Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment

Vũ Ngọc San*

Abstract

The semi-classical study of a 1-dimensional Schrödinger operator near a non-degenerate maximum of the potential has lead Colin de Verdière and Parisse to prove a microlocal normal form theorem for any 1-dimensional pseudo-differential operator with the same kind of singularity. We present here a generalization of this result to pseudo-differential integrable systems of any finite degree of freedom with a Morse singularity. Our results are based upon Eliasson's study of critical integrable systems.

Motivation

L'étude des propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger $-\frac{h^2}{2}\Delta + V$ en régime semi-classique ($h \to 0$) en fonction de la forme du potentiel V pose naturellement le problème de savoir dans quelle mesure, étant donné un h-opérateur pseudo-différentiel $P(h)$, son symbole principal p influe sur la nature des solutions microlocales de l'équation :

$$Pu = O(h^\infty). \tag{1}$$

Dans le cas où P est auto-adjoint à variétés caractéristiques compactes (par exemple, l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}$ avec un potentiel tendant vers l'infini en $\pm\infty$) , on a ainsi accès au comportement microlocal du spectre semi-classique. Ce problème est discuté par exemple dans [16, 17] et les références qui y sont citées.

*Institut Fourier UMR5582, B.P. 74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France. Actuellement détaché à : Mathematics Institute, Budapestlaan 6, University of Utrecht, 3508 TA Utrecht, the Netherlands. e-mail:vu-ngoc@math.ruu.nl

Au voisinage de *points réguliers* de p, la théorie est bien connue et ne réserve plus guère de surprise. En effet, P se conjugue par un opérateur intégral de Fourier à un opérateur de dérivation $\frac{h}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$. Cette forme normale, qui n'est qu'une autre formulation des solutions WKB, permet de trouver les conditions, dites "de Bohr-Sommerfeld", sous lesquelles l'équation (1) admet des solutions L^2 (voir par exemple [10]).

La présence de *points critiques*, et en particulier instables, rend les choses plus intéressantes, comme en témoignent par exemple les articles [2, 23, 6, 7]. Néanmoins, comme l'ont remarqué les auteurs de [23, 6], on peut encore trouver une *forme normale* au voisinage du point critique, pourvu que celui-ci soit non-dégénéré. Y.Colin de Verdière et B.Parisse montrent dans [7] comment en déduire une version singulière des conditions de Bohr-Sommerlfeld qui permet une description très précise du spectre semi-classique.

Le but de cet article est de généraliser le théorème de forme normale microlocale à des systèmes complètement intégrables d'opérateurs pseudo-différentiels en dimension quelconque. On obtient des analogues semi-classiques étroits des résultats classiques d'Eliasson. Lorsque la singularité est de type elliptique, nos résultats sont à rapprocher des formes normales de Birkhoff semi-classiques de Sjöstrand [24] (on obtient des résultats plus forts, mais les hypothèses le sont aussi).

Dans un autre travail [26], nous montrerons comment ces résultats permettent, via des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières, de décrire très précisément le *spectre conjoint* de ces systèmes complètement intégrables.

Mentionnons aussi que Bleher, Kosygin et Sinai [1] arrivent à une description spectrale des systèmes de Liouville (qui représentent une classe générale de systèmes intégrables en dimension 2), par une approche différente.

1 Introduction

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, un système complètement intégrable est la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n$ en involution pour le crochet de Poisson défini par la structure symplectique, et dont les différentielles sont presque partout indépendantes. Si H est un hamiltonien appartenant à l'algèbre des fonctions C^∞ fonctionnellement engendrées par $f_1, \dots, f_n$, il est dit complètement intégrable et les f_i sont des intégrales premières du mouvement. Un tel système définit une action hamiltonienne locale de $\mathbb{R}^n$ dans M, d'application moment :

$$F \ : \ M \ni m \mapsto (f_1(m), \dots, f_n(m)) \in \mathbb{R}^n,$$

et dont les orbites sont génériquement les fibres lagrangiennes $F^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, on sait (théorème d'Arnold-Liouville [11]) que si c est une valeur régulière de F, et si $F^{-1}(c)$ est compacte, alors au voisinage de c, les ensembles de niveau de F sont des tores lagrangiens qui s'écrivent $\xi = cst$ dans des bonnes coordonnées symplectiques (x, ξ). En outre, dans ces coordonnées – dites "actions (ξ) - angles (x)" – le mouvement dans chaque tore est linéaire.

Supposons maintenant qu'on se donne n opérateurs pseudo-différentiels P_1, ..., P_n sur une variété X de dimension n, qui commutent deux-à-deux, et dont les symboles principaux forment un système complètement intégrable sur T^*X. En dehors des points critiques de l'application moment, l'usage des coordonnées actions-angles classiques permet alors de se ramener au cas où les opérateurs sont simplement les $\frac{h}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Une telle forme normale permet d'écrire les conditions de Bohr-Sommerfeld sous lesquelles on peut résoudre simultanément les équations $P_i u = O(h^\infty)$ et qui sous certaines hypothèses, donnent la forme du *spectre conjoint* des P_i. Comme le cas unidimensionnel mentionné plus haut, ceci est connu depuis longtemps, au moins des physiciens quantiques. Les preuves mathématiques rigoureuses de ce phénomène, comprenant les asymptotiques complètes des valeurs propres, sont données par les travaux d'Anne-Marie Charbonnel [3] et Yves Colin de Verdière [4].

La question qui nous intéresse est donc de savoir ce que devient le système au voisinage d'un point critique de F. Au niveau classique, on est amené à se placer dans l'hypothèse d'un point critique "de Morse", ou "non-dégénéré", en un sens précisé en section 2.

Le résultat principal (théorèmes 3.1 et 3.4) peut, en gros, se formuler ainsi :

"l'algèbre engendrée par les opérateurs P_i est, à $O(h^\infty)$ près, conjuguée par un opérateur intégral de Fourier à une algèbre standard ne dépendant que des dérivées secondes des symboles principaux p_i au point critique."

C'est une généralisation de [6], où le résultat est donné en dimension 1. On verra cependant que, comme le théorème d'Eliasson le laissait prévoir, le cas multi-dimensionnel introduit une subtilité, due au fait que l'algèbre standard en question peut avoir une formulation légèrement différente selon que les fibres lagrangiennes sont localement connexes ou non. On en donnera malgré tout une description complète dans le cas général (proposition 3.2).

2 Formes normales classiques

Le but de cette section est de présenter les théorèmes de formes normales classiques, qui sont essentiellement dus à Eliasson [12], mais aussi de mettre clairement en valeur les ingrédients essentiels pour la quantification semi-classique de la section suivante, comme le *commutant classique* (proposition 2.5) et le *lemme de Poincaré critique*.

Les résultats présentés ici sont locaux, au voisinage du point critique. Il est à noter néanmoins que l'étude topologique globale de tels systèmes complètement intégrables à singularités, initiée par Fomenko, est de mieux en mieux comprise; à ce sujet, se référer aux dernières mises au point de Nguyen Tiên Zung [19].

2.1 Le théorème d'Eliasson

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $m \in M$. Le crochet de Poisson munit l'espace des fonctions C^∞ sur M d'une structure d'algèbre de Lie. On note $\mathcal{H}$ l'homomorphisme de la sous-algèbre de Lie des fonctions critiques en m sur l'espace $\mathcal{Q}(2n)$ des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, \xi)\}$, qui à f associe sa hessienne. La structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{Q}(2n)$ est aussi donnée par le crochet de Poisson. $\mathcal{Q}(2n)$ est ainsi canoniquement isomorphe à $\mathfrak{sp}(2n)$.

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ un système complètement intégrable sur M. On dit que m est un point critique du système s'il est critique pour l'application moment F. Dans ce travail, on considèrera toujours que la singularité est de codimension maximale, au sens où chaque f_i est critique en m. On supposera aussi que $f_i(m) = 0$, ce qui n'ôte aucune généralité.

À un tel système complètement intégrable singulier, on peut associer une sous-algèbre réelle $\mathfrak{c}_F$ de $\mathcal{Q}(2n)$, à savoir la sous-algèbre engendrée par

$$\{\mathcal{H}(f_1), \ldots, \mathcal{H}(f_n)\}.$$

On remarque que $\mathfrak{c}_F$ est toujours abélienne.

