

THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR LES ENDOMORPHISMES HOLOMORPHES ET LES CORRESPONDANCES MODULAIRES

SERGE CANTAT ET STÉPHANE LE BORGNE

RÉSUMÉ. We apply the Gordin method to prove a central limit theorem for two families of dynamical systems : forward or backward iteration of holomorphic endomorphisms of projective spaces and iteration of modular correspondances.

NOTE. Ce texte est une version remaniée de la version publiée (Int. Math. Res. Not. 2005, no. 56, 3479–3510). L'annexe comportait une erreur qui nous a été signalée par Christophe DUPONT et que nous corrigeons ici. Ceci change une estimation intermédiaire sans changer les résultats principaux du texte. Signalons que l'article de C. DUPONT intitulé "Bernoulli coding map and singular almost-sure invariant principle for endomorphisms of \mathbb{P}^k " développe une approche similaire mais différente pour l'étude des endomorphismes de l'espace projectif, avec des résultats plus précis.

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons d'appliquer une méthode due à Mikhail I. GORDIN pour obtenir un théorème limite central dans deux situations dynamiques différentes : celle des endomorphismes holomorphes de l'espace projectif complexe, d'une part, celle des correspondances modulaires, d'autre part.

1.1. Endomorphismes et correspondances modulaires. Si $f : \mathbb{P}^k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ est une transformation holomorphe de l'espace projectif complexe de dimension k , son entropie topologique est égale au logarithme de son degré topologique d_t ,

$$h_{\text{top}}(f) = \log(d_t).$$

Celle-ci est donc strictement positive dès que le degré topologique de f est supérieur ou égal à 2, ce que nous supposons dorénavant. On sait alors associer à f une mesure de probabilité μ_f sur l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ qui jouit de propriétés ergodiques remarquables :

- μ_f est l'unique mesure de probabilité f -invariante d'entropie maximale (voir [8]) ;
- les points périodiques répulsifs de f s'équirépartissent vers μ_f et les exposants de LYAPOUNOFF de μ_f sont minorés par $h_{\text{top}}(f)/2k$ (voir [7]) ;
- le triplet $(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}), f, \mu_f)$ est un système de BERNOULLI (voir [5] et [6]).

Le premier but du présent article est de montrer que la méthode employée par BRIEND, DUVAL et LYUBICH pour obtenir ces propriétés ergodiques peut être

couplée à celle de GORDIN pour établir un théorème limite central pour des fonctions höldériennes.

Signalons dès à présent que le théorème limite central a été obtenu simultanément par DINH et SIBONY dans le cadre plus général des transformations méromorphes des variétés kählériennes dont le degré topologique domine les autres degrés dynamiques, mais pour des observables lipschitziennes (voir [18]). Par ailleurs, comme nous l'a signalé Nessim SIBONY, l'estimée principale obtenue pour démontrer le théorème limite central résulte facilement du chapitre 8 de [19] lorsque l'observable est de classe \mathcal{C}^2 (voir aussi [17]).

Dans un deuxième temps, nous montrerons un théorème limite central pour la chaîne de MARKOV qui consiste à itérer l'endomorphisme f négativement en choisissant, à chaque itération, une image réciproque du point x aléatoirement et de manière équiprobable parmi les d_t éléments de $f^{-1}\{x\}$.

Dans un troisième temps, nous obtiendrons le théorème limite central pour les correspondances modulaires. Il s'agit d'employer la méthode de GORDIN en s'appuyant sur les estimées obtenues par CLOZEL, OH et ULLMO. Voici le contexte. Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} , presque simple et connexe, dont la partie réelle $G(\mathbf{R})$ n'est pas compacte. Soient Γ un sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Q})$ et K un sous-groupe compact maximal de G . Soit X l'espace localement symétrique $\Gamma \backslash G/K$ et λ la mesure de probabilité sur X obtenue par quotient d'une mesure de HAAR de G . Si a est un élément de $G(\mathbf{Q})$, le groupe $\Gamma_a = a^{-1}\Gamma a \cap \Gamma$ est d'indice fini dans Γ et dans $a^{-1}\Gamma a$. En particulier, la variété $Y_a = \Gamma_a \backslash G/K$ possède deux revêtements finis de même degré sur X , définis par

$$\pi_1(\Gamma_a y) = \Gamma y \quad \text{et} \quad \pi_2(\Gamma_a y) = \Gamma a y.$$

La transformation multivaluée $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : X \rightarrow X$ détermine une correspondance sur X , dite correspondance modulaire ou correspondance de HECKE. Si l'on munit G/K d'une métrique invariante à gauche sous G , celle-ci passe au quotient en une métrique sur X et sur Y_a pour lesquelles π_1 et π_2 sont des revêtements riemanniens. La correspondance est donc localement isométrique, ce qui diffère fortement du cas des endomorphismes de l'espace projectif puisque ceux-ci ont des exposants de LYAPOUNOFF strictement positifs vis-à-vis de leur mesure d'entropie maximale.

1.2. Théorème limite central. Soit (M, \mathcal{T}, f, μ) un système dynamique probabilisé, ce qui signifie que $f : M \rightarrow M$ est une transformation mesurable de l'espace mesurable (M, \mathcal{T}) qui préserve la mesure de probabilité μ . Si φ est une fonction mesurable de M vers \mathbf{R} , les fonctions $X_k = \varphi \circ f^k$ forment une suite de variables

aléatoires sur l'espace probabilisé (M, \mathcal{T}, μ) ; on s'attache alors à décrire le comportement asymptotique des sommes de BIRKHOFF

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} X_j.$$

L'approche principale consiste à comparer ce comportement à celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par exemple, le théorème ergodique affirme que les X_k satisfont la loi des grands nombres : dès que μ est ergodique et que φ est intégrable, les moyennes $S_N(x)/N$ tendent μ -presque sûrement vers la constante $\int_M \varphi d\mu$.

Poussant l'analyse un cran plus loin, il convient de déterminer si la suite X_k satisfait un théorème limite central. On suppose donc que φ a une moyenne nulle et que son carré est intégrable, puis l'on dit que φ *satisfait le théorème limite central* s'il existe un réel *strictement positif* σ tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left\{ x; \frac{1}{\sqrt{N}} S_N(x) \in A \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

pour tout intervalle de nombres réels A . À ce stade, la situation se complique considérablement et, contrairement à ce qui se produit pour la loi des grands nombres, il devient nécessaire de faire des hypothèses de régularité sur la fonction φ .

Pour s'en convaincre, commençons par quelques remarques. Si l'on additionne à φ un cobord $\psi \circ f - \psi$, où ψ appartient à $L^2(M, \mu)$, ceci ne change pas le fait que φ satisfasse ou non le théorème limite central, ni la valeur de σ . D'autre part, lorsque la mesure μ est ergodique, les cobords $\psi \circ f - \psi$ forment un sous-espace dense de l'espace de HILBERT $L_0^2(M, \mu)$ des fonctions de carré sommable et de moyenne nulle. Mais d'après un théorème de BURTON et DENKER, si μ est ergodique et non atomique, il existe toujours au moins un élément φ de $L_0^2(M, \mu)$ qui satisfait le théorème limite central (voir [9]). Par addition de cobords et de constantes, on en déduit alors que les éléments de $L_0^2(M, \mu)$ qui satisfont le théorème limite central forment un sous-espace dense de $L_0^2(M, \mu)$. À l'opposé, on dispose du théorème suivant de VOLNÝ montrant qu'il existe toujours un sous-ensemble G_δ -dense de fonctions dans $L_0^2(M, \mu)$ pour lesquelles les moyennes de BIRKHOFF suivent des lois arbitraires (voir [34]).

Théorème 1.1 (VOLNÝ). *Soit (M, \mathcal{T}, f, μ) un système dynamique probabilisé, ergodique et sans atome. Il existe un sous-ensemble \mathcal{E} de $L_0^2(M, \mu)$ qui est un G_δ -dense et qui satisfait la propriété suivante : pour tout élément φ de \mathcal{E} et pour toute mesure de probabilité ν sur \mathbf{R} satisfaisant $\int_{\mathbf{R}} t d\nu(t) = 0$ et $\int_{\mathbf{R}} t^2 d\nu(t) = 1$, il existe une suite N_i tendant vers l'infini telle que la loi de*

$$\frac{S_{N_i}}{\|S_{N_i}\|_2}$$

converge vers ν .

Remarque 1.2. Si l'on suppose en outre que le système dynamique est suffisamment mélangeant, la norme $\|S_N\|_2$ se comporte asymptotiquement comme $\sqrt{N}\sigma$ où σ est le nombre strictement positif défini par

$$\sigma^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \langle \varphi | \varphi \circ f^k \rangle.$$

C'est par exemple le cas lorsque f est la multiplication par 2 sur le cercle, que μ est la mesure de Lebesgue et que φ est höldérienne.

Le cadre général des fonctions de carré sommable est donc trop vaste ; il permet tout type de comportement pour les moyennes de BIRKHOFF. Un théorème analogue est d'ailleurs valable dans le cadre des fonctions continues (voir [25]). On s'attend toutefois à ce que le théorème limite central soit valable si la fonction φ est suffisamment régulière et si la dynamique de f est suffisamment mélangeante. C'est le cas, par exemple, si f est une transformation expansive d'une variété compacte, si φ est höldérienne et si μ est la mesure de probabilité f -invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE (voir [32]).

1.3. Énoncés. Le premier résultat que nous obtenons étend un théorème de DENKER, PRZYTICKI et URBAŃSKI valable en une variable complexe (voir [14]) au cadre des endomorphismes holomorphes des espaces projectifs complexes de dimension arbitraire. En dimension un, la preuve que nous présenterons simplifie l'argument de [14] (voir la remarque 5.6).

Théorème 1.3. *Soient f un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ dont le degré topologique est strictement supérieur à 1 et μ_f la mesure d'entropie maximale de f . Si φ est une fonction höldérienne de moyenne nulle pour μ_f , la suite*

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbf{C})} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(f^k(m)) \right)^2 d\mu_f(m)$$

converge vers un nombre positif σ^2 . Ce nombre est nul si et seulement si φ est un cobord. S'il est strictement positif, φ vérifie le théorème limite central de variance σ^2 et les principes d'invariance de DONSKER et de STRASSEN.

Pour ce qui concerne le processus de MARKOV consistant à itérer l'endomorphisme négativement, nous renvoyons le lecteur aux paragraphes 2.2 et 3.6. Signalons toutefois le cas particulier des applications post-critiquement finies, pour lesquelles le théorème limite central est valable en partant de *tout point hors de l'ensemble post-critique* (voir 2.2 et 3.6 pour le calcul de la variance) :

Théorème 1.4. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ post-critiquement fini et de degré topologique strictement plus grand que 1. Soit ϕ une fonction höldérienne*

sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Pour tout point y hors de l'ensemble post-critique de f , ϕ vérifie le théorème limite central partant de y pour le processus de MARKOV associé aux branches inverses de f .

