preuve du théorème 11.18 dans le cas des endomorphismes des surfaces de RIEMANN. Dans ce contexte, le théorème est dû à ZDUNICK, qui montre d'ailleurs le résultat plus fort que voici.

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , nous noterons  $\delta(\mu)$  sa dimension de HAUSDORFF, définie par

$$\delta(\mu) = \inf\{\text{Hausdim}(E) ; E \text{ est un borélien et } \mu(E) > 0\}.$$

Enfin, pour tout  $\delta$  entre 0 et 2, nous noterons  $\Lambda_\delta$  la mesure de HAUSDORFF de dimension  $\delta$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Le théorème obtenu par ZDUNICK s'énonce comme suit.

**Théorème 12.1** (ZDUNICK). *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de la droite projective complexe de degré topologique  $d \geq 2$ . La mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  de  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de HAUSDORFF  $\Lambda_{\delta(\mu_f)}$  si, et seulement si  $f$  est conjuguée par une homographie à un exemple de LATTÈS, une transformation monomiale ou une transformation de TCHEBYCHEFF.*

En particulier, lorsque  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE,  $\delta(\mu_f) = 2$  et  $f$  est un exemple de LATTÈS.

Dans ce qui suit, nous montrons le théorème 11.18 en dimension 1. D'après le paragraphe 4.1, il suffit de considérer les endomorphismes de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

À partir de maintenant,  $f$  est donc un endomorphisme holomorphe de la droite projective et

- (i) le degré topologique  $d$  de  $f$  est strictement supérieur à 1 ;
- (ii) la mesure d'entropie maximale  $\mu$  de  $f$  est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE  $\lambda$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ;
- (iii) il existe donc une fonction  $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}^+$  appartenant à  $L^1(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}), \lambda)$  pour laquelle

$$d\mu(z) = \varphi(z)d\lambda(z).$$

**Remarque 12.2.** La transformation  $f$  est ergodique vis-à-vis de la mesure  $\mu$  et préserve la classe de la mesure de LEBESGUE. Il revient donc au même

de dire que  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\lambda$  ou de dire que la partie absolument continue  $\mu_a$  dans la décomposition de LEBESGUE de  $\mu$  est non nulle.

### 12.1. Exposants de Lyapounoff.

Dans toute la suite, la droite projective complexe est identifiée à la sphère  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbf{R}^3$ , que l'on munit de sa métrique riemannienne de courbure 1 et d'aire  $4\pi$ . Il s'agit bien sûr d'une métrique kählérienne. Les normes des vecteurs  $v$  tangents à la droite projective sont notées  $|v|$ .

L'exposant de LYAPOUNOFF  $\chi$  de  $f$  vis-à-vis de  $\mu$  est un nombre réel strictement positif satisfaisant

$$\chi = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbf{C})} \log(|f'(z)|) d\mu(z).$$

Si  $z$  est un point  $\mu$ -générique, on sait que

$$\chi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log |(f^n)'(z)| \right).$$

Sans hypothèse particulière sur  $\mu$ , nous savons que pour  $\mu$ -presque tout point  $z$  et pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $N(z, \varepsilon)$  tel que

$$\exp((\chi - \varepsilon)n) \leq |(f^n)'(z)| \leq \exp((\chi + \varepsilon)n)$$

dès que  $n \geq N(z, \varepsilon)$ . Dans ce paragraphe, nous allons préciser cette inégalité en supposant que  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE.

Pour toute paire de nombres réels strictement positifs  $(\alpha, \beta)$ , notons  $X_{\alpha, \beta}$  le sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  défini par

$$z \in X_{\alpha, \beta} \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi(z) \leq \beta.$$

Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  tendent simultanément vers 0 et  $+\infty$ , la mesure  $\mu(X_{\alpha, \beta})$  tend vers 1.

Souvent, notamment au paragraphe 12.4, nous aurons également besoin d'adjoindre à  $X_{\alpha, \beta}$  les contraintes suivantes :

- $\varphi : X_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathbf{R}$  est continue (appliquer le théorème de LUSIN) ;
- tout point  $z$  de  $X_{\alpha, \beta}$  est un point de densité pour la fonction  $\varphi$  (resp. pour les fonctions  $\varphi \circ f^n$  ou  $|(f^n)'|^2 \varphi \circ f^n$ ), ce qui signifie que

$$\varphi(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\{|w-z| \leq r\}} \varphi(w) d\lambda(w).$$

**Proposition 12.3.** *Pour  $\mu$ -presque tout point  $z$  de  $X_{\alpha,\beta}$ , il existe une suite d'entiers  $n_k$  de densité strictement positive dans  $\mathbf{N}$  telle que*

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{|(f^{n_k})'(z)|^2}{d^{n_k}} \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

pour tout indice  $k$ .

*Démonstration.* Notons  $X'_{\alpha,\beta}$  l'ensemble des points de  $X_{\alpha,\beta}$  qui ne soient pas des points critiques de  $f$  et de ses itérés (on rappelle que  $\mu$  ne charge pas les points critiques de  $f$ ). D'après le théorème de récurrence de POINCARÉ, l'orbite  $\{f^n(x), n \geq 0\}$  de presque tout point  $x$  de  $X'_{\alpha,\beta}$  intersecte  $X'_{\alpha,\beta}$  le long d'une suite  $n_k$  dont la densité est de l'ordre de  $\mu(X_{\alpha,\beta})$ .