Définition 2.1 *Un système complètement intégrable singulier d'application moment F est dit* non-dégénéré *au point m si $\mathfrak{c}_F$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{Q}(2n)$.*

Rappelons qu'on appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ commutative maximale, et qui vérifie en outre la propriété suivante :

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \quad \mathrm{ad}_H \text{ est un endomorphisme semi-simple de } \mathfrak{a}. \tag{2}$$

Depuis les travaux de Williamson [27], on sait classifier les sous-algèbres de Cartan réelles de $\mathcal{Q}(2n)$ modulo conjugaison par un symplectomorphisme. Le résultat est le suivant :

Théorème 2.1 (Williamson) *Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan réelle de $\mathcal{Q}(2n)$. Il existe des coordonnées symplectiques linéaires $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, et une base $q_1, \ldots, q_n$ de $\mathfrak{a}$ telle que chaque q_i ait l'une des trois formes suivantes :*

- $q_i = x_i \xi_i$ *(singularité* hyperbolique*)*

- $q_i = x_i^2 + \xi_i^2$ *(singularité* elliptique*)*
- $q_i = x_i\xi_{i+1} - x_{i+1}\xi_i$, *auquel cas on demande que* $q_{i+1} = x_i\xi_i + x_{i+1}\xi_{i+1}$ *(singularité* focus-focus*).*

Suivant Eliasson [12], on appellera $(q_1, \ldots, q_n)$ une *base standard* de $\mathfrak{a}$, et suivant Nguyên Tiên Zung, on dira que $\mathfrak{a}$ est de *type* (m_e, m_h, m_f), avec $m_e+m_h+2m_f = n$, si une base standard contient m_e éléments de type elliptique, m_h éléments hyperboliques, et m_l paires de type focus-focus.

Remarque : la condition (2) est nécessaire; par exemple, pour $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, la sous-algèbre engendrée par $q = \xi^2$ est commutative maximale mais ne relève pas de la classification ci-dessus. En effet, $\mathrm{ad}_q = 2\xi\frac{\partial}{\partial x}$ est nilpotente donc pas semi-simple.

On note $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de Lie de $C^\infty(M)$ fonctionnellement engendrée par les $f_1, \ldots, f_n$. Si $g_1, \ldots, g_n$ est un système générateur de $\mathcal{A}$, de telle sorte qu'il existe des fonctions $F_1, \ldots, F_n$ telles que

$$f_i = F_i(g_1, \ldots, g_n), \; i = 1, \ldots, n$$

alors les $\mathcal{H}(g_i)$ forment une base de A qui s'obtient à partir de $\mathcal{H}(f_i)$ par le changement de base linéaire $dF^{-1}(0)$. Ceci montre en particulier que la sous-algèbre de Cartan associée ne dépend pas de la base de $\mathcal{A}$ choisie.

On a alors le théorème fondamental :

Théorème 2.2 (Eliasson [12, 4.1]) *Pour un tel système complètement intégrable, soit $(q_1, \ldots, q_n)$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée. Alors le feuilletage lagrangien singulier donné par les surfaces de niveau des f_i est localement symplectiquement égal à celui donné par les q_i.*

Autrement dit, il existe un difféomorphisme symplectique φ au voisinage de m tel que :

$$\forall i, j \quad \{f_i \circ \varphi, q_j\} = 0.$$

2.2 Un exemple : le problème de C.Neumann classique

Le problème de C.Neumann est celui du mouvement d'une particule sur une sphère de dimension n soumise à une force dérivant d'un potentiel quadratique. On se donne donc une matrice symétrique réelle A définie positive de taille $n+1$. Le potentiel V est la restriction à S^n de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ associée :

$$V(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle.$$

Le mouvement est décrit sur T^*S^n par l'Hamiltonien

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x).$$

La métrique sur la sphère est celle induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et la structure symplectique sur T^*S^n n'est autre que la restriction de la structure standard de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Remarquons ici que le problème est invariant par antipodie, ce qui nous autorise à le considérer sur $\mathbb{P}^n$ plutôt que sur S^n.

Il est pratique de voir ce système comme la restriction d'un système hamiltonien sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ de la façon suivante :

Contraindre le mouvement à s'effectuer sur S^n revient à tenir compte d'une force de réaction normale à la sphère. L'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{x} = -V'(x) + \lambda x.$$

De $|x|^2 = 1$, on tire $\langle x, \dot{x}\rangle = \langle x, \ddot{x}\rangle + |\dot{x}|^2 = 0$, ce qui permet de déterminer λ :

$$\lambda = \langle V'(x), x\rangle - |\dot{x}|^2 = 2V(x) - |\dot{x}|^2.$$

On peut alors vérifier que cette équation est obtenue en restreignant à

$$T^*S^n = \{(x,\xi), \quad |x|^2 = 1, \quad \langle x, \xi\rangle = 0\} \tag{3}$$

le champ de vecteurs sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ d'Hamiltonien :

$$H_0(x,\xi) = V(x) + \frac{1}{2}(|x|^2|\xi|^2 - \langle x,\xi\rangle^2).$$

On peut alors montrer que H_0 est complètement intégrable, et on dispose même d'un système explicite d'intégrales en involution, trouvé en 1975 par Uhlenbeck. Ce problème a des liens très étroits avec le flot géodésique sur un n-ellipsoïde; à ce sujet, voir [18].

Nous nous intéressons ici aux points fixes du flot.

Proposition 2.3 *Le problème de C.Neumann sur $T^*\mathbb{P}^n$ a exactement $n+1$ points fixes $p_0, \dots, p_n$. En ordonnant convenablement les p_i, pour un potentiel non-résonnant, le système complètement intégrable associé est, au voisinage de p_i, non-dégénéré de type $(n-i, i, 0)$.*

Démonstration: on détermine les points critiques de H par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui se trouvent être les valeurs propres λ_i de A. Les p_i sont donc une base de vecteurs propres aux voisinages desquels on peut écrire la forme de Morse de H. On voit alors que si V est assez générique, H'' est un élément régulier de la sous-algèbre de Cartan, ce qui permet de déterminer son type. □

Remarque 1 : la condition de non-résonance requise est celle de l'indépendance sur $\mathbb{Z}$, pour tous i, des $\sqrt{|\lambda_i - \lambda_j|}$, $j \neq i$. Elle est bien-entendu générique.

Remarque 2 : on n'obtient pas dans cet exemple de singularité *focus-focus*. Mais ce dernier type de singularité, même s'il a longtemps été négligé, est loin d'être rare; il apparaît par exemple au point d'équilibre instable du pendule sphérique (voir [11]).

2.3 Le commutant classique

De la même façon qu'au niveau quadratique l'objet essentiel était pour nous la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_F$, on voit à l'énoncé du théorème 2.2 que l'algèbre de fonctions C^∞ qui va nous intéresser tout au long de ce travail est le *commutant classique* des q_j, qu'on note C_q :

$$C_q = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \forall j, \ \{f, q_j\} = 0\}.$$

C'est l'algèbre des fonctions localement constantes sous l'action des champs Hamiltoniens des q_i.

Décrivons la structure de cette algèbre. Une première idée naturelle est que, au moins formellement, tout élément de C_q doit pouvoir s'exprimer comme "fonction des seules variables $q_1, \ldots, q_n$". En dehors du cadre formel, ce n'est cependant pas aussi simple.

Notons $z_i = (x_i, \xi_i)$, et soit H_i l'ensemble des points $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $z_i = 0$. L'union des H_i est exactement le lieu des points critiques de l'application moment $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Lemme 2.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bigcup_{i=1}^n H_i)$ tel que pour tous $c \in \mathbb{R}^n$, la feuille lagrangienne $U \cap q^{-1}(c)$ soit connexe (ou vide). Alors la restriction de toute fonction $f \in C_q$ à U peut s'écrire comme fonction C^∞ de $(q_1, \ldots, q_n)$ uniquement.*

Démonstration: en chaque point z de $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\bigcup_{i=1}^n H_i)$, les fonctions $q_1, \ldots, q_n$ sont indépendantes, donc, d'après le théorème de Darboux-Carathéodory, elles peuvent être complétées en des coordonnées symplectiques $(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$ sur un voisinage Ω de z. La condition d'appartenance à C_q devient alors $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. En recouvrant U par de tels voisinages Ω_α, on obtient des fonctions F_α telles que

$$f_{\restriction \Omega_\alpha} = F_\alpha(q_1, \ldots, q_n).$$

L'hypothèse de connexité des surfaces de niveau de q implique que la valeur de $F_\alpha(q_1, \ldots, q_n)$ ne dépend pas de α. On obtient ainsi une unique fonction C^∞ F telle que

$$f_{\restriction U} = F(q_1, \ldots, q_n),$$

ce qui répond à la question. □

Une conséquence directe de lemme est que C_q est une algèbre *commutative*. En effet, deux fonctions $F_1(q_1,\ldots,q_n)$ et $F_2(q_1,\ldots,q_n)$ commutent. Donc deux éléments f_1 et f_2 de C_q commutent presque partout, et donc partout, par continuité du crochet de Poisson.