Passons maintenant au cas des correspondances modulaires. Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 4.1 pour les définitions et nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat principal. Reprenons les notations du premier paragraphe et notons T_a l'opérateur pour lequel $T_a\phi(m)$ est la moyenne de ϕ sur l'ensemble $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(m)$.

Théorème 1.5. *Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} qui est presque simple et connexe et dont la partie réelle $G(\mathbf{R})$ n'est pas compacte. Soient Γ un sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Q})$ et K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$. Soit a un élément de $G(\mathbf{Q})$ déterminant une correspondance modulaire extérieure de $X = \Gamma \backslash G(\mathbf{R})/K$. Si le \mathbf{Q} -rang de G est strictement positif, toute fonction mesurable φ sur X de carré sommable et de moyenne nulle telle que la quantité*

$$\sigma^2 = \int_X \varphi^2(m) d\lambda(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \varphi(m) T_a^k \varphi(m) d\lambda(m)$$

ne soit pas nulle vérifie le théorème limite central pour la variance σ^2 .

Il s'agit d'un corollaire simple de la méthode de GORDIN et des travaux de CLOZEL, OH et ULLMO (voir [11] et les références qui s'y trouvent). Nous obtiendrons également un résultat moins précis dans le cas où le \mathbf{Q} -rang de G est nul. Nous renvoyons le lecteur à la partie 4 pour des définitions précises et une description de ce que signifie le théorème limite central dans ce contexte des correspondances.

1.4. Remerciements. Cet article est le fruit d'un groupe de travail organisé à Rennes en 2003/2004 dans le cadre de l'ACI Jeunes chercheurs intitulée « Systèmes dynamiques polynomiaux » ; la partie 3 a été exposée lors de la rencontre ACI de mars 2004. Nous remercions les participants à ce groupe de travail et à cette rencontre pour leurs conseils et leur attention. Merci, en particulier, à Pascal AUTISSIER, Jean-Yves BRIEND, Charles FAVRE et Yves GUIVARC'H. Merci à Christophe DUPONT pour nous avoir signalé une erreur dans un version antérieure de ce texte.

2. LA MÉTHODE DE GORDIN

Dans ce paragraphe, nous décrivons la méthode due à GORDIN, pour étudier le comportement stochastique des systèmes dynamiques. Il s'agit de placer l'étude dans le cadre des suites de différences de martingales (ou de différences de martingales renversées).

2.1. La méthode de GORDIN pour les systèmes dynamiques. Soit (X, \mathcal{B}, f, μ) un système dynamique mesuré : X est un espace métrique compact muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} , f est une transformation continue de X et μ est une mesure de probabilité f -invariante sur X . Notons $L^2(X, \mu)$ l'espace de HILBERT des fonctions de carré sommable sur X et T l'opérateur unitaire de composition par la transformation f , $T(\xi) = \xi \circ f$. Par définition, l'opérateur de PERRON-FROBENIUS P est l'adjoint de l'opérateur T .

Remarque 2.1. Soit f un endomorphisme de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ dont le degré est strictement plus grand que 1. Soit μ_f l'unique mesure d'entropie maximale de f . L'opérateur de PERRON-FROBENIUS pour $(\mathbb{P}^k(\mathbf{C}), f, \mu_f)$ coïncide alors avec l'opérateur défini au paragraphe 3.5 par la formule

$$P(\xi)(x) \mapsto \frac{1}{d_t} \sum_{\{y|f(y)=x\}} \xi(y).$$

Ceci illustre le fait que la mesure μ_f est de jacobien constant d_t .

Pour tout entier positif n , notons $f^{-n}(\mathcal{B})$ la tribu constituée des images réciproques d'ensembles boréliens et $E(\cdot | f^{-n}(\mathcal{B}))$ l'espérance conditionnelle associée. En d'autres termes, $E(\cdot | f^{-n}(\mathcal{B}))$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace fermé constitué des éléments de $L^2(X, \mu)$ qui sont mesurables pour la tribu $f^{-n}(\mathcal{B})$. Un calcul élémentaire montre les égalités suivantes :

$$PT = Id \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, T^n P^n = E(\cdot | f^{-n}(\mathcal{B})).$$

L'espérance conditionnelle sachant $f^{-1}(\mathcal{B})$ d'une fonction ϕ est nulle si et seulement si $P\phi = 0$. Dans ce cas l'espérance conditionnelle sachant $f^{-(k+1)}(\mathcal{B})$ de $\phi \circ f^k$ est nulle pour tout entier positif k . La suite $(\phi \circ f^k)_{k \geq 0}$ définit alors ce qu'on appelle une suite de différences de martingale renversée (voir [2], section 35) pour laquelle on sait obtenir le théorème limite central et d'autres propriétés plus fortes (voir ci-dessous).

La méthode de GORDIN consiste à se ramener à cette situation. On peut le faire de manière très simple lorsque la série $\sum_{k \geq 0} P^k \phi$ converge dans $L^2(X, \mu)$. En effet, posons

$$\psi = \sum_{k \geq 0} P^k \phi - T \sum_{k \geq 1} P^k \phi \quad \text{et} \quad \chi = \sum_{k \geq 1} P^k \phi.$$

Comme $PT = Id$, nous obtenons $P\psi = 0$, ce qui montre que la suite $(\psi \circ f^k)_{k \geq 0}$ est une suite de différences de martingale renversée. Un calcul rapide fournit l'égalité $\phi = \psi + T\chi - \chi$. Ainsi, ϕ et ψ ne diffèrent que par le cobord $\chi \circ f - \chi$. Quand on divise par \sqrt{n} la partie de la somme ergodique correspondant au cobord, on obtient une quantité tendant vers 0. Ainsi, les propriétés asymptotiques de la suite $\phi \circ f^n$ et celles de la suite de différences de martingale renversée $\psi \circ f^n$ coïncident.

2.2. La méthode de GORDIN pour les chaînes de MARKOV. Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable. Une probabilité de transition sur X est une application P de $X \times \mathcal{B}$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, l'application $x \mapsto P(x, A)$ soit mesurable et, pour tout $x \in X$, l'application $A \mapsto P(x, A)$ soit une probabilité.

À toute probabilité μ sur X , on peut associer une probabilité P_μ sur $X^\mathbf{N}$ (muni de la tribu produit) telle que les projections $x_k : (x_j) \in X^\mathbf{N} \mapsto x_k$ forment une chaîne de MARKOV de probabilité de transition P et de mesure initiale μ . Notons \mathcal{F}_k la tribu engendrée par les k premières coordonnées et, une fonction ϕ sur X étant donnée, notons $P\phi$ la fonction définie par

$$P\phi(x) = \int_X \phi(y) P(x, dy).$$

Dire que la suite (x_k) est une chaîne de MARKOV de probabilité initiale μ et de probabilité de transition P , c'est dire que x_0 est de loi μ et que, pour tout entier k et pour toute fonction ϕ mesurable bornée sur X , on a $\mathbf{E}(\phi(x_{k+1})|\mathcal{F}_k) = P\phi(x_k)$.

Pour nous, montrer le théorème limite central pour une chaîne de MARKOV c'est montrer le théorème limite central pour un processus de la forme $(\phi(x_k))_{k \in \mathbf{N}}$. Dans ce cadre, comme dans celui des systèmes dynamiques dont avons parlé plus haut, la méthode de GORDIN consiste à se ramener à une suite de différences de martingale.

Supposons que la somme $\psi = \sum_0^\infty P^k \phi$ converge dans $L_2(X, \mu)$. De la relation $\phi = \psi - P\psi$, on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_0^{n-1} \phi(x_k) &= \sum_0^{n-1} \psi(x_k) - \sum_0^{n-1} P\psi(x_k) \\ &= \sum_0^{n-1} (\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})) + \sum_0^{n-1} (\psi(x_{k+1}) - P\psi(x_k)) \\ &= \psi(x_0) - \psi(x_n) + \sum_0^{n-1} (\psi(x_{k+1}) - P\psi(x_k)), \end{aligned}$$

et nous sommes ramenés à une suite de différences de martingale.

Lorsque la mesure μ est stationnaire, ce qui signifie que toutes les projections x_k ont la même loi, la méthode de GORDIN s'applique et fournit un théorème limite central pour la suite de variables aléatoires $(\phi(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$. DERRIENNIC et LIN ont montré que l'hypothèse de stationnarité n'est pas nécessaire. Si la série converge, alors, pour presque tout point x de X (pour la mesure stationnaire), le théorème limite central est satisfait pour la mesure P_{δ_x} « partant de x » (voir [15]).

2.3. Théorème limite pour les différences de martingale.

Théorème 2.2 ([24], [30]). *Soient (X, \mathcal{B}, f, μ) un système dynamique mesuré et ϕ une fonction de carré intégrable. Si la suite $(\phi \circ f^k)_{k \geq 0}$ est une suite de différences de martingale ou de martingale renversée, elle satisfait le théorème limite central et les principes d'invariance de DONSKER et de STRASSEN.*

Pour mémoire, rappelons ce que sont les principes d'invariance de DONSKER et de STRASSEN (voir [2]). Soient (X, \mathcal{B}, f, μ) un système dynamique et ϕ une fonction de carré intégrable. Supposons que la quantité $\sigma^2 = \mathbf{E}(\phi^2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle T^i \phi, \phi \rangle$ soit finie. Désignons par S_n la somme ergodique $\sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i$.

2.3.1. *Le principe d'invariance de DONSKER.* Soit D l'ensemble des fonctions continues à droite et ayant une limite à gauche sur $[0, 1]$ et \mathcal{D} la tribu borélienne sur D pour la topologie de SKOROKHOD. Lorsque σ^2 n'est pas nul, définissons le processus aléatoire à valeurs dans D

$$\xi_n(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(x), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Nous disons que la fonction ϕ vérifie le principe d'invariance de DONSKER si σ^2 n'est pas nul et si la loi de ξ_n converge faiblement vers la mesure de WIENER sur (D, \mathcal{D}) .

2.3.2. *Le principe d'invariance fort de STRASSEN.* Soit \mathcal{C} l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme et \mathcal{K} l'ensemble des fonctions g absolument continues sur $[0, 1]$ telles que

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 g'^2(t) dt \leq 1,$$

où g' désigne la dérivée de g par rapport à t . Supposons que σ^2 n'est pas nul. Pour tout x dans X , considérons l'élément $\zeta(\cdot, x)$ de \mathcal{C} défini comme l'interpolation affine par morceaux de l'application définie en k/n , $k \leq n$, par :

$$\zeta(k/n, x) = \frac{1}{(2n\sigma^2 \log \log n)^{1/2}} S_k(x).$$

Nous disons que la fonction ϕ vérifie le principe d'invariance fort de STRASSEN si σ^2 n'est pas nul et si, presque sûrement, l'ensemble $\{\zeta_n, n > 2\}$ est relativement compact dans \mathcal{C} et l'ensemble de ses points limites coïncide avec \mathcal{K} .