Soient  $x$  un élément de  $X'_{\alpha,\beta}$ ,  $n$  un entier positif et  $A$  un disque centré en  $x$  sur lequel  $f^n$  soit injective, de sorte que  $f^n$  réalise une bijection holomorphe de  $A$  sur  $f^n(A)$ . L'équation  $f^*\mu = d\mu$  et la définition de la densité  $\varphi$  fournissent les relations suivantes,

$$\begin{aligned} d^n \int_A \varphi(z) d\lambda(z) &= d^n \int_A d\mu \\ &= \int_{f^n(A)} d\mu \\ &= \int_A \varphi(f^n(z)) |(f^n)'(z)|^2 d\lambda(z). \end{aligned}$$

Quitte à restreindre  $X'_{\alpha,\beta}$  sans changer sa mesure, nous pouvons supposer que  $x$  est un point de densité pour  $\varphi$  et pour les fonctions  $\varphi(f^n(\cdot)) |(f^n)'(\cdot)|^2$ . Faisant tendre le rayon du disque  $A$  vers 0, nous obtenons alors

$$\varphi(f^n(x)) |(f^n)'(x)|^2 = d^n \varphi(x).$$

Le long de la suite  $n_k$ , le point  $f^{n_k}(x)$  appartient à  $X_{\alpha,\beta}$ , donc  $\varphi$  est compris entre  $\alpha$  et  $\beta$  et l'on conclut la démonstration avec l'équation précédente.  $\square$

L'encadrement fourni par la proposition 12.3 montre que l'exposant de LYAPOUNOFF de  $f$  vis-à-vis de  $\mu$  est égal à  $\log(\sqrt{d})$  :

**Corollaire 12.4.** *Soit  $f$  un endomorphisme de la droite projective de degré  $d \geq 2$ . Si la mesure d'entropie maximale  $\mu$  de  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE, l'exposant de LYAPOUNOFF de  $f$  vis-à-vis de  $\mu$  est égal à  $\log(\sqrt{d})$ .*

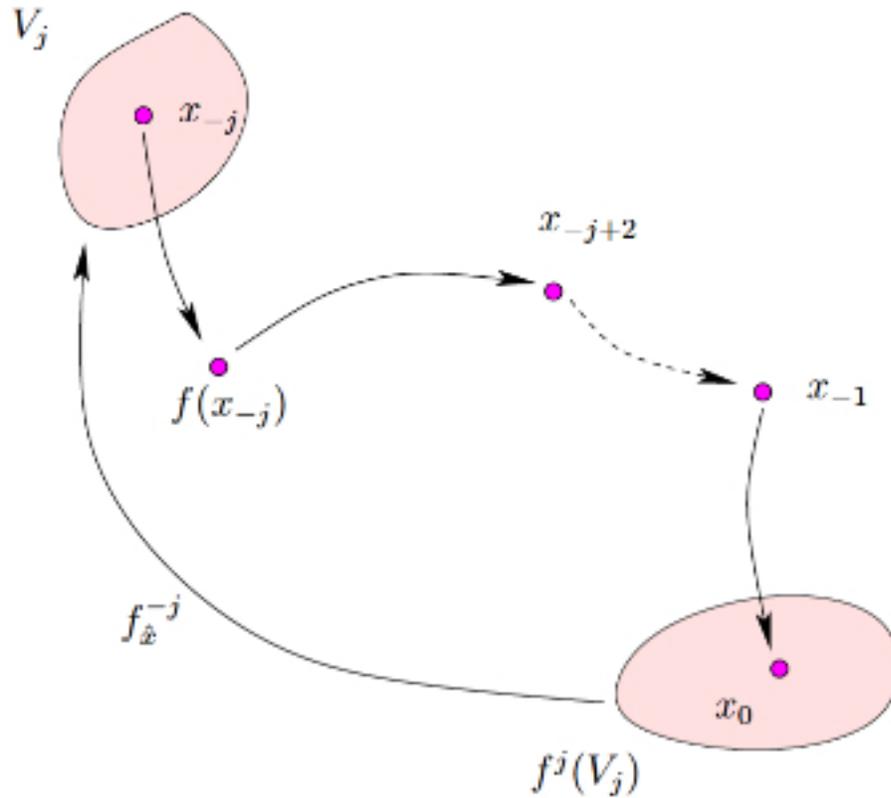


FIGURE 5. Orbites négatives.

**Remarque 12.5.** Ceci correspond à la valeur minimale de l'exposant de LYAPOUNOFF pour les endomorphismes de degré  $d$ . On peut caractériser les exemples de LATTÈS de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  par la minimalité de leurs exposants de LYAPOUNOFF (voir [76] et les références qui s'y trouvent). Voir [98], paragraphes 1.3 et 3.4.1, pour diverses caractérisations des exemples de LATTÈS dans cet esprit.

## 12.2. Extension naturelle et branches inverses de $f$ .

L'endomorphisme  $f$  n'est pas inversible, mais on peut tout de même l'itérer négativement en choisissant, à chaque itération, une des  $d$  pré-images du point itéré. Nous aurons besoin de quelques notations relatives à ce procédé.

Notons  $\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C})$  le sous-espace topologique du produit  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})^{\mathbf{Z}}$  défini par

$$\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C}) = \left\{ (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})^{\mathbf{Z}}; \quad f(x_i) = x_{i+1}, \forall i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

L'endomorphisme  $f$  s'étend à  $\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C})$  en la bijection  $\hat{f}$  qui consiste à décaler chaque suite  $(x_i)$  d'un cran vers la gauche. La mesure  $\mu$  peut-être étendue en une mesure de probabilité  $\hat{\mu}$  sur  $\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C})$  qui est  $\hat{f}$ -invariante (voir [56]).