Supposons maintement que $n=1$ et que l'algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ soit de type $(1,0,0)$ (autrement dit, q est elliptique). Les surfaces de niveau de q sont des cercles; on peut donc, dans le précédent lemme, choisir $U=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ et obtenir que toute $f\in C_q$ s'écrive $F(q)$ sur U. On peut montrer facilement qu'un tel F est en réalité C^∞ en 0, et donc que f s'écrit $F(q)$ sur tout $\mathbb{R}^2$. Un même phénomène se produit lorsque $n=2$ et que $\mathfrak{c}_q$ est de type focus-focus $(0,0,1)$; il suffit pour cela de faire le calcul en coordonnées complexes

$$u=x_1+\sqrt{-1}x_2,\quad v=\xi_1+\sqrt{-1}\xi_2,$$

dans lesquelles les surfaces de niveau s'écrivent $\bar{u}v=\mathit{cste}$ et sont connexes (voir [12] pour le détail des calculs).

Le cas pathologique est donc celui d'une algèbre de type $(0,1,0)$ (hyperbolique). En effet les surfaces de niveau ont chacune deux composantes connexes. Un élément de C_q est donc décrit par deux fonctions F_+ et F_- telles que, par exemple,

$$f_{\restriction x>0}=F_+(q),\quad f_{\restriction x<0}=F_-(q). \tag{4}$$

On voit facilement que F_+-F_- doit être plate en 0, et réciproquement, tout couple de fonctions (F_+,F_-) sur $\mathbb{R}$ tel que F_+-F_- est plat en 0 définit un élement de C_q par (4).

On obtient ainsi l'énoncé suivant :

Proposition 2.5 *C_q est une algèbre de Poisson commutative. Si la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ est de type (m_e,m_h,m_l), on note $(q_1,\ldots,q_n)$ une base standard ordonnée, comportant en premier lieu les éléments hyperboliques. Pour chaque m_h-uplet $\epsilon=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m_h})$, $\epsilon_i=\pm1$, on pose*

$$E_\epsilon=\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n},\ \forall i=1,\ldots,m_h,\quad \epsilon_i x_i>0\}.$$

Un élément f de C_q est caractérisé par la donnée de 2^{m_h} fonctions $F_\epsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

- $\forall\epsilon$, $f_{\restriction E_\epsilon}=F_\epsilon(q_1,\ldots,q_n)$.
- $\forall(\epsilon,\epsilon')$, $F_\epsilon-F_{\epsilon'}$ *est plate sur* $\overline{E_\epsilon}\cap\overline{E_{\epsilon'}}$.

On en déduit un "lemme de division" que nous utiliserons souvent :

Lemme 2.6 *Soit $g \in C_q$. Alors*

- *il existe des fonctions $g_i \in C_q$ telles que :*

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^{n} g_i q_i.$$

- *il existe des fonctions $a_i \in C_q$ telles que :*

$$\mathcal{X}_g = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{q_i}.$$

Démonstration: par la formule de Taylor, chaque G_ϵ correspondant à g et donné par la proposition 2.5 s'écrit:

$$G_\epsilon(q_1, \ldots, q_n) = G_\epsilon(0) + \sum_{i=1}^{n} q_i G_\epsilon^i(q_1, \ldots, q_n).$$

Pour chaque i, les couples $(G_\epsilon^i, G_{\epsilon'}^i)$ vérifient les mêmes hypothèses de platitude, et donc définissent un élément g_i de C_q. Ces g_i répondent au premier point.

De la même façon, sur chaque E_ϵ on a

$$\mathcal{X}_g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_\epsilon}{\partial q_i} \mathcal{X}_{q_i}.$$

En posant $a_\epsilon^i = \frac{\partial G_\epsilon}{\partial q_i}$, on voit que les a_ϵ^i vérifient toujours les bonnes hypothèses de platitude. Ils définissent donc des fonctions $a_i \in C_q$ qui répondent au deuxième point. $\square$

Revenant au théorème d'Eliasson, la proposition 2.5 implique immédiatement l'existence de formes normales "fortes" en l'absence d'élément hyperbolique :

Corollaire 2.7 *Soit $\mathcal{A}$ un système complètement intégrable critique non dégénéré; soit $(q_1, \ldots, q_n)$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée. On suppose qu'il n'y a pas parmi les q_i d'élément hyperbolique. Alors il existe des coordonnées symplectiques dans lesquelles $\mathcal{A}$ est engendrée par les q_i.*

En d'autres termes, il existe un difféomorphisme symplectique φ au voisinage de m et des fonctions $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de différentielles indépendantes en 0, telles que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad f_i \circ \varphi = F_i(q_i, \ldots, q_n).$$

Remarque 1 : il n'est pas certain que l'hypothèse de connexité des feuilles lagrangiennes soit nécessaire, puisque le résultat a été prouvé pour toute singularité non dégénérée en dimension deux : c'est le "Lemme de Morse isochore" (voir [8]). En outre, on sait ("théorème de Sternberg") qu'en dimension quelconque n, un hamiltonien H hyperbolique non résonnant (c'est-à-dire dont la hessienne est régulière dans une sous-algèbre de Cartan totalement hyperbolique: elle s'écrit $\sum \lambda_i x_i \xi_i$ avec des λ_i indépendants sur $\mathbb{Z}$) est complètement intégrable : il existe un symplectomorphisme local φ tel que $H \circ \varphi$ soit une fonction des $x_i \xi_i$. Or si l'on se donne un système complètement intégrable $\mathcal{A}$ de type purement hyperbolique ($m_h = n$), il existe une base de $\mathcal{A}$ formée par des fonctions toutes non-résonnantes. Il ne paraît donc pas absurde de penser qu'il puisse exister une forme normale dans ce cas. Dans [14] est exposée une belle démonstration du théorème de Sternberg mais elle semble résister au cas complètement intégrable...

Cependant, bien que le résultat serait intéressant en lui-même, une forme normale générale ne nous serait pas utile puisque le lemme crucial 2.9, nécessaire pour traiter le problème au niveau semi-classique est, quant à lui, faux en présence d'un mélange d'éléments hyperboliques avec des éléments d'autres types.

Remarque 2 : lorsque la singularité est entièrement *elliptique* ($q_i = x_i^2 + \xi_i^2$), le corolaire 2.7 est montré d'une façon différente par [9].

Remarque 3 : dans la catégorie analytique, la structure du commutant perd toute sa richesse, puisqu'il n'y a pas de fonctions analytiques plates, en dehors des fonctions constantes... D'ailleurs l'analogue analytique du théorème 2.2 était connu bien avant (voir [22] en dimension 2, et [25] en dimension quelconque).

Si maintenant $\mathfrak{c}_q$ contient des éléments hyperboliques ($m_h \neq 0$), nous utiliserons l'énoncé suivant, corollaire du théorème 2.2 et du lemme 2.6 :

Corollaire 2.8 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré, et $q_1, \ldots, q_n$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée (de type quelconque); alors il existe un symplectomorphisme φ tel qu'on ait, au voisinage de 0, :*

$$(f_1, \ldots, f_n) \circ \varphi = M.(q_1, \ldots, q_n),$$

où M est une matrice $n \times n$ de fonctions éléments de C_q, inversible en $z = 0$.

Le fait que M soit inversible en 0 est exactement l'hypothèse de non-dégénérescence du système : $M(0)$ est la matrice telle que :

$$(\mathcal{H}(f_1), \ldots, \mathcal{H}(f_n)) = M(0).\,(\mathcal{H}(q_1), \ldots, \mathcal{H}(q_n))$$

Notons que, sur l'ouvert où M est inversible, son inverse reste formé d'éléments de C_q, puisque ce dernier est une algèbre de Poisson.

2.4 Un "Lemme de Poincaré" critique

Après les théorèmes de forme normale 2.2 et 2.7, l'ingrédient le plus important dont nous auront besoin pour mener à bien la quantification semi-classique est le résultat suivant :

Théorème 2.9 (Eliasson) *Soit $q_1, \ldots, q_n$ une base standard d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ de $\mathfrak{sp}(2n)$. Dans tout voisinage de 0, il existe un sous-voisinage Ω de 0, tel que, si $g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions C^∞ à valeurs réelles ou complexes vérifiant :*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \quad \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\} \text{ sur } \Omega, \tag{5}$$

alors il existe une fonction f définie sur Ω, et des fonctions $F_i \in C_q$ formellement uniques, telles que, sur Ω,

$$\forall i = 1, \ldots, n \ \ \{f, q_i\} = g_i - F_i. \tag{6}$$

En réalité, l´énoncé d'Eliasson dans [12] ne mentionne pas l'existence d'un voisinage universel Ω, mais celui-ci se déduit facilement de sa preuve. On rappellera comment lors de la preuve de la variante 2.11.