Le principe d'invariance de STRASSEN est un raffinement de la loi du logarithme itéré. Il assure ainsi un renforcement du théorème ergodique : pour μ -preque tout x ,

$$\limsup \frac{1}{(2n\sigma^2 \log \log n)^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x) = 1,$$

$$\liminf \frac{1}{(2n\sigma^2 \log \log n)^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x) = -1.$$

3. ENDOMORPHISMES HOLOMORPHES

3.1. **Endomorphismes.** Dans toute cette partie, f désigne un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif complexe de dimension k dont le degré topologique d_t est supérieur ou égal à 2. Si l'on choisit un système de coordonnées homogènes

$[x_0 : \dots : x_k]$ sur l'espace projectif, la transformation f est donnée par $k + 1$ polynômes homogènes de même degré d sans racines non nulles communes,

$$f([x_0 : \dots : x_k]) = [P_0 : \dots : P_k].$$

Le degré topologique de f coïncide alors avec la puissance k -ième de d .

Le lieu critique de f sera noté $\text{Cr}(f)$ et l'ensemble des valeurs critiques de f^l sera noté PC_l ,

$$\text{PC}_l = \bigcup_{j=1}^l f^j(\text{Cr}(f)).$$

L'ensemble critique et les ensembles post-critiques PC_l sont des hypersurfaces algébriques de degrés respectifs $c = (2d - 1)^k$ et $(d + \dots + d^l)c$. L'union des valeurs critiques de tous les itérés positifs de f sera noté PC_∞ ; c'est une union dénombrable d'hypersurfaces.

3.2. Mesure d'entropie maximale. Soit ω une forme de FUBINI-STUDY sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. La suite de formes différentielles $1/d^n(f^n)^*\omega$ converge alors faiblement vers un courant positif fermé T qui est à potentiels continus et la mesure $\mu_f = T \wedge T \wedge \dots \wedge T$ obtenue en faisant le produit de k copies du courant T est une mesure de probabilité invariante et mélangeante (voir [31]). D'après les travaux de BRIEND, DUVAL et LYUBICH, cette mesure est l'unique mesure de probabilité f -invariante d'entropie maximale.

Pour obtenir ce résultat, deux lemmes jouent un rôle clé. Appelons *disque plat* la donnée d'un domaine Δ dans une droite projective L qui est homéomorphe à un disque ouvert et dont l'adhérence est homéomorphe à un disque fermé.

Le premier lemme s'énonce ainsi : *soit ϵ un réel strictement positif; il existe un entier positif l tel que, pour tout disque plat Δ ne rencontrant pas PC_l , f^n possède au moins $(1 - \epsilon)d^n$ branches inverses sur Δ . Autrement dit, l'image réciproque de Δ par f^n contient $(1 - \epsilon)d^n$ composantes connexes homéomorphes à des disques Δ_i et les restrictions de f^n à ces disques forment des homéomorphismes de Δ_i vers Δ . Les homéomorphismes réciproques $f_i^{-n} : \Delta \rightarrow \Delta_i$ sont appelés *branches inverses* de f^n sur Δ .*

Le second lemme permet d'estimer la taille des disques Δ_i . Puisque l'image réciproque $f^{-n}(L)$ de la droite qui contient Δ est une courbe de degré d^n , son aire est égale à d^n . Les disques Δ_i étant deux-à-deux disjoints, leurs aires doivent être petites et un lemme de comparaison aire/diamètre fournit le résultat suivant : *si on fixe un nombre réel $0 < \alpha < 1$, il existe une constante C et un entier n_0 tels que les diamètres des disques Δ_i sont inférieurs à $C/d^{\alpha n/2}$ dès que n est supérieur à n_0 .*

Pour démontrer le théorème limite central, nous allons devoir reprendre les démonstrations de ces lemmes afin de contrôler les constantes qui apparaissent.

Nous commencerons par construire les branches inverses ; nous estimerons leur diamètre ultérieurement (§3.4).

3.3. Branches inverses.

Proposition 3.1. *Soient α un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Soit $\beta(n)$ une suite de nombres entiers positifs. Il existe une constante strictement positive C telle que, pour tout disque compact plat Δ ne rencontrant pas $\text{PC}_{\beta(n)}$, et pour tout entier n supérieur à $\beta(n)$, il existe sur Δ au moins*

$$d_{\mathfrak{t}}^n \left(1 - \frac{d^{-(1-\alpha)\beta(n)}}{1 - d^{-(1-\alpha)}} - C \frac{d^{-\beta(n)}}{1 - d^{-1}} \right)$$

branches inverses $f_i^{-n} : \Delta \rightarrow \Delta_i$ telles que les disques Δ_i aient une aire inférieure à $d^{-\alpha n}$.

La constante C qui apparaît dans cette proposition est égale au degré de l'ensemble post-critique PC_1 .

Démonstration. Nous suivons la démonstration présentée par BRIEND dans [5]. Soit L une droite projective et Δ un disque plat contenu dans L qui ne rencontre pas l'ensemble post-critique $\text{PC}_{\beta(n)}$. Nous disposons de $d^{k\beta(n)}$ branches inverses de $f^{\beta(n)}$ sur Δ ; celles-ci produisent $d^{k\beta(n)}$ disques disjoints tracés sur la courbe $f^{-\beta(n)}(L)$. L'aire de la courbe $f^{-\beta(n)}(L)$ est égale à $d^{(k-1)\beta(n)}$. Ainsi, parmi les disques images des branches inverses, qui sont deux-à-deux disjoints, au plus $d^{\alpha\beta(n)}d^{(k-1)\beta(n)}$ peuvent avoir une aire supérieure à $d^{-\alpha\beta(n)}$. Une fois ces disques éliminés, il en reste au moins $d^{k\beta(n)}(1 - d^{(\alpha-1)\beta(n)})$ d'aire inférieure à $d^{-\alpha\beta(n)}$.

Prenons l'image réciproque de ces disques par f : chaque disque qui ne rencontre pas PC_1 donne ainsi naissance à $d_{\mathfrak{t}} = d^k$ disques. Grace au théorème de BÉZOUT, nous pouvons estimer la proportion de disques qui rencontrent PC_1 :

$$\text{Card} \left\{ \text{PC}_1 \cap f^{-\beta(n)}(L) \right\} \leq \text{deg}(\text{PC}_1) \text{deg}(f^{-\beta(n)}(L)) \leq C d^{(k-1)\beta(n)}.$$

Nous obtenons donc $d^{k(\beta(n)+1)}(1 - d^{(1-\alpha)\beta(n)}) - C d^{(k-1)\beta(n)}$ branches inverses de $f^{\beta(n)+1}$. Parmi celles-ci au plus $d^{\alpha(\beta(n)+1)}d^{(k-1)(\beta(n)+1)}$ ont une aire supérieure à $d^{-\alpha(\beta(n)+1)}$. Par conséquent, nous obtenons au moins

$$d^{k(\beta(n)+1)}(1 - d^{(1-\alpha)\beta(n)} - d^{(1-\alpha)(\beta(n)+1)} - C d^{-\beta(n)})$$

branches inverses de $f^{\beta(n)+1}$ dont les images sont d'aire inférieure à $d^{-\alpha(\beta(n)+1)}$.

On montre de cette manière, de proche en proche, qu'il existe au moins

$$d^{k(\beta(n)+m)} \left(1 - \sum_{j=0}^m d^{(1-\alpha)(\beta(n)+j)} - C \sum_{j=0}^{m-1} d^{-(\beta(n)+j)} \right)$$

branches inverses de $f^{\beta(n)+m}$ dont les images sont des disques d'aires inférieures à $d^{-\alpha(\beta(n)+m)}$. Quand on prend $m = n - \beta(n)$ on obtient le résultat annoncé. \square

3.4. Anneaux et diamètre des branches inverses. Nous aurons besoin d'estimer les diamètres des disques Δ_i construits dans la proposition 3.1. Pour cela, il conviendra de contrôler certains modules d'anneaux, puis d'appliquer le lemme fondamental suivant, démontré dans l'appendice de [8].

Lemme 3.2 ([8], appendice). *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute paire de disques $\Delta' \subset \Delta$ dans $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$, on ait*

$$(\text{Diam}(\Delta'))^2 \leq C \frac{\text{Aire}(\Delta)}{\min\{1, \text{Mod}(A)\}},$$

où $\text{Mod}(A)$ désigne le module de l'anneau $\Delta \setminus \Delta'$.

Le reste de ce paragraphe a désormais pour but d'établir la proposition technique suivante.

Proposition 3.3. *Soit Z une hypersurface de degré q dans $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Soit r un nombre réel strictement positif. Pour toute paire de points x, x' de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ qui sont hors du voisinage tubulaire $\text{Tub}(Z, r)$, il existe deux disques plats Δ et Δ' dans $L \setminus Z$ joignant x à x' tels que :*

- $\{x, x'\} \subset \Delta' \subset \Delta$;
- le module de $\Delta \setminus \Delta'$ est minoré par $\kappa r/q$ où κ est une constante indépendante de q, k , et r .

Munissons la sphère de RIEMANN $\overline{\mathbf{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ de sa métrique usuelle. Si Y est une partie finie de $\overline{\mathbf{C}}$ de cardinal q et si s est un nombre réel positif, nous noterons Y_s le voisinage de Y de rayon s ; Y_s est donc l'union de q disques de rayon s et, en particulier, son aire est majorée par $q\pi s^2$.

Soit x un point de $\overline{\mathbf{C}}$. L'ensemble des grands cercles de la sphère $\overline{\mathbf{C}}$ passant par x s'identifie à la droite projective réelle. Nous munirons celle-ci de sa mesure de LEBESGUE $d\theta$ de longueur totale π . Si la distance de x à l'ensemble Y est minorée par r , avec $r > s$, la mesure de l'ensemble des grands cercles qui passent par x et coupent Y_{2s} est majorée par

$$2q\pi \arcsin\left(\frac{4s}{r}\right) \leq 16\pi \frac{qs}{r}.$$

Si r est plus grand que $64\pi qs$, la proportion de ces grands cercles est donc majorée par $1/4$. Les autres cercles sont situés à une distance de Y_s qui est supérieure à s . Si C est l'un de ces grands cercles, le voisinage tubulaire de C de rayon s ne rencontre pas Y_s (voir la figure 1).

