GEA2016
Exemples d'exercices où sont utilisées les transformations

Version du 10 octobre 2016

Transformations affines

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que (AB) est parallèle à (CD).

On note $I = (AC) \cap (BD)$ et $J = (BC) \cap (AD)$; puis $K = (AB) \cap (IJ)$ et $L = (CD) \cap (IJ)$.

1. En utilisant deux homothéties de centres I et J, montrez que K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
2. Montrez qu'on a aussi
$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IL}} = -\frac{\overline{JK}}{\overline{JL}}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Sur une feuille de papier, on a deux droites D et D' sécantes en A et B un point n'appartenant ni à D ni à D'. On découpe la feuille de papier en deux dans le sens de largeur, de sorte qu'il ne reste qu'une partie des droites D et D' ainsi que le point B, mais plus le point A.

Comment tracer la partie de la droite (AB) visible sur la nouvelle feuille ?

Réflexions du plan

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Montrer que toute isométrie du plan est composé d'au plus 3 réflexions.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Dans le plan, en utilisant des produits de réflexions, déterminer géométriquement la composée $s_A \circ s_B$ de deux symétries centrales de centres A et B.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Montrer que la composée d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur non nul n'est ni une symétrie axiale, ni une translation, ni une rotation. On l'appelle symétrie glissée.

Montrer que toute symétrie glissée f peut s'écrire de manière unique $f = s \circ t = t \circ s$ où s est une symétrie axiale et t une translation.

Utilisation des isométries

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soient A et B deux points dans le même demi-plan délimité par une droite d. Quels points M de la droite d minimisent $AM + MB$?

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Dans un rectangle $ABCD$, on choisit des points P, Q, R, S sur chaque côté privé des sommets tel que le quadrilatère $PQRS$ soit un parrallélogramme.

Déterminer les parrallélogrammes $PQRS$ qui minimisent le périmètre puis, parmi ces derniers, ceux qui minimisent l'aire.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Déterminer le sous-groupe des isométries laissant globalement invariant un carré.

Productions trinômes

Dans le plan complexe, on appelle f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'd'affixe z' tel que $z' = -4i\,z + 3 - 5i$.

1. Calculer l'affixe du point A', image du point $A(1-i)$ par f, puis l'affixe du point B, antécédent du point $B'(i)$.
2. Montrer que f admet un unique point invariant que l'on note Ω.
3. Existe-t-il un point M du plan, distinct de Ω, tel que Ω, M et M' (l'image de M par f) soient alignés ?
4. Soient M et N deux points distincts de Ω et M', N' leurs images respectives par f.
   A l'aide d'un logiciel de modélisation géométrique, quelle conjecture peut-on émettre sur les droites (MN) et $(M'N')$? Démontrer cette conjecture.

FIGURE 1 – Trinôme 6 : Camille Gouelou, Bertarnd Mahé, Thomas Morant

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A,B,C,P et le vecteur $\vec{w}$ d'affixes respectives :

$Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $Z_P = 3 + 2i$;

$Z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$

On note h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{-1}{3}$, t la translation de vecteur $\vec{w}$, et r la rotation de centre A de d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

1) Calculer les affixes des points Q=t(B), R= h(P) et S= r(P).
2) A l'aide du logiciel géogébra, placer les points Q, R et S dans un repère. Que pouvez-vous dire sur la nature du triangle PQR.
3) Démontrer cette conjecture et en déduire la nature du quadrilatère PQRS

FIGURE 2 – Trinôme 7 : Amélie Fournier, Kévin Le Bohec, Charlène Le Théerizien

EXERCICE :

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, et on se propose d'utiliser les nombres complexes et leur lien avec les transformations géométriques pour construire sur un écran graphique une figure formée de carrés concentriques emboîtés à partir de la donnée d'un point.

Partie A : construction d'un carré $ABCD$ de centre O à partir du point A.

Soit A un point du plan distinct de O ,d'affixe $z_A=x_A+i\,y_A$. On se propose de tracer le carré $ABCD$ de centre O direct c'est à dire tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$.

1) Faire une figure dans le cas où le point A a pour affixe $z_A=2+i$

2) On revient dans le cas où le point A est quelconque et on note z_B, z_c, z_D les affixes respectives des points B , C et D . Montrer que $z_B=iz_A$ puis calculer z_c et z_D en fonction de z_A en utilisant une transformation géométrique.

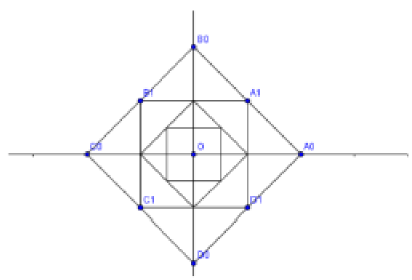
3) On note (x_B, y_B) ; (x_C, y_C) ; (x_D, y_D) les coordonnées des points B,C,D. Calculer (x_B, y_B) ; (x_C, y_C) ; (x_D, y_D) en fonction de (x_A, y_A) .