Remarque 1 : pour $c \in \mathbb{R}^n$, notons Ω_c la lagrangienne $\cap q_i^{-1}(c_i)$. Elle est singulière pour $c = 0$. Aux points réguliers, les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{q_i}$ forment une base de l'espace tangent à Ω_c, ce qui permet de définir une 1-forme g_c sur Ω_c par :

$$g_c(\mathcal{X}_{q_i}) = g_i.$$

L'hypothèse du théorème 2.9 traduit alors que cette 1-forme est fermée. L'intégrer serait trouver une fonction f vérifiant $\{f, q_i\} = g_i$. Le théorème montre qu'on peut trouver une primitive f dépendant régulièrement du paramètre c même en $c = 0$, pourvu qu'on retranche à g une certaine fonction de c uniquement. Cette fonction contient donc les singularités "gênantes" de g en 0.

Remarque 2 : la remarque précédente prouve que l'hypothèse 5 du théorème est nécessaire, ce qui se vérifie aussi immédiatement en utilisant l'identité de Jacobi.

Supposons maintenant que $f_1, \ldots, f_n$ soient des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré en un point m, et soit $(q_1, \ldots, q_n)$ une base standard du la sous-algèbre de Cartan associée. Appliquant le théorème 2.2, on peut toujours supposer que, localement, les f_i sont dans C_q. Le théorème 2.9 admet alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.10 *Avec les hypothèse précédentes, dans tout voisinage de m, il existe un sous-voisinage Ω tel que, si $g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions vérifiant :*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \ \ \{g_i, f_j\} = \{g_j, f_i\} \text{ sur } \Omega,$$

alors il existe une fonction a sur Ω et des fonctions F_i dans C_q telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{a, f_i\} = g_i - F_i. \tag{7}$$

Démonstration: une application du lemme 2.6 donne l'existence d'une matrice N de fonctions dans C_q, inversible en 0, telle que:

$$(\mathcal{X}_{f_1}, \ldots, \mathcal{X}_{f_n}) = N.(\mathcal{X}_{q_1}, \ldots, \mathcal{X}_{q_n}).$$

La 1-forme g_c définie sur les parties régulières des feuilles lagrangiennes Ω_c par $g_c(\mathcal{X}_{f_i}) = g_i$, est donc donnée, dans la base $(\mathcal{X}_{q_1}, \ldots, \mathcal{X}_{q_n})$, par

$$(g_c(\mathcal{X}_{q_1}), \ldots, g_c(\mathcal{X}_{q_n}) = N^{-1}.(g_1, \ldots, g_n)$$

ce qui implique que l'hypothèse de fermeture $\{g_i, f_j\} = \{g_j, f_i\}$ est équivalente à $\{\tilde{g}_i, q_j\} = \{\tilde{g}_j, q_i\}$, où on a noté

$$(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n) = N^{-1}.(g_1, \ldots, g_n).$$

Appliquant alors le théorème 2.9, on obtient, sur Ω, une fonction a et des fonctions $\tilde{F}_i$ telles que:

$$(\{a, q_1\}, \ldots, \{a, q_n\}) = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n) - (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n),$$

ce qui se réécrit:

$$N.(\{a, q_1\}, \ldots, \{a, q_n\}) = (g_1, \ldots, g_n) - N.(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n).$$

Or $N.(\{a, q_1\}, \ldots, \{a, q_n\}) = (\{a, f_1\}, \ldots, \{a, f_n\})$, donc les fonctions a et

$$(F_1, \ldots, F_n) = N.(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n)$$

répondent à la question. □

Bien-sûr, diverses variantes de l'énoncé du théorème 2.9 et du corollaire ci-dessus s'obtiennent immédiatement en utilisant la proposition 2.5 et le lemme 2.6. En particulier, lorsque la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ ne contient pas d'élément hypoerbolique ($m_h = 0$), les F_i s'écrivent comme fonctions C^∞ de $(q_1, \ldots, q_n)$

Nous allons montrer maintenant que tel est aussi le cas dans la situation extrême où $\mathfrak{c}_q$ est de type entièrement hyperbolique ($m_h = n$).

Théorème 2.11 *Avec les hypothèses du théorème 2.9, si en outre la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ est de type hyperbolique $(0, n, 0)$, alors il existe une fonction f définie sur Ω, et des fonctions C^∞ $F_1, \ldots, F_n$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que, sur Ω,*

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \ldots, q_n). \tag{8}$$

On obtient ainsi un résultat optimal, dans le sens où une telle formulation devient fausse dès $m_h \neq 0$ et $m_h \neq n$.

Démonstration: tout au long des sections (2.4.1) et (2.4.2), on pose donc $q_i = x_i\xi_i$. Le schéma de la preuve est classique: on commence par examiner le cas formel (2.4.1), qui résout le problème modulo des fonctions plates, puis la solution du système (8) est donnée par une formule explicite (2.4.2).

2.4.1 Le cas hyperbolique formel

On note $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2n})$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré k en les variables $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$. L'algèbre de Lie (pour le crochet de Poisson) des fonctions formelles est constituée par l'espace

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k.$$

Si $P \in \mathcal{P}_m$, la représentation adjointe

$$\mathrm{ad}_P \ : \ Q \mapsto \{P, Q\}$$

est un endomorphisme de $\mathcal{P}$ envoyant $\mathcal{P}_k$ sur $\mathcal{P}_{m+k-2}$. En particulier, si P est quadratique, ad_P est un endomorphisme de chaque $\mathcal{P}_k$, et ad est une représentation de $\mathcal{Q}(2n) = \mathcal{P}_2$.

Soit $\hat{\mathcal{A}}$ la sous-algèbre des fonctions formelles des q_i (une base de $\hat{\mathcal{A}}$ est ainsi constituée par les monômes $x^\alpha \xi^\beta$ avec $\alpha = \beta$). Par abus de notation, on identifiera parfois $\hat{\mathcal{A}}$ avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ par $F = F(q_1, \ldots, q_n)$.

On veut donc prouver le résultat suivant :

Proposition 2.12 *Soient $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{P}$ telles que*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \ \ \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}.$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{P}$, et des fonctions $F_i \in \hat{\mathcal{A}}$ telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \ \ \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \ldots, q_n).$$

Démonstration: pour tous i, $\hat{\mathcal{A}} \in \ker(\mathrm{ad}_{q_i})$ donc ad_{q_i} se quotiente en un endomorphisme de $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$ (on désigne ainsi le quotient gradué $\oplus \mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k$). Plaçons-nous pour toute cette démonstration dans $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$; la proposition s'énonce alors ainsi :

$$\exists f, \ \ \forall i, \ \ \mathrm{ad}_{q_i} f = g_i. \tag{9}$$

Une algèbre de Cartan peut être caractérisée par un élément régulier, aussi n'est-il pas étonnant que le système (9) puisse, comme on va le voir, se réduire à une seule équation, à savoir

$$\mathrm{ad}_q f = g, \ \text{où } q = \sum \lambda_i q_i \text{ et } g = \sum \lambda_i g_i,$$

où les λ_i sont fixés indépendants sur $\mathbb{Z}$.

ad_q étant diagonalisable, de valeurs propres $\sum \lambda_i(\beta_i - \alpha_i)$ (associées aux vecteurs propres $x^\alpha \xi^\beta$), elle est inversible dans $\mathrm{End}(\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}})$ ($= \oplus \mathrm{End}(\mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k)$) et f est donc uniquement déterminée (dans $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$).

Montrons que $f = (\mathrm{ad}_q)^{-1} g$ convient :

$$\mathrm{ad}_{q_i} f = \mathrm{ad}_{q_i} (\mathrm{ad}_q)^{-1} g = (\mathrm{ad}_q)^{-1} \mathrm{ad}_{q_i} g$$

car ad_{q_i} et ad_q commutent (car $\{q_i, q\} = 0$). Or l'hypothèse $\{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}$ entraîne

$$\mathrm{ad}_{q_i} g = \mathrm{ad}_q g_i$$

donc $\mathrm{ad}_{q_i} f = g_i$ et la proposition est démontrée. □

2.4.2 Preuve du théorème 2.11

En appliquant la proposition précédente aux jets d'ordre infini $\hat{g}_i$ de g_i (qui vérifient toujours $\{\hat{g}_i, q_j\} = \{\hat{g}_j, q_i\}$), et en prenant des représentants C^∞ des fonctions $\hat{f}$ et F_i obtenues, on obtient que la fonction

$$\{\hat{f}, q_i\} - (\hat{g}_i - F_i(q_1, \ldots, q_n))$$

est plate en 0. Posons $f = \hat{f} + h$; on est ainsi ramené à chercher une fonction h telle que $\{h, q_i\} = \tilde{g}_i$, où $\tilde{g}_i = g_i - F_i - \{\hat{f}, q_i\}$ est plate en 0. Remarquons que $\tilde{g}_i$ vérifie toujours l'hypothèse 5.