Si x et x' sont deux points de $\overline{\mathbf{C}}$ situés à une distance de Y supérieure ou égale à r , nous pouvons donc trouver deux grands cercles C_x et $C_{x'}$ contenant respectivement x et x' tels que les voisinages tubulaires de taille s de ces deux cercles n'intersectent pas Y_s (voir figure 1). Puisque les trois-quarts des cercles passant par x et x' conviennent pour cette construction, nous pouvons en outre

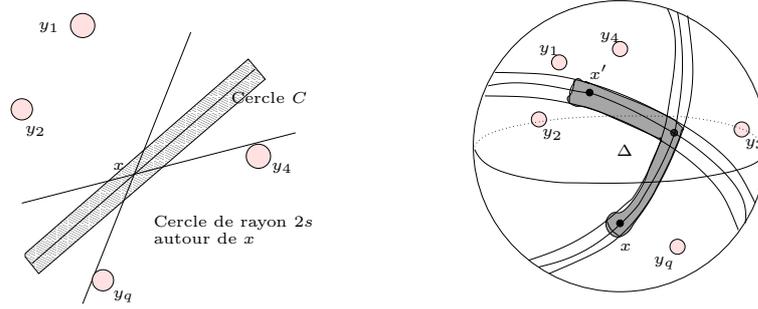


FIG. 1. À gauche, la construction du voisinage tubulaire d'un point x : le voisinage est grisé et le dessin ne concerne qu'un voisinage de x . À droite, la construction d'un disque contenant deux points x et x' et évitant Y_s .

imposer que l'angle entre C_x et $C_{x'}$ (en leur intersection) soit compris entre $\pi/6$ et $5\pi/6$.

En guise d'application, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit Y une partie finie de la sphère de RIEMANN de cardinal q et r un nombre réel strictement positif. Soit s un nombre réel strictement positif inférieur à $r/(64\pi q)$. Pour toute paire de points x, x' situés à une distance de Y supérieure à r , il existe deux disques (topologiques) Δ et Δ' tels que :*

- $\{x, x'\} \subset \Delta' \subset \Delta \subset \overline{\mathcal{C}} \setminus Y_s$;
- le module de l'anneau $\Delta \setminus \Delta'$ est supérieur à κs où κ est une constante ne dépendant ni de q , ni de r ni de s .

Démonstration. La construction présentée ci-dessus permet de trouver deux grands cercles C_x et $C_{x'}$ passant respectivement par x et x' et dont les voisinages de rayon s ne rencontrent pas Y_s ; de surcroît, nous pouvons supposer que l'angle formé par ces cercles en leurs points d'intersection est compris entre $\pi/6$ et $5\pi/6$. Soit c_x l'arc de C_x le plus court joignant x à l'un des points d'intersection de C_x avec $C_{x'}$. Soit $c_{x'}$ un arc analogue le long de $C_{x'}$ joignant x' à ce même point. Choisissons pour Δ le voisinage indiqué sur la figure 1, à savoir le voisinage tubulaire de rayon s de $c_x \cup c_{x'}$. Et pour Δ' , prenons le voisinage de rayon $s/2$. Puisque l'angle entre les cercles est pincé et que la longueur des cercles est majorée par 2π , le module de l'anneau $\Delta \setminus \Delta'$ est minoré par s , à une constante multiplicative κ près. Ceci termine la preuve. \square

Démonstration de la proposition 3.3. Soient x et x' deux points hors de Z . La droite L joignant x à x' coupe Z sur un ensemble fini Y de cardinal inférieur ou égal à q . Pour tout nombre réel positif r , le voisinage tubulaire de Y (dans L) de rayon r est contenu dans le voisinage tubulaire de Z (dans $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$) de rayon r . Le lemme précédent permet donc de conclure. \square

3.5. Estimation principale. Considérons l'opérateur de PERRON-FROBENIUS P associé à la transformation f ; l'image d'une fonction ϕ par P est définie par :

$$P\phi(x) = \frac{1}{d_t} \sum_{\{y|f(y)=x\}} \phi(y).$$

La mesure d'entropie maximale μ_f est P -invariante.

Soit ϕ une fonction μ_f -intégrable de moyenne nulle. Supposons que ϕ soit höldérienne d'exposant supérieur à un nombre réel strictement positif ζ : $|\phi(x) - \phi(x')| \leq K \text{dist}(x, x')^\zeta$, où K est une constante strictement positive. Notons $\| \cdot \|_p$ la norme sur l'espace $L^p(X, \mu_f)$. Nous allons montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \|P^n \phi\|_p$ converge, ce qui est suffisant, comme nous l'avons vu, pour démontrer le théorème limite central grâce à la méthode de GORDIN (voir [20] et les énoncés de la partie 2).

Lemme 3.5. *Soit f un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ dont le degré topologique d_t est strictement supérieur à 1. Soit μ_f la mesure d'entropie maximale de f et P l'opérateur de PERRON-FROBENIUS associé à f . Soit ϕ une fonction höldérienne de moyenne nulle vis-à-vis de μ_f . Pour tout élément p de $[1, \infty[$, la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P^n \phi\|_p$$

converge.

Démonstration. Il convient d'étudier les variations de la fonction $P^n \phi$, et donc de majorer

$$|P^n \phi(x) - P^n \phi(x')| = \frac{1}{d_t^n} \sum_{\{y|f^n(y)=x\}} \phi(y) - \frac{1}{d_t^n} \sum_{\{y'|f^n(y')=x'\}} \phi(y).$$

Soit $\beta(n)$ une suite croissante de nombres entiers que nous préciserons ultérieurement. Soit α un nombre réel strictement compris entre 0 et 1. Notons $E_{r(n), \beta(n)}$ le complémentaire du voisinage tubulaire de taille $r(n)$ de l'ensemble post-critique $\text{PC}_{\beta(n)}$; la suite $r(n)$ variera également en fonction de n .

D'après la proposition 3.3, si x et x' appartiennent à $E_{r(n), \beta(n)}$, il existe une paire de disques plats emboîtés $\Delta' \subset \Delta$ telle que : Δ' contient x et x' et le module de $\Delta \setminus \Delta'$ est minoré par $s(n) = \kappa r(n) / \deg(\text{PC}(\beta(n)))$. Appliquons maintenant la proposition 3.1 relative à la construction de branches inverses : parmi les points y tels que $f^n(y) = x$ au moins

$$d_t^n \left(1 - d^{(\alpha-1)\beta(n)} \frac{1}{1 - d^{(\alpha-1)}} - C d^{-\beta(n)} \frac{1}{1 - d^{-1}} \right)$$

appartiennent à des disques $f^{-n}(\Delta)$ d'aires inférieures à $d^{-\alpha n}$ qui contiennent aussi un point y' tel que $f^n(y') = x'$. Grâce au lemme de comparaison entre les aires et les diamètres (voir le lemme 3.2), nous savons que les disques $f^{-n}(\Delta')$ ont un diamètre inférieur à

$$\text{Diam}(n) := C' d^{-\alpha n/2} \max(1, \deg(\text{PC}(\beta(n)) / r(n))^{1/2}$$

où C' est une constante positive.

Effectuons le découpage

$$|P^n \phi(x) - P^n \phi(x')| \leq \frac{1}{d_t^n} \sum |\phi(y) - \phi(y')| + \frac{1}{d_t^n} \sum' |\phi(y)| + \frac{1}{d_t^n} \sum'' |\phi(y')|$$

où la première somme porte sur les couples (y, y') d'antécédents de x et x' qui sont à une distance inférieure à $Diam(n)$, et les deux autres sommes portent sur les couples d'antécédents y de x (resp. y' de x') pour lesquels tout antécédent de x' (resp. x) est à une distance supérieure à $Diam(n)$.

Ces deux dernières sommes sont inférieures à

$$\|\phi\|_\infty \left(d^{-(1-\alpha)\beta(n)} \frac{1}{1-d^{(\alpha-1)}} + C d^{-\beta(n)} \frac{1}{1-d^{-1}} \right)$$

et la première est inférieure à $K Diam(n)^\zeta$ car ϕ est höldérienne (d'exposant ζ et de constante K). Ainsi, lorsque x et x' appartiennent à $E_{r(n),\beta(n)}$ les fluctuations $|P^n \phi(x) - P^n \phi(x')|$ sont majorées par le terme d'erreur

$$\epsilon(n) = K (Diam(n))^\zeta + C_1 \|\phi\|_\infty d^{-(1-\alpha)\beta(n)},$$

où C_1 est une constante dépendant uniquement de d et α . Autrement dit, il existe une constante $v(n)$ telle que, en restriction à $E_{r(n),\beta(n)}$, $P^n \phi$ soit constamment égale à $v(n)$ plus un terme majoré par l'erreur $\epsilon(n)$.

Posons maintenant $\beta(n) = [n^{1/3}]$, de sorte que $\beta(n)$ croît très lentement devant n . Soit γ un nombre réel strictement compris entre 1 et $d^{\alpha/2}$. Prenons $r(n) = \gamma^{-n}$. Tout d'abord, le paragraphe 5.3 nous apprend que la mesure du complémentaire de $E_{r(n),\beta(n)}$ satisfait l'inégalité

$$\mu_f({}^c E_{r(n),\beta(n)}) \leq C_2 n^{2/3} d_t^{n^{1/3}} \gamma^{-\alpha\sqrt{n}/o},$$

où C_2 est une constante strictement positive. Ensuite, remplaçant $\beta(n)$ par $[n^{1/3}]$ dans la majoration de $Diam(n)$, nous obtenons

$$Diam(n) \leq C' d^{-\alpha n/2} \gamma^{n/2} \left(\frac{d^{k-1} - 1}{d^{(k-1)(\beta(n)+1)} - 1} \right)^{1/2} \leq C' (\gamma/d^\alpha)^{n/2}.$$

Puisque γ est strictement plus petit que d^α , cette quantité tend vers zéro géométriquement.