Si  $\hat{x} = (x_i)$  est un point de  $\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C})$ , dont l'orbite  $\{x_i\}$  n'intersecte pas l'ensemble critique de  $f$ , la suite des points  $x_{-j}, j \geq 0$ , fixe un choix d'applications inverses locales pour les  $f^j$  : pour chaque entier  $j \geq 0$  il existe un voisinage  $V_j$  de  $x_{-j}$  sur lequel  $f^j$  est injective ;  $f^j$  réalise alors un difféomorphisme local de  $V_j$  sur un voisinage de  $x_0$  et le difféomorphisme réciproque est noté  $f_{\hat{x}}^{-j}$ . L'application  $f_{\hat{x}}^{-j}$  est appelée « branche inverse » de  $f^j$  (ou de  $f$ ). Elle dépend de  $j$  et du choix des images réciproques successives de  $x_0$  entre  $x_{-1}$  et  $x_{-j}$ . Le domaine de définition des branches inverses  $f_{\hat{x}}^{-j}$  est contrôlé par le lemme suivant.

**Lemme 12.6.** *Pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe deux fonctions mesurables  $r : \hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C}) \rightarrow ]0, 1]$  et  $C : \hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C}) \rightarrow [1, +\infty[$ , telles que*

- (i) *les branches inverses  $f_{\hat{x}}^{-n}$  existent sur le disque  $\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x}))$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r(\hat{x})$  pour tout entier  $n$  positif,*
- (ii) *la constante de LIPSCHITZ de  $f^{-n}$  en restriction au disque  $\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x}))$  est inférieure ou égale à*

$$C(\hat{x}) \exp(-n(\chi - \varepsilon)),$$

*ceci pour  $\hat{\mu}$ -presque tout point  $\hat{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ .*

Cet énoncé n'utilise pas l'absolue continuité de  $\mu_f$  ; nous renvoyons à [34] et [24] pour la démonstration.

### 12.3. Linéarisation.

Nous allons maintenant décrire un processus de « linéarisation » le long des orbites de  $f$  (pas nécessairement le long d'une orbite périodique).

Plaçons nous dans le contexte du lemme précédent et étudions la suite des branches inverses  $f_{\hat{x}}^{-n}$  en restriction au disque  $\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x}))$ . L'ensemble

$$f_{\hat{x}}^{-n}(\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x})))$$

est contenu dans un disque centré en  $x_{-n}$  et de rayon majoré par

$$C(\hat{x}) \exp(-n(\chi + \varepsilon)) r(\hat{x}).$$

Puisque  $f_{\hat{x}}^{-n}$  est injective sur  $\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x}))$ , nous pouvons appliquer le lemme du quart de KOEBE, ce qui montre que  $f_{\hat{x}}^{-n}(\mathbb{D}(x_0, r(\hat{x})))$  contient un disque centré en  $x_{-n}$  de rayon

$$\frac{1}{4} |(f^{-n})'_{\hat{x}}(x_0)| r(\hat{x}) = \frac{r(\hat{x})}{4 |(f^n)'(x_{-n})|}.$$

Soit  $z$  un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Le point  $-(1/\bar{z})$  est distinct de  $z$ . En envoyant ce point à l'infini, on dispose donc d'une structure affine sur le complémentaire. Nous noterons  $h_z$  toute application de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{-1/\bar{z}\}$  qui est affine et envoie le disque de centre 0 et de rayon 1/100 pour la métrique euclidienne de  $\mathbf{C}$  sur le disque de centre  $z$  et de rayon 1/100 pour la métrique usuelle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

Notons alors  $\Psi_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  la suite d'applications

$$\Psi_n(z) = f^n \circ h_{x_{-n}}(z/(f^n)'(x_{-n})).$$

Restreignons cette suite au disque de centre 0 et de rayon  $r(\hat{x})/4$ . Il s'agit d'une suite d'applications injectives à valeurs dans le disque de centre  $x_0$  et de rayon  $r(\hat{x})$ . Par le théorème de MONTEL, la suite  $\Psi_n$  forme donc une famille normale et la limite  $\Psi$  de toute sous-suite convergente est injective.

**Lemme 12.7.** *Pour  $\mu$ -presque tout point  $\hat{x}$  de  $\hat{\mathbb{P}}^1(\mathbf{C})$ , il existe une suite  $n_j$  d'entiers tendant vers  $+\infty$  telle que la suite d'applications*

$$\Psi_{n_j}(z) = f^{n_j} \circ h_{x_{-n_j}}(z/(f^{n_j})'(x_{-n_j}))$$

*converge uniformément sur un disque de centre 0 vers une application holomorphe injective  $\Psi_{\hat{x}}$  le long de la suite  $n_j$ .*

Revenons maintenant à la situation du théorème 11.18 et précisons cette construction en utilisant la proposition 12.3. Nous savons ainsi que la suite des dérivées des  $f^n$  satisfait l'inégalité

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{|(f^n)'(x_{-n})|^2}{d^n} \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

le long d'une suite  $n_k$  tendant vers  $+\infty$ . Passons à la limite le long de cette sous-suite en reportant cette inégalité dans la définition des  $\Psi_n$ , nous obtenons

$$f^n(h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n)) \rightarrow \Psi_{\hat{x}}$$

sur le disque de centre 0 et de rayon minoré par  $(\alpha/\beta)r(\hat{x})/4$ . On peut donc remplacer les dérivées  $(f^n)'(x_{-n})$  par  $\sqrt{d}^n$ .