Il suffit donc de montrer :

Proposition 2.13 *Dans tout voisinage de 0, il existe un voisinage Ω de 0 tel que, si g_i sont des fonctions C^∞ plates en 0, vérifiant, sur Ω,*

$$\{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\},$$

alors il existe une fonction f sur Ω (plate en 0) telle que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{f, q_i\} = g_i.$$

Démonstration: il serait tentant d'utiliser les méthodes de [14]. Malheureusement, cela nécessiterait de pouvoir supposer que les g_i soient à support compact, ce qui ne paraît pas compatible avec (5). Toujours est-il qu'en dimension 1, l'hypothèse (5) est vide, et la méthode marche très bien (voir [14] (theo 4)).

Nous allons donc nous rabattre sur les techniques d'intégration standard, expliquées en dimension 1 dans [8] et [12]. On montrera ici comment elles permettent de traiter le cas complètement intégrable.

On désigne toujours par $U_i(t)$ les flots des q_i. Notons $T_i(z)$ le temps que met z sous l'action de U_i à placer la coordonnée z_i sur l'unique hyperplan diagonal ou antidiagonal $x_i = \pm\xi_i$ qui rencontre le flot partant de z. C'est une fonction bien définie et C^∞ en dehors des hyperplans de coordonnées. On montre dans les références sus-citées que, pour toute fonction g plate en 0, l'intégrale :

$$\int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z)ds$$

définit une fonction C^∞ sur un voisinage de 0. Notons $\Delta_i(z)$ la projection de z sur le $i$ème hyperplan (anti)diagonal le long du flot de q_i, c'est-à-dire $\Delta_i(z) = U_i(T_i(z))z$ (voir figure 1). Il est essentiel de remarquer ici que tout voisinage de 0 contient un sous-voisinage stable par Δ_i; on choisit pour Ω un tel voisinage stable.

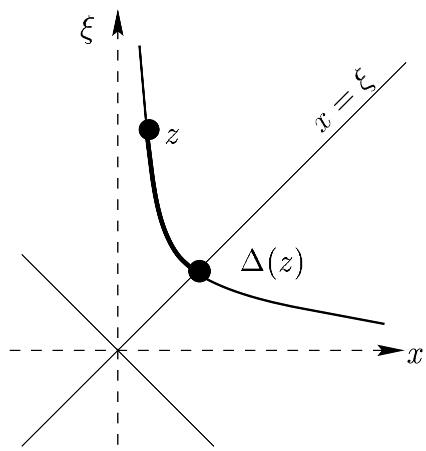

FIG. 1 – $\Delta(z) = U(T(z))z$.

Lemme 2.14 *Soit g une fonction plate en 0 et, pour $z \in \Omega$, soit $f_i(z) = \int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z)ds$. Alors :*

$$\{f_i, q_i\} = g,$$

et, pour $j \neq i$, si h est une fonction vérifiant $\{g, q_j\} = \{h, q_i\}$ sur Ω, alors :

$$\{f_i, q_j\} = h - \Delta_i^* h.$$

Démonstration: c'est un simple calcul, reposant sur :

$$\{f_i, q_j\} = -\frac{d}{dt}_{t=0} f_i(U_j(t)).$$

Pour $i = j$, on utilise que $T_i(U_i(t)z) = T_i(z) - t$, tandis que pour $j \neq i$, c'est l'invariance de T_i par U_j, jointe à l'hypothèse de commutation, qui donne le résultat. Cette hypothèse est utilisée sous la forme:

$$\frac{d}{dt} g(U_j(t)U_i(s)z) = \{q_j, g\}U_j(t)U_i(s)z =$$

$$= \{q_i, h\} U_i(s) U_j(t) z = \frac{d}{ds} h(U_i(s) U_j(t) z).$$

□

Revenons à la preuve de la proposition. En appliquant le lemme avec $i = j = 1$, on résout la première équation: $\{f_i, q_i\} = g_1$. On cherche alors une solution du système de la forme $f_1 + f_2$, ce qui mène aux équations :

$$\{f_2, q_1\} = 0, \text{ et } \forall j > 1, \quad \{f_2, q_j\} = \tilde{g}_j$$

où $\tilde{g}_j = g_j - \{f_1, q_j\}$. Le membre de droite vaut $\Delta_1^* g_j$, d'après le lemme. Les fonctions $\Delta_1^* g_j$ et T_j sont invariantes par le flot de q_1, donc une nouvelle application du lemme avec $g = \Delta_1^* g_2$ résout la deuxième équation tout en laissant la première intacte. On peut ainsi recommencer... jusqu'à épuisement du système. Le lemme assurera que les dérivées croisées sont les bonnes.

On peut même s'offrir une formule explicite, dont on vérifie la validité grâce au lemme :

$$f = \int_0^{T_1(z)} g_1(U_1(s)z) ds + \int_0^{T_2(z)} \Delta_1^* g_2(U_2(s)z) ds +$$
$$+ \int_0^{T_3(z)} \Delta_2^* \Delta_1^* g_3(U_3(s)z) ds + \cdots$$

□

3 Systèmes intégrables quantiques

3.1 Introduction

D'une certaine façon, on peut dire que l'intégrabilité d'un point de vue purement quantique ne présente guère d'intérêt. Pour voir cela, prenons $(E, h\omega)$ un espace vectoriel symplectique (de dimension finie, au moins dans un premier temps). La matrice symplectique standard J, vérifiant $J^2 = -I$, munit E d'une structure complexe. D'autre part E est muni d'un produit scalaire euclidien par $(x, y) = \omega(Jx, y)$, qui n'est autre que le produit euclidien usuel. On obtient ainsi une structure hermitienne sur E grâce au produit hermitien $\langle x, y \rangle = (x, y) + ih\omega(x, y)$. Réciproquement, tout espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$ est muni de la forme symplectique égale à la partie imaginaire de la forme hermitienne.

On vérifie alors facilement qu'un endomorphisme de E est *hermitien* si et seulement s'il commute avec J et est symétrique (pour le produit scalaire euclidien). Ou plutôt, voyant $\mathrm{Herm}(E, J)$ comme $J\mathfrak{u}(n)$, on a :

$$\mathrm{Herm}(E, J) = J(\mathfrak{sp}(E) \cap \mathfrak{o}(E)).$$

On veut maintenant résoudre l'équation de Schrödinger associée à B, à savoir :

$$\frac{h}{i}\frac{d}{dt}\psi = B\psi,$$

où on a noté i pour J. Si $H(\psi) = (B\psi, \psi)$ est la forme quadratique associée à B, on vérifie immédiatement que l'hamiltonien de H est $\mathcal{X}_H(\psi) = \frac{i}{h}B(\psi)$. L'équation de Schrödinger n'est donc autre que l'équation du flot de $\mathcal{X}_H$:

$$\frac{d}{dt}\psi = \mathcal{X}_H(\psi).$$

Or un hamiltonien hermitien est évidemment complètement intégrable, puisqu'en le diagonalisant en base hermitienne, on obtient une base symplectique (et orthonormée) dans laquelle

$$B = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

B s'écrit donc $\sum \lambda_i(x_i^2 + \xi_i^2)$ et les $x_i^2 + \xi_i^2$ sont des intégrales en involution.

On peut remarquer ici que le crochet de Poisson de deux hamiltoniens hermitiens s'écrit

$$\{B_1, B_2\} = \frac{i}{h}[B_1, B_2],$$

où $[,]$ est le crochet usuel des endomorphismes.

Maintenant, sans rentrer dans des justifications mathématiques, si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert quelconque sur lequel on se donne un opérateur B autoadjoint diagonalisable, avec des fonctions propres ψ_n associées aux valeurs propres λ_n, alors l'équation de Schrödinger peut être vue comme un système hamiltonien de dimension infinie, d'Hamiltonien $H(\psi) = \sum \lambda_n |z_n|^2$, ($z_n = x_n + i\xi_n$ est la coordonnées de ψ sur ψ_n) pour la structure symplectique $h \sum d\xi_n \wedge dx_n$. Il est donc "complètement intégrable", au sens où il admet les $x_n^2 + \xi_n^2$ comme famille complète d'intégrales premières.

Ceci dit, on n'est guère plus avancé... C'est pourquoi on introduit une autre notion de complète intégrabilité quantique, qu'on pourra aussi appeler la complète intégrabilité semi-classique, puisqu'elle va coïncider avec la notion classique dans la limite semi-classique.