Par conséquent, il existe une constante C_0 telle que les variations de $P^n \phi$ sur $E_{\gamma^{-n},\beta(n)}$ soient majorées par

$$\epsilon(n) = C_0 (\gamma/d^\alpha)^{n\zeta/2} + C_1 \|\phi\|_\infty d^{-(1-\alpha)\beta(n)},$$

de sorte que $P^n \phi$ s'écarte peu de sa valeur moyenne $v(n)$ sur cet ensemble. Mais l'intégrale de $P^n \phi$ est nulle car ϕ elle-même a une intégrale nulle, donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int P^n \phi(x) d\mu_f(x) \\ &= \int_{E_{\gamma^{-n},\beta(n)}} P^n \phi(x) d\mu_f(x) + \int_{{}^c E_{\gamma^{-n},\beta(n)}} P^n \phi(x) d\mu_f(x). \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $v(n)$ à $\epsilon(n)$ près, la deuxième est majorée par la mesure du complémentaire de $E_{\gamma^{-n}, \beta(n)}$ fois $\|\phi\|_\infty$. Ceci permet d'évaluer $v(n)$ et il s'ensuit que la norme uniforme de $P^n \phi$ sur $E_{r(n), \beta(n)}$ est majorée par

$$C_0(\gamma/d^{\alpha/2})^n \mathbf{d}^{\zeta(k-1)(n^{1/3}+1)/2} + C_1 \|\phi\|_\infty \mathbf{d}^{-(1-\alpha)\beta(n)} + C_2 n^{2/3} d_t^{n^{1/3}} \gamma^{-\alpha\sqrt{n}/o} \|\phi\|_\infty,$$

où les C_i sont des constantes. Ceci démontre que la série $\sum \|P^n(\phi)\|_p$ converge. \square

3.6. Conclusion et applications. Nous pouvons maintenant coupler le lemme précédent à la méthode de GORDIN décrite aux paragraphes 2.1 et 2.3 et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.6. *Soient f un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ dont le degré topologique est strictement supérieur à 1 et μ_f la mesure d'entropie maximale de f . Si φ est une fonction höldérienne de moyenne nulle pour μ_f , la suite*

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbf{C})} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(f^k(m)) \right)^2 d\mu_f(m)$$

converge vers un nombre positif σ^2 . Ce nombre est nul si et seulement si φ est un cobord. S'il est strictement positif, φ vérifie le théorème limite central de variance σ^2 et les principes d'invariance de DONSKER et de STRASSEN.

Considérons maintenant le processus de MARKOV qui consiste à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, des préimages par l'endomorphisme f . Si ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ (muni de la tribu borélienne) nous pouvons alors associer une probabilité P_ν sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ (muni de la tribu produit) telle que les projections

$$x_n : (x_j) \in \mathbb{P}^k(\mathbf{C})^{\mathbf{N}} \mapsto x_n$$

forment une chaîne de MARKOV dont la probabilité de transition de x à y soit égale à m/d_t , où m est la multiplicité de y comme solution de $f(y) = x$. Si ϕ est une fonction sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ à valeurs réelles, nous dirons que ϕ vérifie le théorème limite central « partant de ν » si la suite de variables aléatoires $\phi \circ x_n$ vérifie le théorème limite central vis-à-vis de P_ν . En appliquant la méthode de GORDIN, les travaux de DERRIENNIC et LIN et le lemme 3.5, nous obtenons le résultat suivant : *pour μ_f -presque tout point x , toute fonction höldérienne ϕ sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ vérifie le théorème limite central partant de x*

Supposons maintenant que f est post-critiquement fini, ce qui signifie que son ensemble post-critique PC_∞ est une union finie d'ensembles analytiques. Soit ϕ une fonction höldérienne et x un point de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C}) \setminus PC_\infty$ tel que ϕ satisfasse le théorème limite central partant de x . Soit y un point de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ n'appartenant pas à l'ensemble post-critique de f . La droite joignant x à y ne rencontre PC_∞ qu'en un nombre fini de points, ce qui permet de trouver un disque topologique ouvert dans cette droite qui contient x et y et ne rencontre pas PC_∞ . Les lemmes du paragraphe 3.4

montrent alors que les préimages de x et de y se rapprochent exponentiellement vite ; puisque ϕ est höldérienne, on en déduit que les sommes de BIRKHOFF des $\phi \circ x_n$ pour les processus de MARKOV partant de x et partant de y ont le même comportement asymptotique. Ainsi, ϕ vérifie le théorème limite central partant de y :

Théorème 3.7. *Soit f un endomorphisme post-critiquement fini de degré topologique strictement plus grand que 1 sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Soit ϕ une fonction höldérienne sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Pour tout point y hors de l'ensemble post-critique de f , ϕ vérifie le théorème limite central partant de y pour le processus de MARKOV associé aux branches inverses de f .*

Remarque 3.8. Le même argument s'applique de manière plus générale sans supposer que f est post-critiquement finie. C'est évidemment le cas lorsque le point y peut-être relié à un point μ_f -générique par un disque ne rencontrant pas l'ensemble post-critique.

4. THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR LES CORRESPONDANCES MODULAIRES

Dans cette dernière partie, nous allons appliquer la méthode de GORDIN aux correspondances modulaires.

4.1. Correspondances modulaires. Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} qui est presque simple, connexe et simplement connexe et dont la partie réelle $G(\mathbf{R})$ n'est pas compacte. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Q})$. Le théorème de BOREL et HARISH-CHANDRA montre que Γ est un réseau de $G(\mathbf{R})$ et le critère de compacité montre que le quotient $\Gamma \backslash G(\mathbf{R})$ est compact si et seulement si le \mathbf{Q} -rang de G est nul (voir [3] et [33]).

Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$ et $\tilde{X} = G(\mathbf{R})/K$ l'espace symétrique associé. Nous noterons g la métrique riemannienne de \tilde{X} et λ la forme volume associée. D'après le lemme de SELBERG, quitte à changer Γ en l'un de ses sous-groupes d'indice fini, nous pouvons supposer que Γ est sans torsion. La variété quotient $\Gamma \backslash \tilde{X}$ est alors munie de la métrique riemannienne et de la forme volume quotient, qui seront encore notées g et λ .

Soit a un élément de $G(\mathbf{Q})$. Les groupes $a^{-1}\Gamma a$ et Γ sont commensurables ; autrement dit, le groupe Γ_a défini comme intersection de Γ et $a^{-1}\Gamma a$ est d'indice fini dans ces deux groupes. Soit Y_a la variété $\Gamma_a \backslash \tilde{X}$. Les applications $\pi_1 : Y_a \rightarrow X$ et $\pi_2 : Y_a \rightarrow X$ définies par

$$\pi_1(\Gamma_a y) = \Gamma y \quad \text{et} \quad \pi_2(\Gamma_a y) = \Gamma(ay)$$

sont deux revêtements riemanniens de même degré $d_a = \lambda(Y_a)/\lambda(X)$. Le couple (π_1, π_2) détermine une correspondance sur X , appelée *correspondance modulaire*, ou *correspondance de HECKE*. Il s'agit ici d'étudier les propriétés stochastiques de cette correspondance, donc d'itérer l'application multivaluée $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$.

Suivant [12], nous dirons que la correspondance modulaire est *extérieure* si Γ et a engendrent un sous-groupe dense de $G(\mathbf{R})$.

4.2. Opérateur de HECKE. L'opérateur de HECKE T_a associé à une correspondance modulaire est défini de la manière suivante : si ξ est une fonction sur X , alors

$$T_a \xi(x) = \frac{1}{d_a} \sum_y \xi(\pi_2(y))$$

où y décrit la fibre $\pi_1^{-1}(x)$. Si $\{a_i \in G(\mathbf{Q}), i = 1, \dots, d_a\}$ est un système de représentants des classes à gauche de l'ensemble $a\Gamma$ modulo Γ , de sorte que $\Gamma a\Gamma = \cup_{i=1}^{d_a} \Gamma a_i$, alors

$$T_a \xi(x) = \frac{1}{d_a} \sum_{i=1}^{d_a} \xi(a_i x).$$

Cet opérateur joue un rôle similaire à celui joué par l'opérateur de PERRON-FROBENIUS pour l'étude des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Il préserve la mesure λ car les π_i sont des revêtements riemanniens. En particulier, T_a détermine un opérateur de norme 1 sur l'espace de HILBERT $L^2(X, \lambda)$. Le sous-ensemble constitué des fonctions de moyenne nulle sera noté $L_0^2(X, \lambda)$; c'est un sous-espace de HILBERT invariant sous l'action de T_a . Nous noterons \tilde{T}_a la restriction de T_a à ce sous-espace.

4.3. Théorème limite central. Au lieu d'itérer l'application multivaluée $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ nous pouvons décider, à chaque itération, de choisir aléatoirement un point de l'ensemble

$$\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(x) = \{\Gamma a_1 x, \dots, \Gamma a_{d_a} x\}$$

en affectant la probabilité de tirage $1/d_a$ à chacune des lettres a_i . Ceci correspond à une chaîne de Markov d'espace d'états X pour laquelle la mesure λ est stationnaire. Comme nous l'avons vu dans la partie 2, pour montrer le théorème limite central pour une fonction $\xi : X \rightarrow \mathbf{R}$ il suffit de montrer que la série $\sum T_a^n \xi$ converge.

4.4. Cas des réseaux non cocompacts. Supposons maintenant que le \mathbf{Q} -rang de G est supérieur ou égal à 1, ce qui correspond à dire que Γ n'est pas uniforme : X est de volume fini mais n'est pas compact. En utilisant les estimées obtenues par OH pour la décroissance des coefficients des représentations unitaires de G - typiquement de $G(\mathbf{Q}_p)$ - et celles obtenues par GELBART et JACQUET, CLOZEL, OH et ULLMO ont obtenu le résultat suivant (voir le corollaire 1.4 page 330 de [11])

Théorème 4.1. *Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} qui est presque simple et connexe et dont la partie réelle $G(\mathbf{R})$ n'est pas compacte. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Q})$. Soit a_n une suite d'éléments de $G(\mathbf{Q})$ dont le degré tend vers l'infini. Si le \mathbf{Q} -rang de G est strictement positif, alors la norme de \tilde{T}_{a_n} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.*

Remarque 4.2. Le résultat de CLOZEL, OH et ULLMO est en fait beaucoup plus précis car il fournit des estimées optimales pour la norme de \tilde{T}_a , mais nous n'en ferons pas usage. En outre, pour les applications cherchées ici, il suffit d'étudier la suite T_a^n , alors que l'énoncé concerne une suite quelconque d'opérateurs T_{a_n} .

Nous allons montrer comment ce résultat conduit au théorème limite central pour les correspondances modulaires extérieures sur G .