**Remarque 12.8.** En dimension plus grande, par exemple pour les endomorphismes de  $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ , il faut se passer du lemme du quart de KOEBE pour construire des linéarisantes  $\Psi_{\hat{x}}$ . C'est ce qu'arrivent à obtenir BERTELOOT et DUPONT (voir [24]).

#### 12.4. Application.

Utilisant les notations et résultats précédents, nous allons montrer que les mesures  $\Psi_{\hat{x}}^*\mu$  sont proportionnelles à la mesure de LEBESGUE

$$d\Lambda = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

de  $\mathbf{C}$ . Par définition de  $\Psi_{\hat{x}}$ , nous avons tout d'abord (en notant  $n$  à la place de  $n_j$  pour simplifier les notations)

$$\Psi_{\hat{x}}^*d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f^n \circ h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right)^* d\mu \quad (12.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \left( h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right)^* d\mu \quad (12.2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \left( h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right)^* \varphi d\lambda. \quad (12.3)$$

Utilisant maintenant les contraintes imposées à  $X_{\alpha,\beta}$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \left( h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right)^* d\lambda = d\Lambda,$$

nous obtenons

$$\Psi_{\hat{x}}^*d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left( h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right) \frac{1}{d^n} \left( h_{x_{-n}}(z/\sqrt{d}^n) \right)^* d\lambda \quad (12.4)$$

$$= \varphi(x_0)d\Lambda. \quad (12.5)$$

Ceci montre le résultat annoncé.

Par conséquent, la mesure  $\mu$  est lisse sur un ouvert autour du point générique  $x_0$ . Puisque les points périodiques répulsifs de  $f$  sont denses dans le

support de  $\mu$ , il existe au moins un point périodique  $m$  tel que la mesure  $\mu$  soit lisse au voisinage de  $m$ . Si  $q$  est la période de  $m$ , nous avons alors

$$(f^q)'(m) = \chi \quad \text{avec} \quad |\chi| = (\sqrt{d})^q,$$

et nous pouvons réappliquer le procédé de linéarisation au point  $m$  pour obtenir une application holomorphe  $\Psi_m : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  satisfaisant

- $\Psi_m(0) = m$  et  $\Psi_m$  est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de  $m$  ;
- $\Psi_m(\chi z) = f^q(\Psi_m(z))$  ;
- $\Psi_m^* d\mu = \varphi(m) d\Lambda$  ;
- $\Psi_m$  est surjective :  $\Psi_m(\mathbf{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

*Démonstration.* La seule chose qu'il reste à démontrer est la surjectivité de  $\Psi_m$ . Par le théorème de PICARD, l'image de  $\Psi_m$  évite au plus deux points, et l'ensemble évité par  $\Psi_m$  est totalement invariant par  $f^q$ . Ainsi,  $f^{2q}$  est conjuguée à

$$z \mapsto z^{d^{2q}}$$

au voisinage de tous les points évités par  $\Psi_m$ . Si un point est évité par  $\Psi_m$ , c'est donc un point superattractif et la mesure  $\mu$  est nulle au voisinage de ce point. L'application  $\Psi_m$  devrait donc éviter un voisinage de ce point, ce qui est impossible.  $\square$

Puisque  $\Psi_m$  est surjective, la mesure  $\mu_f$  est partout lisse. En particulier,  $\mu_f$  est lisse au voisinage des points fixes de  $f$  et l'on peut supposer que  $q = 1$ .

### 12.5. Monodromie de $\Psi_m$ et conclusion.

Nous sommes maintenant en mesure de conclure la preuve du théorème 11.18 (en dimension 1). Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux points de  $\mathbf{C}$  ayant la même image par  $\Psi_m$  et en lesquels la dérivée de  $\Psi_m$  n'est pas nulle. Il existe alors un germe de difféomorphisme holomorphe  $\gamma : (\mathbf{C}, z_1) \rightarrow (\mathbf{C}, z_2)$  tel que

$$\Psi_m \circ \gamma = \Psi_m.$$

Puisque  $\Psi_m^* \mu$  est proportionnelle à la forme  $(i/2) dz \wedge d\bar{z}$ , nous en déduisons que  $\gamma$  préserve cette forme d'aire. Ainsi, l'application holomorphe  $\gamma$  a une dérivée de module constant ; ceci implique que  $\gamma$  coïncide avec le

germe d'une application affine

$$z \mapsto uz + t$$

pour laquelle  $|u| = 1$  et  $uz_1 + t = z_2$ . Nous pouvons donc étendre  $\gamma$  en une bijection affine de la droite complexe. Les applications ainsi construites forment un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Aff}(\mathbf{C})$  satisfaisant

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \Psi_m \circ \gamma = \Psi_m.$$

C'est le « groupe de monodromie de  $\Psi_m$  ».