3.2 Quantification semi-classique

On note $\mathcal{E}$ l'espace des h-opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sur un ouvert W d'une variété X de dimension n. Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel $P(h)$ est dit *classique* si son symbole de Weyl $p(h)$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$p(h)(x,\xi) \sim \sum h^k p_k(x,\xi)$$

(le développement est alors unique). Les résultats présentés ici seront microlocaux au voisinage d'un point ou d'une sous-variété Lagrangienne compacte; en particulier, peu importent les hypothèses que l'on peut faire sur le comportement à l'infini des symboles (voir [5, 21]). Rappelons aussi que deux opérateurs pseudo-différentiels sont dits microlocalement égaux (ou égaux modulo $O(h^\infty)$) au voisinage d'un point $m \in T^*X$ si leurs symboles de Weyl coïncident sur ce voisinage.

$\mathcal{E}$ est, comme en dimension finie, muni d'une structure d'algèbre de Lie :

$$\{P,Q\} = \frac{i}{h}[P,Q].$$

L'opération σ (symbole principal) est un morphisme surjectif de $(\mathcal{E},\{\})$ sur l'algèbre des observables classiques $(C^\infty(T^*W),\{\})$.

Définition 3.1 *Suivant [4, 3], on appelle* système semi-classique complètement intégrable *la donnée de n opérateurs $P_1,\ldots,P_n$ de $\mathcal{E}$ tels que :*

- *les symboles principaux $p_i = \sigma(P_i)$ sont des fonctions à valeurs réelles formant un système complètement intégrable classique;*
- *$\forall i,j$, $[P_i,P_j] = O(h^\infty)$.*

Cette notion est bien adaptée à ce qu'il semble naturel d'appeler une "quantification semi-classique" d'un système classique complètement intégrable.

Par exemple, le problème de Neumann présenté en section 2.2 est semi-classiquement intégrable; il est même *quantiquement* intégrable, au sens où il existe des opérateurs différentiels sur S^n qui quantifient les Hamiltoniens classiques en commutant exactement (voir [15]).

Cette définition soulève naturellement la question suivante :

Lorsqu'un système complètement intégrable classique associé à un système complètement intégrable semi-classique est réductible à une forme normale (par exemple, s'il satisfait aux hypothèses du théorème 2.7; c'est aussi vrai dès que l'application moment $J = (p_1,\ldots,p_n)$ est une submersion locale), existe-t'il aussi une forme normale pour le système semi-classique?

La réponse à cette question est connue, et positive, au voisinage de points réguliers des feuilles lagrangiennes du système. Elle est principalement due à

Colin de Verdière [4] et A.-M. Charbonnel [3] (même si, rigoureusement, ces auteurs ne traitent que le cas où les opérateurs sont formellement auto-adjoints).

Nous verrons dans la section suivante que cela reste le cas en présence d'une singularité non-dégénérée : tous les résultats énoncés en section 2 auront leur analogue semi-classique.

3.3 Formes normales microlocales

Soit $(P_1(h), \dots, P_n(h))$ un système semi-classique complètement intégrable, défini sur un ouvert W d'une variété X de dimension n. Rappelons que les P_i ne sont pas nécessairement formellement auto-adjoints, mais que le symbole principal est supposé réel.

On note p_j les symboles principaux; ils définissent un système complètement intégrable classique de T^*W. On suppose ici que ce système admet un point critique non-dégénéré $m \in T^*W$, et on note $\mathfrak{c}_q$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sp}(2n)$ associée. On suppose toujours que $p_j(m) = 0$.

Soit $(q_1, \dots, q_n)$ une base standard de $\mathfrak{c}$. On note Q_j les h-quantifiés symétriques (ou de Weyl) des q_j, c'est-à-dire :

- si $q_j = x_j^2 + \xi_j^2$, $\quad Q_j = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2$;
- si $q_j = x_j \xi_j$, $\quad Q_j = \frac{h}{i}(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2})$;
- et pour le cas focus-focus, on a respectivement $Q_j = \frac{h}{i}(x_j \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j})$ et $Q_{j+1} = \frac{h}{i}(1 + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}})$ (ce qui donne en coordonnées polaires $\left\{ \begin{array}{l} x_j = \rho \cos(\theta) \\ x_{j+1} = \rho \sin(\theta) \end{array} \right.$, les opérateurs respectifs $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{h}{i}(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 1)$).

Outre la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$, l'ingrédient principal de la section 2 était une sous-algèbre de Poisson de $C^\infty(T^*W)$, le commutant classique C_q. On définit de la même façon le *commutant semi-classique* $\mathcal{C}_Q$ comme étant la sous-algèbre de $\mathcal{E}$ donnée par :

$$\mathcal{C}_Q = \{P(h) \in \mathcal{E}, \forall j, \ [P, Q_j] = O(h^\infty)\}.$$

La version semi-classique du théorème d'Eliasson est alors la suivante :

Théorème 3.1 *Soit $(P_1, \dots, P_n)$ un système semi-classique complètement intégrable, avec une singularité non dégénérée de type quelconque, et $Q_1, \dots, Q_n$ les opérateurs différentiels correspondants. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) $U(h)$, et* *des opérateurs pseudo-différentiels $F_j(h)$ dans $\mathcal{C}_Q$, tels que, microlocalement au voisinage de m,*

$$\forall j, \quad U^{-1}P_jU = F_j + O(h^\infty).$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, notre première tâche est donc de décrire la structure de $\mathcal{C}_Q$.

3.4 Le commutant semi-classique

$\mathcal{C}_Q$ est directement relié au commutant classique C_q par le résultat suivant :

Proposition 3.2 *$\mathcal{C}_Q$ est une algèbre de Lie commutative. L'application σ_W (symbole de Weyl) est, modulo $O(h^\infty)$, un isomorphisme de $\mathcal{C}_Q$ dans l'algèbre de Lie formelle :*

$$C_q(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k C_q.$$

Démonstration: la formule de Moyal (voir [13]) exprime la relation entre la quantification de Weyl et le crochet de commutation : si A et B sont les quantifiés de Weyl des symboles a et b, on a, formellement :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{2}{i} a \sin(\frac{h\mathcal{D}}{2}) b,$$

avec

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi} \right).$$

On l'utilise en géneral pour la formule suivante :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{h}{i}\left(\{a,b\} + O(h^2)\right).$$

Commençons par montrer la commutativité de $\mathcal{C}_Q$. Sur chaque ouvert E_ϵ (voir proposition 2.5), les symboles principaux des Q_j sont indépendants. D'après le théorème de forme normale standard associé à une carte de Darboux-Carathéodory (x,ξ) (voir par exemple [4]), les Q_j sont conjugués aux opérateurs $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. En appliquant la formule de Moyal, on obtient que tout opérateur pseudo-différentiel qui commute avec les $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} = Op^W(\xi_j)$ a un symbole de Weyl dont le développement asymptotique est indépendant de x. Par une nouvelle application de cette formule on voit que deux tels opérateurs commutent à l'ordre $O(h^\infty)$.

Finalement, si $P(h)$ et $Q(h)$ sont dans $\mathcal{C}_Q$, le crochet $[P,Q]$ est un opérateur pseudo-différentiel classique dont le symbole de Weyl a un développement asymptotique nul sur les ouverts E_ϵ. Par continuité des termes de ce développement asymptotique, ils sont nuls partout. Donc $[P,Q] = O(h^\infty)$.

Venons-en maintenant au deuxième point de la proposition. Appliquant la formule de Moyal dans les coordonnées initiales, le fait que q_j soit quadratique implique que pour tous $k \geq 3$ et pour toutes fonctions f,

$$f\mathcal{D}^k q_j = 0.$$

On dispose donc d'une règle de quantification “exacte”, au sens où :

$$\sigma_{Weyl}([Op^W(f), Q_j]) = \frac{h}{i}\left(\{f, q_j\} + O(h^\infty)\right),$$

On en déduit qu'un opérateur $P(h)$ est dans $\mathcal{C}_Q$ si et seulement si le développement asymptotique de son symbole de Weyl $p(h) \sim \sum p_k h^k$ vérifie

$$\sum h^k \{p_k, q_j\} = O(h^\infty),$$

ce qui est équivalent, par unicité du développement asymptotique, à :

$$\forall k, j, \quad \{p_k, q_j\} = 0,$$

c'est-à-dire $\forall k$, $p_k \in C_q$. $\square$

Lorsque la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_q$ ne contient pas d'élément hyperbolique ($m_h = 0$), on sait que la structure de C_q est particulièrement simple : c'est l'ensemble des fonctions $f(q_1, \ldots, q_n)$. On a un résultat analogue pour le commutant semi-classique.