Théorème 4.3. *Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} qui est presque simple et connexe et dont la partie réelle $G(\mathbf{R})$ n'est pas compacte. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Q})$. Soit a un élément de $G(\mathbf{Q})$ déterminant une correspondance modulaire extérieure de $\Gamma \backslash G(\mathbf{R})$. Si le \mathbf{Q} -rang de G est strictement positif, toute fonction mesurable ξ sur X de carré sommable et de moyenne nulle vérifie le théorème limite central pour la variance*

$$\sigma^2 = \left\| \sum_0^\infty T_a^n \xi \right\|^2 - \left\| \sum_1^\infty T_a^n \xi \right\|^2.$$

Démonstration. Les itérés de l'opérateur T_a sont des moyennes d'opérateurs de HECKE : pour tout entier positif n , il existe un entier positif k_n , des éléments $a_n(i)$ de $G(\mathbf{Q})$ et des entiers positifs $\alpha_n(i)$ dont la somme vaut \mathfrak{d}_a^n tels que

$$T_a^n = \frac{1}{\mathfrak{d}_a^n} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_n(i) T_{a_n(i)}.$$

Cette décomposition de T_a^n reste bien sûr valable pour \tilde{T}_a^n en restreignant chacun des opérateurs à l'espace $L_0^2(X, \lambda)$. Puisque chaque opérateur $T_{a_n(i)}$ est une contraction, il suffit que la norme de l'un d'entre eux soit strictement inférieure à 1 pour que celle de T_a^n le soit. Supposons que ceci se produise pour un entier n_0 , de sorte que $\|\tilde{T}_a^{n_0}\| = \eta_0 < 1$. Pour tout entier m supérieur à n_0 nous obtenons

$$\|\tilde{T}_a^m\| \leq \eta_0^{[m/n_0]}$$

où $[m/n_0]$ désigne le quotient de la division euclidienne de m par n_0 . En particulier, la somme des normes des opérateurs \tilde{T}_a^m converge et le principe de GORDIN s'applique.

Il reste à établir l'existence d'un couple d'entiers (n, i) pour lequel la norme de $\tilde{T}_{a_n(i)}$ est strictement inférieure à 1. D'après le théorème de CLOZEL, OH et ULLMO, il suffit de montrer que le degré des $a_n(i)$ n'est pas borné. Mais, si c'était le cas, les correspondances $a_n(i)$ décriraient une famille finie et le groupe engendré par Γ et a ne serait pas dense dans $G(\mathbf{R})$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de correspondance extérieure. Ceci termine la preuve du théorème. \square

Remarque 4.4.

1.- La démonstration de ce résultat montre que le théorème limite central est valable dès que la norme d'un des itérés positifs de \tilde{T}_a est strictement plus petite

que 1. D'après [11], ceci est valable pour de nombreux éléments a de $G(\mathbf{Q})$, même lorsque Γ est cocompact.

2.- Sous les mêmes hypothèses, les résultats de [15] assurent la validité du théorème limite central pour les mesures P_{δ_x} pour λ -presque tout x (voir la fin du paragraphe 2.2).

4.5. Cas des réseaux cocompacts. La situation est plus délicate, et nous ne savons montrer un théorème limite central qu'en faisant une hypothèse de régularité sur la fonction ξ .

Exemple 4.5. Un exemple simple illustre bien cette situation. Soit α un nombre réel irrationnel compris entre 0 et 1. On munit $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de sa mesure de LEBESGUE et l'on considère l'opérateur P_α défini par

$$P_\alpha \xi(x) = \frac{1}{2} \xi(x + \alpha) + \frac{1}{2} \xi(x - \alpha).$$

La validité du théorème limite central dépend alors des propriétés diophantiennes de α et de la régularité de la fonction ξ pour laquelle on cherche à établir le théorème limite central. Notons ψ la série trigonométrique formelle définie par $\psi - P_\alpha \psi = \xi$; ses coefficients de FOURIER d_n sont liés aux coefficients de FOURIER c_n de ξ par la relation

$$d_n = \frac{c_n}{2 \sin^2(\pi k \alpha)}.$$

La méthode de GORDIN montre que le théorème limite central est valable pour ξ si et seulement si la série de FOURIER ψ détermine un élément de $L^2(X, \lambda)$; ¹ si α est bien approché par les rationnels, il faut donc supposer que les coefficients de FOURIER de ξ décroissent rapidement pour obtenir le théorème limite central. La régularité de ξ doit donc être ajustée en fonction des propriétés diophantiennes de α (voir [29]).

Notons Δ le laplacien pour la métrique g sur l'espace localement symétrique $X = \Gamma \backslash G/K$. Notons d_X la dimension de X . Puisque X est compact, l'orthogonal des fonctions constantes dans $L^2(X, \lambda)$ s'écrit comme la somme directe hilbertienne d'espaces de dimensions finies $L_0^2(\nu)$ tels que la restriction de Δ à chacun de ces espaces soit une homothétie de rapport ν :

$$L_0^2(X, \lambda) = \bigoplus_{\nu > 0} L_0^2(\nu).$$

L'opérateur de HECKE T_a commute avec le laplacien Δ donc \tilde{T}_a préserve chacun des sous-espaces $L_0^2(\nu)$. Pour tout ν le rayon spectral de la restriction de \tilde{T}_a à $L_0^2(\nu)$ est strictement inférieur à 1 car la correspondance est extérieure (voir [12]). Si $C_{\nu, n}$

¹Il serait plus précis de parler ici de théorème limite central pour la suite S_n/\sqrt{n} - où S_n est la somme de BIRKHOFF $\sum_0^{n-1} P^k \xi$. Il se peut en effet qu'un théorème limite central soit valable pour $S_n/\mathbf{E}(S_n^2)^{1/2}$ avec l'espérance $\mathbf{E}(S_n^2)$ qui croît plus vite que n .

désigne la norme de l'opérateur \tilde{T}_a^n restreint à $L_0^2(\nu)$ alors, pour tout ν , la suite $(C_{\nu,n})_n$ tend vers 0 exponentiellement vite.

Soit ξ une fonction définie sur X de carré intégrable. Appelons ξ_ν la projection orthogonale de ξ sur $L_0^2(\nu)$, de sorte que $\xi = \sum_\nu \xi_\nu$.

Définition 4.6. Une fonction ξ de carré intégrable est suffisamment régulière (vis-à-vis de T_a) si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ \sum_\nu C_{\nu,n}^2 \|\xi_\nu\|_2^2 \right\}^{1/2}$$

converge.

Exemple 4.7. 1.- Si les ξ_ν sont toutes nulles sauf un nombre fini, la fonction ξ est suffisamment régulière.

2.- S'il existe une constante $C > 0$ et un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout n et tout ν on ait $C_{\nu,n} \leq C\alpha^n$ alors la norme de T^n décroît au moins comme $C\alpha^n$. La série de terme général $\|\tilde{T}_a^n \xi\|$ converge alors pour toute fonction ξ de carré intégrable. Dans ce cas, toutes les fonctions de carré intégrable sont suffisamment régulières.

3.- La formule asymptotique de WEYL pour les valeurs propres du laplacien décrit le comportement asymptotique de la k -ième valeur propre ν_k lorsque k tend vers l'infini : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(\nu_k)^{d_X/2} \sim Ck.$$

S'il existe un polynôme P et une constante $L > 0$ tels que pour tout n et tout ν on ait $C_{\nu,n} \leq P(n) (1 - \nu^{-L})^n$, alors un calcul rapide utilisant l'équivalent de WEYL montre que les fonctions

$$2L(\deg P + 1) + \frac{d_X}{2} + 2$$

fois continument dérivables sont suffisamment régulières. limite central.

Proposition 4.8. Soit G un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbf{Q} , presque simple et connexe. Soit Γ un sous-groupe de congruence cocompact de $G(\mathbf{Q})$. Soit a un élément de $G(\mathbf{Q})$ déterminant une correspondance modulaire extérieure de $\Gamma \backslash G(\mathbf{R})$. Toute fonction ξ sur X suffisamment régulière vérifie le théorème limite central pour la correspondance de HECKE définie par a .

Démonstration. En appliquant \tilde{T}_a^n nous obtenons

$$\|\tilde{T}_a^n \xi\|_2^2 = \sum_\nu \|\tilde{T}_a^n \xi_\nu\|_2^2 \leq \sum_\nu C_{\nu,n}^2 \|\xi_\nu\|_2^2.$$

Le théorème de convergence dominée assure donc que la norme de $T^n \xi$ tend vers 0. Pour appliquer la méthode de Gordin, il suffit que la suite $\|\xi_\nu\|_2$ décroisse suffisamment vite, ce qui correspond à dire que ξ est suffisamment régulière. \square

Remarque 4.9. Les travaux plus récents de DERRIENNIC et LIN assurent que le théorème limite central est satisfait sous l'hypothèse plus faible

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{\nu} C_{\nu,n}^2 \|\xi_{\nu}\|_2^2 \right\}^{1/2} \leq O(N^{\alpha})$$

pour un α strictement inférieur à $1/2$ (voir [15]).

Exemple 4.10. Les difficultés qui apparaissent pour estimer la norme des opérateurs de HECKE apparaissent déjà dans une situation plus simple, celle des groupes agissant par rotations sur la sphère. Considérons une partie finie et symétrique $S = \{a_1, \dots, a_d, a_1^{-1}, \dots, a_d^{-1}\}$ du groupe $\mathrm{SO}(n+1, \mathbf{R})$ et notons Γ_S le sous-groupe engendré par S . Le groupe Γ_S agit sur la sphère \mathbb{S}^n en préservant la mesure de LEBESGUE λ . Si Γ_S est dense dans $\mathrm{SO}(n+1, \mathbf{R})$, les fonctions ξ de $L^2(\mathbb{S}^n, \lambda)$ qui sont Γ_S -invariantes sont constantes. Soit T_S l'opérateur de HECKE associé à S , défini par

$$T_S \xi(x) = \frac{1}{\mathrm{card}(S)} \sum_{s \in S} \xi(s(x)),$$

pour tout point x de \mathbb{S}^n et tout élément ξ de $L^2(\mathbb{S}^n, \lambda)$. Si l'on applique k fois l'opérateur T_S à une fonction ξ , on moyenne ξ (avec certaines pondérations) sur l'ensemble des points $w(x)$ où w décrit les mots d'au plus k lettres en les éléments de S . Pour comprendre la répartition asymptotique des orbites du groupe Γ_S , il s'agit donc à nouveau de comprendre les propriétés spectrales de l'opérateur de HECKE T_S . Cette technique permet d'obtenir des théorèmes ergodiques de type VON NEUMANN (voir [22]) ou BIRKHOFF (voir [28]) pour les suites de variables aléatoires

$$S_k \xi(x) = \frac{1}{c(k)} \sum_w \xi(w(x))$$

où w décrit l'ensemble des mots de longueur au plus k en les éléments de S et $c(k)$ est le nombre de tels mots. Lorsque l'opérateur T_S a un « trou spectral », la méthode de GORDIN s'applique pour fournir le théorème limite central pour le processus de MARKOV T_S . C'est le cas pour les groupes libres construits par LUBOTZKY, PHILLIPS et SARNAK puisque le trou spectral de T_S est alors optimal (voir [13], [26], [27], [10]), mais c'est aussi le cas dès que Γ_S a la propriété (T) de Kazhdan (voir [23]).