**Remarque 12.9.** En dimension supérieure, il y a beaucoup de difféomorphismes holomorphes qui préservent la mesure de LEBESGUE sans être affines. L'argument qui vient d'être donné ne s'étend donc pas tel quel. Après avoir montré que la mesure  $\mu_f$  est lisse en utilisant un procédé de linéarisation adéquat (voir la remarque 12.8), BERTELOOT et DUPONT utilisent l'existence d'un courant  $T^+$  tel que  $\mu_f = T^+ \wedge \dots \wedge T^+$ . La lissité de  $\mu_f$  force la lissité de  $T^+$ . L'invariance de  $T^+$  par les applications de monodromie  $\gamma$  permet alors de montrer que celles-ci sont affines et unitaires.

Les orbites de  $\Gamma$  sont discrètes, car sinon  $\Psi_m$  serait constante par le théorème des zéros isolés. Puisque  $\Psi_m(\mathbf{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , l'image de  $\Psi_m$  est compacte et, par conséquent, l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{C}$  est à la fois discrète et cocompacte. Ceci implique que le sous-groupe distingué  $\Gamma_0$  formé des éléments de  $\Gamma$  qui sont des translations agit également de manière cocompacte. Nous noterons  $E$  la courbe elliptique obtenue par passage au quotient,

$$E = \mathbf{C}/\Gamma_0.$$

La relation d'équivariance vérifiée par  $\Psi_m$  montre que la conjugaison par l'homothétie

$$z \mapsto \chi z$$

stabilise les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma_0$ . En particulier, la multiplication par  $\chi$  détermine un endomorphisme  $F$  de  $E$ . Enfin, le groupe fini  $G = \Gamma/\Gamma_0$  agit sur  $E$ , le quotient s'identifiant à la sphère de RIEMANN :

$$\Psi_m(\mathbf{C}) = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) = E/G.$$

L'endomorphisme  $F$  passe au quotient et l'application induite sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  coïncide avec  $f$ , ce qui montre que  $f$  est un exemple de LATTÈS.



## RÉFÉRENCES

- [1] Dmitri N. Akhiezer. *Lie group actions in complex analysis*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.
- [2] Ekaterina Amerik. On a problem of Noether-Lefschetz type. *Compositio Math.*, 112(3) :255–271, 1998.
- [3] Ekaterina Amerik. On endomorphisms of projective bundles. *Manuscripta Math.*, 111(1) :17–28, 2003.
- [4] Ekaterina Amerik. A computation of invariants of a rational self-map. 2007.
- [5] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique trivial. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(2, part 1) :509–545, 2008.
- [6] Ekaterina Amerik, Marat Rovinsky, and Antonius Van de Ven. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(2) :405–415, 1999.
- [7] Aldo Andreotti. Sopra le superficie algebriche che posseggono trasformazioni birazionali in sé. *Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl.*, 9(5) :255–279, 1950.
- [8] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] Wolf P. Barth.  $K3$  surfaces with nine cusps. *Geom. Dedicata*, 72(2) :171–178, 1998.
- [10] Arnaud Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4) :755–782 (1984), 1983.
- [11] Arnaud Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :53–58, 2001.
- [12] Arnaud Beauville and Ron Donagi. La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(14) :703–706, 1985.
- [13] Eric Bedford and Jeffrey Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.*, 128(2) :331–368, 2005.
- [14] Eric Bedford and Jeffrey Diller. Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane : the golden mean subshift. *Amer. J. Math.*, 127(3) :595–646, 2005.
- [15] Eric Bedford and Kyounghee Kim. Dynamics of rational surface automorphisms : Linear fractional recurrences. *preprint*, 2006.
- [16] Eric Bedford and Kyounghee Kim. Periodicities in linear fractional recurrences : degree growth of birational surface maps. *Michigan Math. J.*, 54(3) :647–670, 2006.
- [17] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . *Invent. Math.*, 114(2) :277–288, 1993.
- [18] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1) :77–125, 1993.

- [19] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . VI. Connectivity of *J. Ann. of Math. (2)*, 148(2) :695–735, 1998.
- [20] Eric Bedford and John Smillie. Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy : Tangencies. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :1–26, 2004.
- [21] Yves Benoist, Patrick Foulon, and François Labourie. Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1) :33–74, 1992.
- [22] Yves Benoist and François Labourie. Sur les difféomorphismes d’Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables. *Invent. Math.*, 111(2) :285–308, 1993.
- [23] Chal Benson and Carolyn S. Gordon. Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology*, 27(4) :513–518, 1988.
- [24] François Berteloot and Christophe Dupont. Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green. *Comment. Math. Helv.*, 80(2) :433–454, 2005.
- [25] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^k$ . *Bull. Soc. Math. France*, 129(2) :175–188, 2001.
- [26] François Berteloot and Volker Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*, volume 7 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2001.
- [27] José Bertin and Pol Vanhaecke. The even master system and generalized Kummer surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 116(1) :131–142, 1994.
- [28] Christina Birkenhake and Herbert Lange. A family of abelian surfaces and curves of genus four. *Manuscripta Math.*, 85(3-4) :393–407, 1994.
- [29] Jérémy Blanc. On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane. *Michigan Math. J.*, 56(2) :315–330, 2008.
- [30] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on Enriques surfaces. *Math. Res. Lett.*, 5(5) :623–628, 1998.
- [31] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on elliptic  $K3$  surfaces. *Asian J. Math.*, 4(2) :351–368, 2000.
- [32] Armand Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341. Hermann, Paris, 1969.
- [33] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [34] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d’un endomorphisme de  $\mathbb{C}P^k$ . *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.
- [35] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d’équilibre d’un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 93 :145–159, 2001.
- [36] Marco Brunella. *Birational Geometry of Foliations*. Impa, 2000.
- [37] Alexander I. Bufetov. Convergence of spherical averages for actions of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 155(3) :929–944, 2002.