Notons tout d'abord que puisque les opérateurs Q_j sont formellement auto-adjoints, on peut utiliser un calcul fonctionnel à plusieurs variables comme celui développé dans [3]. On peut ainsi donner un sens microlocal à $f(Q_1, \ldots, Q_n)$ pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par là, à $f(h)(Q_1, \ldots, Q_n)$, où $f(h) \sim f_0 + hf_1 + \ldots$ est un symbole semi-classique admettant un développement en puissance de h : $f(h)(Q_1, \ldots, Q_n)$ commute alors avec les Q_j et admet $f_0(q_1, \ldots, q_n)$ comme symbole principal.

Il faut remarquer que microlocalement sur un domaine Ω voisinage de m, les hypothèses à l'infini pour le calcul fonctionnel sont inutiles. Ainsi, seule la symétrie des opérateurs est importante. En effet, quitte à tronquer les symboles en dehors de Ω, on peut supposer que les opérateurs h-quantifiés sont semi-bornés inférieurement. On dispose alors par exemple de l'extension de Friedrichs qui est auto-adjointe. Enfin, deux extensions d'un même opérateur, dont les domaines contiennent $C_0^\infty(\Omega)$, auront le même symbole de Weyl sur Ω. En particulier, le choix d'une extension auto-adjointe est sans incidence sur le calcul fonctionnel, au niveau microlocal.

On peut maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Si $m_h = 0$, alors tout élément de $\mathcal{C}_Q$ s'écrit, microlocalement au voisinage de 0, sous la forme $f(h)(Q_1, \ldots, Q_n) + O(h^\infty)$.*

Démonstration: soit $P(h) \in \mathcal{C}_Q$. D'après la proposition 3.2, son symbole principal appartient à C_q, et donc s'écrit $f^{(0)}(q_1, \ldots, q_n)$. Posons, microlocalement au voisinage de 0,

$$P^{(0)} = f^{(0)}(Q_1, \ldots, Q_n).$$

P et $P^{(0)}$ ayant même symbole principal, on a :

$$P = P^{(0)} + hR^{(1)},$$

où, nécessairement, $R^{(1)} \in \mathcal{C}_Q$. En recommençant la même décomposition pour $R^{(1)}$, et ainsi de suite, on obtient par récurrence :

$$\forall N, \exists f^{(0)}, \ldots, f^{(N)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad P(h) = (\sum_{k=0}^{N} h^k f^{(k)})(Q_1, \ldots, Q_n) + O(h^{N+1}),$$

ce qui prouve la proposition. □

3.5 Preuve du théorème 3.1

Plutôt que de montrer directement le théorème 3.1, nous allons énoncer et prouver une formulation légèrement différente qui se rapproche du corollaire 2.8, et qui est plus utile pour les applications lorsque $m_h \neq 0$. Dans le cas $m_h = 0$, la forme la plus utile est bien-sûr celle du théorème 3.1 associé à la proposition 3.3.

Théorème 3.4 *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un système semi-classique complètement intégrable, avec une singularité non dégénérée de type quelconque, et $Q_1, \ldots, Q_n$ les opérateurs différentiels correspondants. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) $U(h)$, une matrice de taille $n \times n$ microlocalement inversible $\mathcal{M}(h)$ d'opérateurs pseudo-différentiels appartenant à $\mathcal{C}_Q$, et des constantes $\alpha_j^{(\ell)} \in \mathbb{C}$ ($j = 0, \ldots, n$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$) telles que, microlocalement au voisinage de m,*

$$U^{-1}(P_1, \ldots, P_n)U = \mathcal{M}.(Q_1 - \alpha_1(h), \ldots, Q_n - \alpha_n(h)) + O(h^\infty).$$

On a noté $\alpha_j(h) = \sum_{\ell \geq 1} \alpha_j^{(\ell)} h^\ell$.

Les $\alpha_j^{(1)}$ se décrivent à l'aide des valeurs en m des symboles sous-principaux r_j des P_j par :

$$\alpha^{(1)} = -M^{-1}(0).r(m),$$

où M est la matrice de fonctions donnée par le corollaire 2.8.

Démonstration: On commence par appliquer le corollaire 2.8. En choisissant un opérateur intégral de Fourier microlocalement unitaire U associé au symplectomorphisme φ, et en conjuguant les P_j par U, on se ramène au cas où les symboles principaux p_j vérifient, dans un voisinage de 0,

$$(p_1, \ldots, p_n) = M.(q_1, \ldots, q_n).$$

M étant une matrice de fonctions commutant avec les q_k, une application de la proposition 3.2 nous fournit une matrice $\mathcal{M}^{(0)}$ d'opérateurs pseudo-différentiels éléments de $\mathcal{C}_Q$, de symbole principal M. En conséquence, il existe des opérateurs $R_j^{(1)} \in \mathcal{E}$ tels que :

$$(P_1, \ldots, P_n) = \mathcal{M}^{(0)}.(Q_1, \ldots, Q_n) + h(R_1^{(1)}, \ldots, R_n^{(1)}).$$

Notons $(M_1, \ldots, M_n) = \mathcal{M}^{(0)}.(Q_1, \ldots, Q_n)$. Les M_j sont des éléments de $\mathcal{C}_Q$, de symboles principaux $(p_1, \ldots, p_n)$. L'hypothèse de commutation des P_j s'écrit :

$$[M_j, M_k] + h\left([M_j, R_k] + [R_j, M_k]\right) + h^2[R_j, R_k] = 0.$$

Puisque $\mathcal{C}_Q$ est abélien (proposition 3.2), on obtient, en prenant les symboles principaux de cette égalité :

$$\forall j, k, \quad \{p_j, r_k\} = \{p_k, r_j\}.$$

La preuve du théorème se poursuit alors en deux étapes : la première traitant spécifiquement du niveau *sous-principal*, et la deuxième traitant, par un même schéma, tous les niveaux suivants.

• La première étape consiste à chercher une matrice $\mathcal{M}^{(1)}$ d'éléments de $\mathcal{C}_Q$, des constantes $\alpha_j^{(1)} \in \mathbb{C}$, et un opérateur pseudo-différentiel elliptique $V \in \mathcal{E}$ tels que :

$$V^{-1}(P_1, \ldots, P_n)V = (\mathcal{M}^{(0)} + h\mathcal{M}^{(1)}).(Q_1 - h\alpha_1^{(1)}, \ldots, Q_n - h\alpha_n^{(1)}) + O(h^2).$$

Ce système se réécrit en :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} Q_k, V\right] = h\left(V\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(1)} Q_k - V\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - R_j V\right) + O(h^2),$$

qui est équivalent, en prenant les symboles principaux des deux membres, au système d'équations de transport suivant :

$$\forall j, \quad \{p_j, v\} = iv\left(\sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(1)} q_k - \sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - r_j\right).$$

Posons $v = e^{id}$; on a $\{f, v\} = iv\{f, d\}$; il suffit donc de résoudre :

$$\forall j, \quad \{p_j, d\} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(1)} q_k - \sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - r_j \right).$$

Le corollaire 2.10 fournit une telle fonction d définie sur un voisinage Ω de 0 et des éléments F_j de C_q tels que

$$\forall j, \quad \{p_j, d\} = F_j - r_j.$$

La matrice $(m_{jk}^{(0)}) = M$ étant inversible, le n-uplet $M^{-1}.(F_1, \ldots, F_n)$ est le plus général des n-uplets de C_q^n, donc, d'après le lemme 2.6, il s'écrit

$$-(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) + \tilde{M}.(q_1, \ldots, q_n),$$

où $\tilde{M}$ est une matrice d'éléments de C_q, et les $\alpha_j^{(1)}$ sont nécessairement donnés par :

$$\forall j, \quad -\sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)}(0) \alpha_k^{(1)} = F_j(0) = r_j(0).$$

Le système est donc résolu, avec $(m_{jk}^{(1)}) = M.\tilde{M}$.

En quantifiant les $m_{jk}^{(1)}$ par la proposition 3.2, on obtient une matrice $\mathcal{M}^{(1)}$ d'opérateurs pseudo-différentiels de $\mathcal{C}_Q$ qui résout le problème modulo $O(h^2)$.

Notons que si les P_j sont formellement auto-adjoints, alors d est réel, et V peut être quantifié en un opérateur microlocalement unitaire.