5. ANNEXE : POTENTIELS HÖLDÉRIENS ET APPLICATIONS

Cette partie annexe concerne la continuité höldérienne de la fonction de GREEN d'un endomorphisme de l'espace projectif et le profit qui peut être tiré de cette continuité.

5.1. Continuité höldérienne des potentiels. Soit $f : \mathbb{P}^k(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ un endomorphisme dont le degré topologique d_t est strictement plus grand que 1. En coordonnées homogènes, f est donc donné par $k + 1$ polynômes homogènes de même degré d et sans racines communes non nulles, avec $d_t = d^k$. Munissons l'espace projectif d'une forme de FUBINI-STUDY ω . Puisque $f^*\omega$ est cohomologue à $d\omega$, il existe une fonction infiniment différentiable u telle que $f^*\omega = d\omega + dd^c u$. Si l'on itère cette relation il vient

$$\frac{1}{d^n}(f^n)^*\omega = \omega + dd^c \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{d^j} u \circ f^j \right). \quad (5.1)$$

Puisque le degré d est strictement plus grand que 1, la série de fonctions qui apparaît converge uniformément. La limite est une fonction continue u_∞ et l'on obtient une convergence faible dans l'espace des courants :

$$\frac{1}{d^n}(f^n)^*\omega \longrightarrow \omega + dd^c u_\infty. \quad (5.2)$$

Le courant ainsi construit ne dépend pas de ω (voir [31]); ce courant est noté T et est appelé *courant de GREEN* de f . Si g_i est un potentiel local pour ω alors, localement, $T = dd^c(g_i + u_\infty)$. Puisque ω est lisse, la régularité des potentiels de T ne dépend que de la régularité de u_∞ . Nous allons montrer que cette fonction est höldérienne (voir [4]).

Munissons l'espace projectif d'une métrique riemannienne quelconque et posons

$$\chi_{top}(f) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j} \log \|Df^j\| \right),$$

où $\|Df\|$ est la norme uniforme de la différentielle de f , mesurée à l'aide de la métrique riemannienne préalablement fixée. Ceci détermine un nombre réel positif qui ne dépend pas du choix de la métrique. Nous appellerons ce nombre *exposant de LYAPOUNOFF topologique* de f .

Lemme 5.1. *Les potentiels locaux du courant de GREEN d'un endomorphisme de l'espace projectif sont des fonctions höldériennes dont l'exposant est minoré par*

$$\alpha = \frac{\log(d)}{\chi_{top}(f)}.$$

Démonstration. Munissons l'espace projectif d'une métrique riemannienne et notons M la norme uniforme de Df pour cette métrique. Puisque d est strictement plus grand que 1, M est aussi plus grand que 1; ainsi

$$\alpha' = \frac{\log(d)}{\log(M)}$$

est un nombre réel strictement positif majoré par 1. Soit β un nombre réel strictement compris entre 0 et α' , de sorte que $M^\beta < d$. Puisque la fonction u est lisse et

puisque $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ est compact, cette fonction est höldérienne d'exposant minoré par β . En particulier, il existe une constante C telle que

$$\left| \sum_{j=0}^n \frac{1}{d^j} u \circ f^j(x) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{d^j} u \circ f^j(y) \right| \leq C \sum_{j=0}^n \frac{1}{d^j} M^{j\beta} \text{dist}(x, y)^\beta.$$

La série géométrique de raison M^β/d converge et en passant à la limite nous obtenons

$$|u_\infty(x) - u_\infty(y)| \leq \frac{Cd}{d - M^\beta} \text{dist}(x, y)^\beta,$$

ce qui montre que u_∞ est höldérienne d'exposant minoré par β . Puisque β a été choisi arbitrairement entre 0 et α' , l'exposant de u_∞ est minoré par α' . Remplaçant f par l'un des itérés f^j de f , puis passant à la limite lorsque j tend vers l'infini, cet argument montre que l'exposant de u_∞ est minoré par $\log(d)/\chi_{top}(f)$. \square

Les potentiels locaux de T étant continus, on peut appliquer la méthode de BEDFORD et TAYLOR pour définir les produits extérieurs de T avec lui-même. La mesure d'entropie maximale de f correspond au produit de T avec lui-même k -fois (voir [31], [8]) : $\mu = T \wedge T \wedge \dots \wedge T$. Si T est localement donné par un potentiel u , la mesure μ coïncide donc localement avec $(dd^c u)^k$.

5.2. Mesure de voisinages tubulaires et dimension de HAUSDORFF. Si Z est une sous-variété complexe de la boule unité de \mathbf{C}^k , nous notons $\text{Tub}(Z, \epsilon)$ le voisinage tubulaire de Z de rayon ϵ . La proposition suivante est une conséquence directe du théorème 2.4 de l'article [1].

Proposition 5.2 (BEDFORD et TAYLOR). *Soit u une fonction pluri-sous-harmonique définie sur le polydisque unité de \mathbf{C}^k . Soit Z l'intersection du polydisque de rayon moitié avec un sous-espace vectoriel complexe de codimension q . Si u est höldérienne d'exposant α , il existe alors une constante C telle que*

$$\int_{\text{Tub}(Z, \epsilon)} (dd^c u)^k \leq C \epsilon^{q\alpha}.$$

Corollaire 5.3. *Soit M une variété complexe compacte de dimension k et T un courant de bidegré $(k-1, k-1)$, positif et fermé sur M qui admet des potentiels locaux höldériens d'exposant strictement supérieur à α . Soit Z une sous-variété analytique fermée de M de codimension q (éventuellement singulière), alors*

$$\int_{\text{Tub}(Z, \epsilon)} T^k \leq C^{ste} \epsilon^{q\alpha}.$$

Démonstration. Lorsque Z est lisse, la proposition permet de majorer la mesure du voisinage tubulaire de rayon ϵ par $\epsilon^{\alpha q}$, où q est la codimension de Z .

Lorsque Z n'est plus lisse, on opère par récurrence sur la dimension de Z . Lorsque Z est une union finie de points, le résultat est contenu dans la proposition. Supposons le résultat acquis jusqu'en dimension l et fixons une sous-variété de dimension $l+1$. Décomposons Z en l'union de sa partie lisse Z_l et de sa partie singulière Z_s , qui

est un sous-espace analytique de dimension inférieure ou égale à $l - 1$ dans M . Le voisinage tubulaire de Z de rayon ϵ est contenu dans l'union du voisinage tubulaire $\text{Tub}(Z_s, 2\epsilon)$ et du voisinage tubulaire de la variété (lisse) à bord $Z_l \setminus \text{Tub}(Z_s, 2\epsilon)$. L'intégrale de T^k le long du premier ensemble se majore en utilisant l'hypothèse de récurrence. L'intégrale le long du second résulte du cas lisse. \square

Corollaire 5.4. *Soit M une variété complexe de dimension k et T un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ qui admet des potentiels locaux höldériens d'exposant α . La dimension de HAUSDORFF de la mesure $\mu = T^k$ est alors minorée par $k\alpha$.*

Démonstration. La majoration énoncée dans la proposition 5.2 fournit l'inégalité

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)} \right\} \geq k\alpha$$

pour tout point x de M . Par conséquent, la mesure de HAUSDORFF de μ est minorée par $k\alpha$. \square

Remarque 5.5. Lorsque l'on applique cette inégalité au cas de la mesure d'entropie maximale d'un endomorphisme de l'espace projectif, on obtient

$$\dim_H(\mu) \geq \frac{h_{\text{top}}(f)}{\chi_{\text{top}}(f)},$$

où $\chi_{\text{top}}(f)$ est l'exposant de LYAPOUNOFF topologique de f . C'est une conséquence assez faible d'un résultat de DINH et DUPONT (voir [16]) dont voici l'énoncé dans le cas des endomorphismes de l'espace projectif : la dimension de HAUSDORFF de la mesure d'entropie maximale μ_f satisfait

$$0 \leq \dim_H(\mu_f) - \frac{h_{\text{top}}(f)}{\chi_k(f)} \leq 2k - 2 \frac{\Sigma(f)}{\chi_k(f)},$$

où $\chi_k(f)$ est le plus grand exposant de LYAPOUNOFF de f et $\Sigma(f)$ est la somme des exposants de LYAPOUNOFF (pour la mesure μ_f).

5.3. Mesure de l'ensemble post-critique. Il s'agit maintenant de majorer la mesure du voisinage tubulaire de rayon r de l'ensemble post-critique PC_l d'un endomorphisme. La remarque suivante traite le cas de la dimension 1.

Remarque 5.6. En dimension 1, l'ensemble critique de f est constitué de $d_t(d_t - 1)$ points au plus et l'ensemble post-critique PC_l contient donc au plus $(l + 1)(d_t^2 - d_t)$ points. Son voisinage tubulaire de rayon r est donc majoré par $(l + 1)(d_t^2 - d_t)r^\alpha$, où α est l'exposant de HÖLDER du potentiel de GREEN de f . L'estimée nécessaire à la preuve du théorème 1.3 est donc évidente.

En dimension plus grande, le volume de l'ensemble post-critique explose comme $d^{(k-1)l}$ et devient très singulier. Nous nous contenterons d'estimations grossières mais suffisantes pour cet article.

Proposition 5.7. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Il existe un nombre entier o et une constante c tels que*

$$\text{Tub}(f^j(V), \eta) \subset f^j \left(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-j}\eta) \right) \cup \bigcup_{k=0}^{j-1} f^k \left(\text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + (c\epsilon^o)^{-k}\eta) \right).$$

pour tout choix de η et ϵ entre 0 et 1.

Pour démontrer ce résultat, commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 5.8. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Il existe un nombre réel $c > 0$ et un entier $o > 0$ tels que*

$$f(B(x, \eta)) \supset B(f(x), c \text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))^o \eta)$$

pour tout réel $1 > \eta > 0$ et tout point x de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$.

Démonstration. Soit z un point de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ pour lequel $f(z)$ n'appartient pas à $f(\text{Cr}(f))$. Alors Df_z est inversible et l'on peut inverser f au voisinage de $f(z)$. Il existe alors un réel positif o et une constante M tels que la norme de Df_y^{-1} satisfasse

$$\| Df_y^{-1} \| \leq M \text{dist}(y, f(\text{Cr}(f)))^{-o}$$

dès que y est hors de $f(\text{Cr}(f))$. Notons en outre que, dans cette inclusion, nous pouvons remplacer o par $\max(1, o)$, ce qui permettra toujours de supposer que o est supérieur ou égal à 1.