- [38] Gregory T. Buzzard and Steven S. Y. Lu. Algebraic surfaces holomorphically dominated by  $\mathbf{C}^2$ . *Invent. Math.*, 139(3) :617–659, 2000.
- [39] Frédéric Campana. Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(3) :307–316, 1995.
- [40] Frédéric Campana. Special varieties and classification theory : an overview. *Acta Appl. Math.*, 75(1-3) :29–49, 2003. Monodromy and differential equations (Moscow, 2001).
- [41] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :901–906, 1999.
- [42] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.
- [43] Serge Cantat. Sur la dynamique du groupe d’automorphismes des surfaces  $K3$ . *Transform. Groups*, 6(3) :201–214, 2001.
- [44] Serge Cantat. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :237–262, 2003.
- [45] Serge Cantat. Difféomorphismes holomorphes Anosov. *Comment. Math. Helv.*, 79(4) :779–797, 2004.
- [46] Serge Cantat. Dynamique diophantienne. *Images des Maths, CNRS*, 3 :41–46, 2004.
- [47] Serge Cantat. Version Kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(5) :759–768, 2004.
- [48] Serge Cantat. Caractérisation des exemples de KUMMER et de LATTÈS. *Compositio Math.*, à paraître, 2005.
- [49] Serge Cantat. Groupes de transformations birationnelles du plan. *manuscript*, pages 1–50, 2006.
- [50] Serge Cantat and Charles Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, Corrigendum in vol 582, p. 229–231, 2005, 2003.
- [51] Serge Cantat and Stéphane Le Borgne. Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires. *Int. Math. Res. Not.*, (56) :3479–3510; corrigendum on <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html>, 2005.
- [52] Antoine Chambert-Loir. Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich. *J. Reine Angew. Math.*, 595 :215–235, 2006.
- [53] Laurent Clozel and Emmanuel Ullmo. Correspondances modulaires et mesures invariantes. *J. Reine Angew. Math.*, 558 :47–83, 2003.
- [54] Laurent Clozel and Emmanuel Ullmo. Rigidité de l’action des opérateurs de Hecke sur les espaces de réseaux. *Math. Ann.*, 326(2) :209–236, 2003. With an appendix by Y. Shalom.
- [55] Arthur B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*. Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publication, vol. X. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

- [56] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai. *Ergodic theory*, volume 245 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1982. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ.
- [57] Henry de Thélin. Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes. *Invent. Math.*, 172(1) :89–116, 2008.
- [58] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [59] Julie Déserti. Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 71701, 27, 2006.
- [60] Tien-Cuong Dinh. Decay of correlations for Hénon maps. *Acta Math.*, 195 :253–264, 2005.
- [61] Tien-Cuong Dinh. Distribution des préimages et des points périodiques d’une correspondance polynomiale. *Bull. Soc. Math. France*, 133(3) :363–394, 2005.
- [62] Tien Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamique des endomorphismes holomorphes. *prépublication d’Orsay*, 2002.
- [63] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Sur les endomorphismes holomorphes permutable de  $\mathbb{P}^k$ . *Math. Ann.*, 324(1) :33–70, 2002.
- [64] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamique des applications d’allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(4) :367–423, 2003.
- [65] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Groupes commutatifs d’automorphismes d’une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.*, 123(2) :311–328, 2004.
- [66] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6) :959–971, 2004.
- [67] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2) :291–312 (electronic), 2005.
- [68] Tien Cuong Dinh and Nessim Sibony. Une borne supérieure pour l’entropie topologique d’une application rationnelle. *Ann. of Math. (2)*, 161(3), 2005.
- [69] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(5) :754–768, 2006.
- [70] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications. *Comment. Math. Helv.*, 81(1) :221–258, 2006.
- [71] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics. *Preprint arXiv :math/0703702 ;Acta Math, à paraître*, 2007.
- [72] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Upper bound for the topological entropy of a meromorphic correspondence. *Israel J. Math.*, 163 :29–44, 2008.
- [73] Igor V. Dolgacev. On rational surfaces with a pencil of elliptic curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30 :1073–1100, 1966. en russe.
- [74] Romain Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.*, 131(2) :219–247, 2006.

- [75] Christophe Dupont. Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de  $\mathbb{C}^n$ . *Manuscripta Math.*, 111(3) :357–378, 2003.
- [76] Christophe Dupont. Formule de Pesin et applications méromorphes. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 37(3) :393–418, 2006.
- [77] Charles Favre. Les applications monomiales en deux dimensions. *Michigan Math. J.*, 51(3) :467–475, 2003.
- [78] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(4) :271–276, 2004.
- [79] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex Hénon mappings in  $\mathbb{C}^2$  and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.*, 65(2) :345–380, 1992.
- [80] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimensions. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.
- [81] John Franks and Michael Handel. Distortion elements in group actions on surfaces. *Duke Math. J.*, 131(3) :441–468, 2006.
- [82] Akira Fujiki. On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 44(3) :225–258, 1978.
- [83] Yoshio Fujimoto and Noboru Nakayama. Compact complex surfaces admitting non-trivial surjective endomorphisms. *Tohoku Math. J. (2)*, 57(3) :395–426, 2005.
- [84] Étienne Ghys. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(2) :251–270, 1987.
- [85] Étienne Ghys. Rigidité différentiable des groupes fuchsien. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :163–185 (1994), 1993.
- [86] Étienne Ghys. Holomorphic Anosov systems. *Invent. Math.*, 119(3) :585–614, 1995.
- [87] Étienne Ghys. Actions de réseaux sur le cercle. *Invent. Math.*, 137(1) :199–231, 1999.
- [88] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4) :329–407, 2001.
- [89] Étienne Ghys and Alberto Verjovsky. Locally free holomorphic actions of the complex affine group. In *Geometric study of foliations (Tokyo, 1993)*, pages 201–217. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
- [90] Marat H. Gizatullin. Rational  $G$ -surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.
- [91] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [92] M. Gromov. Entropy, homology and semialgebraic geometry. *Astérisque*, (145-146) :5, 225–240, 1987. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86.
- [93] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53 :53–73, 1981.