• La deuxième étape termine la preuve par récurrence : supposons que les P_j vérifient

$$(P_1, \ldots, P_n) = \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} h^\ell \mathcal{M}^{(\ell)} \right) .(Q_1 - \alpha_1(h), \ldots, Q_n - \alpha_n(h)) + h^N (R_1^{(N)}, \ldots, R_n^{(N)}),$$

où $\alpha_j(h) = \sum_{\ell=1}^{N-1} h^\ell \alpha_j^{(\ell)}$, et les $\mathcal{M}^{(\ell)}$ sont des matrices $n \times n$ d'éléments de $\mathcal{C}_Q$. Comme tous ces éléments commutent entre eux, l'hypothèse de commutation des P_j s'écrit, à l'ordre principal N :

$$h^N \left([M_j, R_k^{(N)}] + [R_j^{(N)}, M_k] \right) = O(h^\infty),$$

ce qui donne :

$$\{p_j, r_k^{(N)}\} = \{p_k, r_j^{(N)}\}.$$

Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel $C \in \mathcal{E}$, une matrice $\mathcal{M}^{(N)}$ d'éléments de $\mathcal{C}_Q$, et des constantes $\alpha_j^{(N)} \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall j, \quad & (I + h^{N-1} iC)^{-1} (P_1, \ldots, P_n)(I + h^{N-1} iC) = \\ & \left(\sum_{\ell=0}^{N} h^\ell \mathcal{M}^{(\ell)} \right) .(Q_1 - \tilde{\alpha}_1(h), \ldots, Q_n - \tilde{\alpha}_n(h)) + O(h^{N+1}), \end{aligned} \tag{10}$$

avec $\tilde{\alpha}_j(h) = \alpha_j(h) + h^N \alpha_j^{(N)}$. En effet, pour $N \geq 2$, ce système se réécrit modulo des termes d'ordre $O(h^{N+1})$ en :

$$h^{N-1}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} Q_k, iC\right] = h^N \left(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(N)} Q_k - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(N)} - R_j^{(N)}\right).$$

Il donne lieu, au niveau des symboles principaux, à des équations de transport que l'on résout comme précédemment.

Notons que si les P_j sont formellement auto-adjoints, le symbole c est réel. Au lieu de conjuguer par l'opérateur elliptique $I + h^{N-1}iC$, on utilise la transformée de Cayley $W = \frac{I+ih^{N-1}C/2}{I-ih^{N-1}C/2}$. L'opérateur W est unitaire, et comme $W = I + ih^{N-1}C + O(h^N)$, il convient tout aussi bien pour la résolution de (10).

Ceci termine la démonstration du théorème 3.4. □

Le théorème 3.1 en est bien-sûr un corollaire immédiat.

3.6 Remarques finales

1. Le schéma de démonstration du théorème 3.4 est général, et fonctionne si l'on remplace l'algèbre $\mathcal{C}_Q$ par celle des fonctions des $(Q_1, \ldots, Q_n)$, à partir du moment où les théorèmes classiques le permettent. Ceci est légitime si la sous-algèbre de Cartan ne contient pas d'élément hyperbolique – on l'a d'ailleurs déjà remarqué; ça l'est aussi en dimension 1, en vertu du lemme de Morse isochore ([8]), et du lemme de Poincaré hyperbolique 2.11. Cette remarque permet de retrouver le théorème 12 de [6].

2. On peut aussi utiliser ce schéma de démonstration pour avoir la forme normale des $(P_1, \ldots, P_n)$ dans un voisinage invariant d'une feuille *régulière* du feuilletage lagrangien déterminé par l'application moment $(p_1, \ldots, p_n)$. En effet le théorème d'Arnold-Liouville fournit un tel voisinage invariant Ω dans lequel on dispose de coordonnées action-angle, c'est-à-dire que Ω est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n$ de la forme $\mathbb{T}^n \times \mathcal{D} \ni (x, \xi)$. Utilisant un opérateur intégral de Fourier associé à ce symplectomorphisme, on est ramené au cas où les P_j agissent sur $\mathbb{T}^n$ et ont des symboles principaux qui ne dépendent que de ξ.

Examinons maintenant les équations de transport : elles vont consister à résoudre des systèmes du type

$$\{\xi_j, a\} = r_j, \text{ c'est-à-dire } \frac{\partial a}{\partial x_j} = r_j.$$

Or les $r_j = r_j(x, \xi)$ vérifient la bonne condition de fermeture :

$$\{\xi_j, r_k\} = \{\xi_k, r_j\},$$

qui n'est autre que $d_x r = 0$, ou r est vue comme la 1-forme $r_1 dx_1 + \cdots + r_n dx_n$. Cette condition assure qu'on peut toujours intégrer ces équations localement. Par contre, pour un résultat global sur les tores horizontaux, il faut $[r] = 0$ dans $H^1(\mathbb{T}^n \times \{\xi\})$. Autrement dit, on sait résoudre $d_x a = r - [r]$, ou encore :

$$\{\xi_j, a\} = r_j - [r]_j,$$

où $[r_j]$ est la moyenne de r_j par rapport à x_j, et ne dépend que de ξ.

On retrouve ainsi le résultat mentionné en introduction sur les coordonnées actions-angles semi-classiques régulières :

Théorème 3.5 ([4, 3]) *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un système semi-classiquement complètement intégrable, et Ω un ouvert invariant de coordonnées actions-angles régulières. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier $U(h)$ (unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) et des symboles*

$$f_j(h) = f_j^{(0)} + h f_j^{(1)} + h^2 f_j^{(2)} + \cdots$$

tels que, sur Ω,

$$\forall j = 1, \ldots, n, \quad U^{-1} P_j U = f_j(h)(D_1, \ldots, D_n) + O(h^\infty).$$

Les D_j sont les opérateurs $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$.

3. Dans l'énoncé du théorème 3.4, la constante $\alpha^{(1)}$ est définie de façon intrinsèque par les opérateurs P_j, c'est-à-dire indépendemment de l'OIF U choisi. Il semblerait raisonnable de penser qu'il en est de même de tous les termes de la série. Un argument en faveur de cette affirmation est que $\alpha(h)$ peut être vue comme la monodromie des solutions du système pseudo-différentiel $P_j u = 0$ (voir [20, 26]). Nous espérons pouvoir détailler cela dans un travail ultérieur.

Remerciements
Je tiens à remercier Yves Colin de Verdière pour ses remarques pertinentes.

Références

[1] P.M. Bleher, D.V. Kosygin, and Y.G. Sinai. Distribution of energy levels of quantum free particle on the Liouville surface and trace formulae. *Communications in Mathematical Physics*, 170(2):375–403, 1995.

[2] R. Brummelhuis, T. Paul, and A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. *Duke Mathematical Journal*, 78(3):477–530, 1995.

[3] A.-M. Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Asymptotic Analysis*, 1:227–261, 1988.

[4] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. *Mathematische Zeitschrift*, 171:51–73, 1980.

[5] Y. Colin de Verdière. Cours de DEA. Université Grenoble I, 1992.

[6] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale. *Communications in partial differential equations*, 19(9–10):1535–1563, 1994.

[7] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 61(3):347–367, 1994.

[8] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18:283–293, 1979.

[9] J.P. Dufour and P. Molino. Compactification d'actions de $\mathbb{R}^n$ et variables actions-angles avec singularités. In Dazord and Weinstein, editors, *Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley*, volume 20, pages 151–167. MSRI, 1989.

[10] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27:207–281, 1974.

[11] J.J. Duistermaat. On global action-angle variables. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:687–706, 1980.

[12] L.H. Eliasson. *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*. PhD thesis, University of Stockholm, 1984.

[13] M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Crochet de Moyal-Vey et quantification. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, 283:19–24, 1976.

[14] V. Guillemin and D. Schaeffer. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Mathematical Journal*, 44(1):157–199, 1977.

[15] D. Gurarie. Quantized Neumann problem, separable potentials on S^n and the Lame equation. *J. Math. Physics*, 36(10):5355–5391, 1995.

[16] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Annales de l'Institut Fourier*, 31(3):169–223, 1981.

[17] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Communications in Partial Differential Equations*, 9:337–408, 1984.

[18] J. Moser. *Integrable hamiltonian systems and spectral theory.* Lezioni Fermiane. Scu.Norm.Sup., 1981.

[19] Zung Nguyên Tiên. A topological classification of integrable hamiltonian systems. In R. Brouzet, editor, *Séminaire Gaston Darboux de géometrie et topologie différentielle*, pages 43–54. Université Montpellier II, 1994-1995.

[20] F. Pham. Resurgence, quantized canonical transformations, and multi-instantons expansions. In M. Kashiwara and T. Kawai, editors, *Algebraic Analysis*, volume II, pages 699–726. 1989.

[21] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser, 1987.

[22] H. Rüssmann. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung. *Math. Ann.*, 154:285–300, 1964.

[23] J Sjöstrand. Density of state oscillations for magnetic schödinger operator. In Bennewitz, editor, *Differential Equations and Mathematical Physics*, pages 295–345. Univ. of Alabama at Birmingham, 1990.

[24] J. Sjöstrand. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic Analysis*, 6:29–43, 1992.

[25] J. Vey. Sur certains systèmes dynamiques séparables. *American journal of mathematics*, 100:591–614, 1978.

[26] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. preprint Institut Fourier 433, 1998.

[27] J. Williamson. On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems. *American journal of mathematics*, 58(1):141–163, 1936.