Soit x un point de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ pour lequel $f(x)$ n'appartient pas à $f(\text{Cr}(f))$. Soit y un point quelconque de la boule de centre $f(x)$ et de rayon

$$\frac{1}{2} \text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f))).$$

Le supremum de $\| Df_y^{-1} \|$ sur cette boule est majoré par $M(\text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))/2)^{-o}$, et le théorème des accroissements finis entraîne

$$f^{-1}(B(f(x), \nu)) \subset B(x, M(\text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))/2)^{-o} \nu)$$

dès que ν est inférieur à $(1/2)\text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))$. En prenant $0 < \eta < 1$, et en posant

$$\nu = \frac{1}{2^o M} \text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))^o \eta$$

nous obtenons alors l'affirmation suivante : il existe une constante $c = 1/(2^o M)$ telle que

$$B(f(x), c \text{dist}(f(x), f(\text{Cr}(f)))^o \eta) \subset f(B(x, \eta)).$$

pour tout $0 < \eta < 1$, et pour tout point x de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Cette inégalité reste valable si l'on remplace o par $[o] + 1$, ce qui démontre le lemme. \square

Démonstration de la proposition. D'après le lemme précédent, il existe une constante $c > 0$ et un entier positif o tels que

$$f(B(x, \eta)) \supset B(f(x), c\epsilon^o \eta)$$

pour tout $0 < \eta < 1$, et pour tout point x satisfaisant $f(x) \notin \text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon)$.
Notons donc $W(\epsilon)$ l'ensemble

$$W(\epsilon) = f^{-1}(\text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon)).$$

Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$, et si η appartient à $]0, 1[$, nous obtenons

$$\text{Tub}(f(V \cap {}^cW(\epsilon)), \eta) \subset f(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-1}\eta)),$$

ce qui fournit l'inclusion

$$\begin{aligned} \text{Tub}(f(V), \eta) &\subset \text{Tub}(f(V \cap {}^cW(\epsilon)), \eta) \cup \text{Tub}(f(V \cap W(\epsilon)), \eta) \\ &\subset f(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-1}\eta)) \cup \text{Tub}(f(W(\epsilon)), \eta) \\ &\subset f(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-1}\eta)) \cup \text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + \eta). \end{aligned}$$

Appliquant ceci pour $f(V)$ et V , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \text{Tub}(f^2(V), \eta) &\subset f(\text{Tub}(f(V), (c\epsilon)^{-1}\eta)) \cup \text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + \eta) \\ &\subset f^2(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-2}\eta)) \cup f(\text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + (c\epsilon^o)^{-1}\eta)) \\ &\quad \cup \text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + \eta). \end{aligned}$$

Par récurrence, il vient donc

$$\text{Tub}(f^j(V), \eta) \subset f^j(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-j}\eta)) \cup \bigcup_{k=0}^{j-1} f^k(\text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + (c\epsilon^o)^{-k}\eta)).$$

□

Prenons maintenant pour V une hypersurface de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$. Puisque la mesure μ_f est de jacobien constant d_t , la quantité $\mu_f(\text{Tub}(f^j(V), \eta))$ est majorée par

$$d_t^j \mu_f(\text{Tub}(V, (c\epsilon^o)^{-j}\eta)) + \sum_{k=0}^{j-1} d_t^k \mu_f(\text{Tub}(f(\text{Cr}(f)), \epsilon + (c\epsilon^o)^{-k}\eta)).$$

En appliquant le corollaire 5.3 en prenant pour T le courant de GREEN de f et pour Z une hypersurface W de l'espace projectif (donc de codimension $q = 1$), nous obtenons l'inégalité

$$\mu_f(\text{Tub}(W, \nu)) \leq C_W \nu^\alpha,$$

où C_W est une constante strictement positive dépendant de W . Utilisons ceci pour $W = V$ ou $W = f(\text{Cr}(f))$, et notons K le maximum de C_V et $C_{f(\text{Cr}(f))}$. Nous obtenons alors la majoration

$$\mu_f(\text{Tub}(f^j(V), \eta)) \leq K d_t^j (c\epsilon^o)^{-j\alpha} \eta^\alpha + K \sum_{k=0}^{j-1} d_t^k (\epsilon + (c\epsilon^o)^{-k}\eta)^\alpha.$$

Soit maintenant n un entier strictement positif et γ un réel strictement plus grand que 1. Posons alors

$$\eta = \gamma^{-n}, \quad \epsilon = \frac{1}{c^{1/o}} \eta^{1/(o\sqrt{n})} = \frac{1}{c^{1/o}} \gamma^{-\sqrt{n}/o},$$

de sorte que

$$c\epsilon^o = \gamma^{-\sqrt{n}}.$$

Supposons enfin que j est majorée par $n^{1/3}$. En notant encore K le maximum de K et de $1/c^{1/o}$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mu_f(\text{Tub}(f^j(V), \gamma^{-n})) &\leq K d_t^j \gamma^{\alpha j \sqrt{n}} \gamma^{-\alpha n} + K \sum_0^{j-1} d_t^k (K \gamma^{-\sqrt{n}/o} + (\gamma^{-\sqrt{n}})^{-k} \gamma^{-n})^\alpha \\ &\leq K^2 d_t^{n^{1/3}} \left\{ \gamma^{\alpha n^{1/3} \sqrt{n}} \gamma^{-\alpha n} + \sum_0^{j-1} (\gamma^{-\sqrt{n}/o} + \gamma^{-n+n^{1/3} \sqrt{n}})^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, ceci fournit les inégalités

$$\mu_f(\text{Tub}(f^j(V), \gamma^{-n})) \leq 2K^2 n^{1/3} d_t^{n^{1/3}} (\gamma^{-\sqrt{n}/o})^\alpha.$$

En appliquant cette estimation à $V = \text{Cr}(f)$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 5.9. *Soit f un endomorphisme de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ de degré topologique d_t supérieur ou égal à 2. Soit γ un réel strictement plus grand que 1. Il existe une constante K et un entier N tels que la propriété suivante soit satisfaite pour tout $n \geq N$: si l est inférieur ou égal à $n^{1/3}$, la mesure du voisinage tubulaire de rayon γ^{-n} de l'ensemble post-critique PC_l est majorée par*

$$K n^{2/3} d_t^{n^{1/3}} \gamma^{-\alpha \sqrt{n}/o}.$$

RÉFÉRENCES

- [1] Eric Bedford and B. A. Taylor. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. *Invent. Math.*, 37(1) :1–44, 1976.
- [2] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [3] Armand Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341. Hermann, Paris, 1969.
- [4] Jean-Yves Briend. *Exposants de Lyapounoff et points périodiques d'endomorphismes de \mathbf{CP}^k* . Thèse de Doctorat, Toulouse, 1997.
- [5] Jean-Yves Briend. Propriété de Bernoulli pour les extensions naturelles des endomorphismes de \mathbf{CP}^k . *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(4) :1001–1007, 2001.
- [6] Jean-Yves Briend. La propriété de Bernoulli pour les endomorphismes de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(2) :323–327, 2002.
- [7] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.
- [8] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93) :145–159, 2001.
- [9] Robert Burton and Manfred Denker. On the central limit theorem for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(2) :715–726, 1987.
- [10] Laurent Clozel. Automorphic forms and the distribution of points on odd-dimensional spheres. *Israel J. Math.*, 132 :175–187, 2002.
- [11] Laurent Clozel, Hee Oh, and Emmanuel Ullmo. Hecke operators and equidistribution of Hecke points. *Invent. Math.*, 144(2) :327–351, 2001.

- [12] Laurent Clozel and Jean-Pierre Otal. Unique ergodicité des correspondances modulaires. In *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, volume 38 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 205–216. Enseignement Math., Geneva, 2001.
- [13] Yves Colin de Verdière. Distribution de points sur une sphère (d’après Lubotzky, Phillips et Sarnak). *Astérisque*, (177-178) :Exp. No. 703, 83–93, 1989. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.
- [14] Manfred Denker, Feliks Przytycki, and Mariusz Urbański. On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(2) :255–266, 1996.
- [15] Yves Derriennic and Michael Lin. The central limit theorem for Markov chains with normal transition operators, started at a point. *Probab. Theory Related Fields*, 119(4) :508–528, 2001.
- [16] Tien-Cuong Dinh and Christophe Dupont. Dimension de la mesure d’équilibre d’applications méromorphes. *J. Geom. Anal.*, 14(4) :613–627, 2004.
- [17] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamique des applications d’allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(4) :367–423, 2003.
- [18] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps. *Preprint*, pages 1–17, 2004.
- [19] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimensions. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.
- [20] Mikhail I. Gordin. The central limit theorem for stationary processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 188 :739–741, 1969.
- [21] Vincent Guedj. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Annals of Mathematics, à paraître*, pages 1–16, 2005.
- [22] Yves Guivarc’h. Généralisation d’un théorème de von Neumann. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 268 :A1020–A1023, 1969.
- [23] Yves Guivarc’h. Limit theorems for random walks and products of random matrices. *Prépublication de l’IRMAR*, 04-37 :1–49, 2004.
- [24] Peter Hall and Christopher C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. Probability and Mathematical Statistics.
- [25] Pierre Liardet and Dalibor Volný. Sums of continuous and differentiable functions in dynamical systems. *Israel J. Math.*, 98 :29–60, 1997.
- [26] Alexander Lubotzky, Ralph Phillips, and Peter Sarnak. Hecke operators and distributing points on the sphere. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(S, suppl.) :S149–S186, 1986. *Frontiers of the mathematical sciences : 1985 (New York, 1985)*.
- [27] Alexander Lubotzky, Ralph Phillips, and Peter Sarnak. Hecke operators and distributing points on S^2 . II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(4) :401–420, 1987.
- [28] Amos Nevo and Elias M. Stein. A generalization of Birkhoff’s pointwise ergodic theorem. *Acta Math.*, 173(1) :135–154, 1994.
- [29] Katy Paroux. Marches aléatoires sur le cercle. Théorème central limite et irrationnalité. In *Fascicule de probabilités*, volume 1993 of *Publ. Inst. Rech. Math. Rennes*, page 17. Univ. Rennes I, Rennes, 1993.
- [30] David J. Scott and Richard M. Huggins. On the embedding of processes in Brownian motion and the law of the iterated logarithm for reverse martingales. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 27(3) :443–459, 1983.
- [31] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k . In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [32] Marcelo Viana. *Stochastic dynamics of deterministic systems*, volume 21. IMPA, 1997.
- [33] Èrnest B. Vinberg, Vladimir V. Gorbatsevich, and O. V. Shvartsman. Discrete subgroups of Lie groups. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.

- [34] Dalibor Volný. On limit theorems and category for dynamical systems. *Yokohama Math. J.*, 38(1) :29–35, 1990.

IRMAR, UMR 6625 DU CNRS, UNIVERSITÉ DE RENNES I, 35042 RENNES, FRANCE
E-mail address: `cantat@univ-rennes1.fr`