- [94] Mikhaïl Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [95] Vincent Guedj. Courants extrémaux et dynamique complexe. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(3), 2005.
- [96] Vincent Guedj. Entropie topologique des applications méromorphes. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(06), 2005.
- [97] Vincent Guedj. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Ann. of Math. (2)*, 161(3), 2005.
- [98] Vincent Guedj. Propriétés ergodiques des applications rationnelles. *Ce volume*, 2006.
- [99] Brian Harbourne. Blowings-up of  $\mathbf{P}^2$  and their blowings-down. *Duke Math. J.*, 52(1) :129–148, 1985.
- [100] Brian Harbourne. Automorphisms of cuspidal  $K3$ -like surfaces. In *Algebraic geometry : Sundance 1988*, volume 116 of *Contemp. Math.*, pages 47–60. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [101] Boris Hasselblatt and James Propp. Degree-growth of monomial maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(5) :1375–1397, 2007.
- [102] Moris W. Hirsch, Charles C. Pugh, and Michael Shub. *Invariant manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583.
- [103] John Hubbard, Peter Papadopol, and Vladimir Veselov. A compactification of Hénon mappings in  $\mathbf{C}^2$  as dynamical systems. *Acta Math.*, 184(2) :203–270, 2000.
- [104] John H. Hubbard and Ralph W. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79) :5–46, 1994.
- [105] Vassilii A. Iskovskih and Yuri I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 86(128) :140–166, 1971.
- [106] Vassilii A. Iskovskih and Yuri G. Prokhorov. Fano varieties. In *Algebraic geometry, V*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–247. Springer, Berlin, 1999.
- [107] Vadim A. Kaimanovich and Howard Masur. The Poisson boundary of the mapping class group. *Invent. Math.*, 125(2) :221–264, 1996.
- [108] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza*. Cambridge : Cambridge University Press., 1997.
- [109] Jong Hae Keum. Automorphisms of Jacobian Kummer surfaces. *Compositio Math.*, 107(3) :269–288, 1997.
- [110] Jonghae Keum and Shigeyuki Kondō. The automorphism groups of Kummer surfaces associated with the product of two elliptic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4) :1469–1487 (electronic), 2001.
- [111] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

- [112] Shigeyuki Kondō. The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface. *J. Algebraic Geom.*, 7(3) :589–609, 1998.
- [113] Robert Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. In *Complete intersections (Acireale, 1983)*, pages 29–61. Springer, Berlin, 1984.
- [114] David I. Lieberman. Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.
- [115] Ricardo Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics*, volume 8 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Portuguese by Silvio Levy.
- [116] Hideyuki Matsumura and Paul Monsky. On the automorphisms of hypersurfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 :347–361, 1963/1964.
- [117] Barry Mazur. The topology of rational points. *Experiment. Math.*, 1(1) :35–45, 1992.
- [118] Curtis T. McMullen. Dynamics on  $K3$  surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.
- [119] Curtis T. McMullen. Algebra and dynamics. *Lecture Notes*, <http://abel.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/03/html/index.html>, pages 1–108, 2004.
- [120] Curtis T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :49–89, 2007.
- [121] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [122] John Milnor. On Lattès maps. In *Dynamics on the Riemann sphere*, pages 9–43. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [123] David Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [124] Masayoshi Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32 :351–370, 1960.
- [125] Masayoshi Nagata. On rational surfaces. II. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 33 :271–293, 1960/1961.
- [126] Noboru Nakayama. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math.*, 56(2) :433–446, 2002.
- [127] Noboru Nakayama and De-Qi Zhang. Building bloks of étale endomorphisms of complex projective manifolds. *preprint*, pages 1–39, 2007.
- [128] Andrés Navas. Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5) :749–758, 2002.
- [129] Amos Nevo and Elias M. Stein. A generalization of Birkhoff’s pointwise ergodic theorem. *Acta Math.*, 173(1) :135–154, 1994.

- [130] Kapil H. Paranjape and Vasudevan Srinivas. Self-maps of homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 98(2) :425–444, 1989.
- [131] Jorge Vitório Pereira and Percy Fernández Sánchez. Transformation groups of holomorphic foliations. *Comm. Anal. Geom.*, 10(5) :1115–1123, 2002.
- [132] Klaus Peters. Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.*, 15 :222–231, 1964.
- [133] Leonid Polterovich. Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry. *Invent. Math.*, 150(3) :655–686, 2002.
- [134] A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of a three-dimensional quartic with a simple singularity. *Mat. Sb. (N.S.)*, 135(177)(4) :472–496, 559, 1988.
- [135] Mary Rees. Positive measure sets of ergodic rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(3) :383–407, 1986.
- [136] Richard Sacksteder. The measures invariant under an expanding map. In *Géométrie différentielle (Colloq., Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1972)*, pages 179–194. Lecture Notes in Math., Vol. 392. Springer, Berlin, 1974.
- [137] Michael Schlessinger. Rigidity of quotient singularities. *Invent. Math.*, 14 :17–26, 1971.
- [138] Jean-Pierre Serre. Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil. *Ann. of Math. (2)*, 71 :392–394, 1960.
- [139] Francesco Severi. Sulle trasformate razionali di un'ipersuperficie algebrica priva di punti multipli. *Math. Ann.*, 109(1) :4–6, 1934.
- [140] Michael Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. J. Math.*, 91 :175–199, 1969.
- [141] Michael Shub and Dennis Sullivan. Expanding endomorphisms of the circle revisited. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2) :285–289, 1985.
- [142] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$ . In *Dynamique complexe*, pages 97–185. Panoramas et Synthèses, S.M.F., 1999.
- [143] Joseph H. Silverman. Rational points on  $K3$  surfaces : a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2) :347–373, 1991.
- [144] Tomoyuki Takenawa. Discrete dynamical systems associated with root systems of indefinite type. *Comm. Math. Phys.*, 224(3) :657–681, 2001.
- [145] Tetsuo Ueda. Complex dynamical systems on projective spaces. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, (814) :169–186, 1992. Topics around chaotic dynamical systems (Japanese) (Kyoto, 1992).
- [146] Tetsuo Ueda. Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces. *J. Geom. Anal.*, 8(2) :319–334, 1998.
- [147] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Notes written in collaboration with P. Chenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.
- [148] Claire Voisin. Intrinsic pseudo-volume forms and  $K$ -correspondences. In *The Fano Conference*, pages 761–792. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [149] Jörg Winkelmann. Holomorphic self-maps of parallelizable manifolds. *Transform. Groups*, 3(1) :103–111, 1998.

- [150] Dave Witte. Arithmetic groups of higher  $\mathbf{Q}$ -rank cannot act on 1-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(2) :333–340, 1994.
- [151] Yosi Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.
- [152] De-Qi Zhang. A theorem of Tits type for compact Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 176(3) :449–459, 2009.
- [153] Shouwu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2) :281–300, 1995.
- [154] Shouwu Zhang. Distributions in algebraic dynamics. *Survey in Differential Geometry, A Tribute to Professor S.-S. Chern*, 10 :381–430, 2006.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
1.1. Dynamique holomorphe	3
1.2. Géométrie et classification	4
1.3. Exemples	5
1.4. Rigidité	6
1.5. Remerciements et excuses	6
<b>Premier chapitre : contraintes géométriques pour l'existence de transformations rationnelles.</b>	7
2. Endomorphismes, transformations rationnelles et entropie	8
2.1. Entropie topologique	8
2.2. Calcul de l'entropie	8
2.3. Entropie nulle	10
2.4. Le cas méromorphe	11
2.5. Recherche d'exemples	13
3. Fibrations invariantes	15
3.1. Dimension de KODAIRA et applications pluricanoniques	15
3.2. Fibration d'ALBANESE	20
3.3. Réduction algébrique	21
3.4. Quotient rationnel	21
3.5. Le coeur	22
3.6. Bilan	22
4. Transformations holomorphes des courbes et des surfaces	23
4.1. Courbes	23
4.2. Surfaces : classification et transformations rationnelles	24
4.3. Automorphismes et transformations birationnelles	25
4.4. Endomorphismes et transformations rationnelles	27
5. Existence d'endomorphismes : trois cas particuliers	29
5.1. Hypersurfaces lisses	29
5.2. Dimension de KODAIRA positive	30
5.3. Images de $\mathbf{C}^k$	33
5.4. Variétés homogènes	34
6. Gros groupes d'automorphismes	39
6.1. Automorphismes des variétés complexes compactes	39
6.2. Transformations birationnelles	41

<b>Deuxième chapitre : exemples de transformations méromorphes</b>	43
7. Les tores, leurs quotients, les exemples de LATTÈS et les exemples de KUMMER	44
7.1. Tore	44
7.2. Quotients	45
7.3. Déformations	47
8. Surfaces K3 et variétés de CALABI-YAU	49
8.1. Variétés de CALABI-YAU	49
8.2. Automorphismes des surfaces K3	50
8.3. Transformations rationnelles des surfaces K3	54
8.4. Deux exemples en dimension supérieure	56
9. Surfaces et variétés (presque) rationnelles	58
9.1. Variétés unirationnelles non rationnelles	58
9.2. Transformations holomorphes des surfaces rationnelles	60
9.3. Transformations monomiales	64
<b>Troisième chapitre : Dynamique et rigidité</b>	68
10. Dynamique	69
10.1. Mesure d'entropie maximale	69
10.2. Transformations cohomologiquement dilatantes	72
10.3. Transformations inversibles	75
10.4. Quelques compléments	78
11. Rigidité	82
11.1. Automorphismes de type ANOSOV	82
11.2. Feuilletages et dynamiques pseudo-ANOSOV des surfaces	85
11.3. Mesure d'entropie maximale lisse	89
12. Exemples de Lattès en dimension 1.	97
12.1. Exposants de Lyapounoff	98
12.2. Extension naturelle et branches inverses de $f$	100
12.3. Linéarisation	101
12.4. Application	103
12.5. Monodromie de $\Psi_m$ et conclusion	104
Références	107