Partie B : construction de carrés concentriques emboîtés de centre O à partir d'un point.

1) On suppose construit Le carré $ABCD$ à partir du point A . On note A', B', C', D' les sommets du carré concentrique emboîté à $ABCD$ tels que $A'\in[AB]$, $B'\in[BC]$, $C'\in[CD]$, $D'\in[DA]$. Calculer les coordonnées (x_A', y_A') du point A' en fonction de celles du point A.

2) On se propose de réaliser un dessin correspondant à la figure donnée ci dessous avec 10 carrés emboîtés . Le premier carré $A_0B_0C_0D_0$ défini par le point A_0 de coordonnées $(k,0)$ avec k réel strictement positif. Le deuxième carré est $A_1B_1C_1D_1$ et on itère jusqu'au dixième carré.

Donner un algorithme permettant de réaliser un tel dessin, en utilisant la procédure **CARRE** (x_A, y_A) supposé définie et qui permet de tracer un carré $ABCD$ de sens direct de centre O à partir du point A.



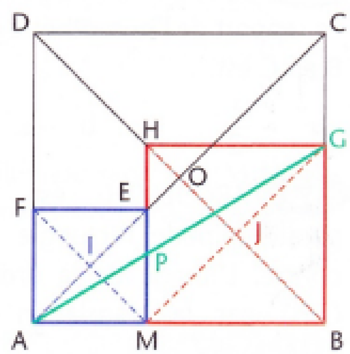
3) Exprimer la transformation géométrique qui permet de transformer le carré $A_0B_0C_0D_0$ en carré $A_1B_1C_1D_1$.

Figure 3 – Trinôme 8 : Christelle Mbajon, Adèle Parolin, Célestine Rault

N° 79 p 370, Hyperbole De Nathan 2005, 1ere S

79 Des carrés dans un carré

ABCD est un carré de centre O, M est un point du segment [AB] distinct de A et de B.



On considère comme l'indique la figure ci-contre les carrés AMEF et MBGH de centres respectifs I et J. Les droites (AG) et (MH) se coupent en P.

On désigne par *h* l'homothétie de centre P qui transforme A en G.

a) Quelles sont les images des points M et E par *h* ?

b) Démontrer que l'image du carré AMEF par *h* est le carré GHMB.

c) Quelle est l'image du point I par *h* ?

d) En déduire que les points I, P, J sont alignés.

Figure 4 – Trinôme 9 : Eadwinn Le Duc, Gabriel Manieca, Hélène Pinault

Exercice 6.

$ABCD$ est un carré de centre O. E est sur le segment $[AB]$, F sur $[BC]$, G sur $[CD]$ et H sur [
$AE = BF = CG = DH$. On note r le quart de tour de centre O qui transforme A en B.

1. a. Justifier la nature des triangles AOB, BOC, COD et DOA.
b. Quelles sont les images des points B, C, et D par r ?
2. On note temporairement E' l'image de E par r.
a. Justifier E' appartient à $[BC]$ puis que $BE' = AE$.
b. Démontrer que F est l'image de E par r.
3. En déduire, en justifiant, la nature du triangle EOF.
4. Les triangles FOG, GOH et HOE sont aussi rectangles isocèles, pourquoi ?
5. En déduire que les points E, O, G et F, O, H sont alignés et que O est le milieu de $[EG]$ et
6. En déduire que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

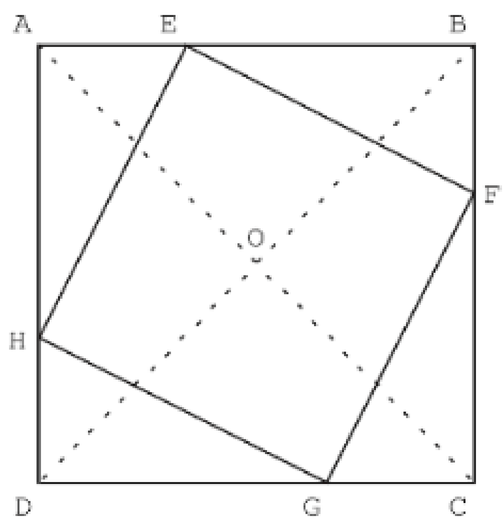


Figure 5 – Trinôme 9 : Eadwinn Le Duc, Gabriel Manieca, Hélène Pinault

ÉNONCÉ

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct. À l'extérieur de ce triangle on construit les trois triangles équilatéraux A'BC, B'AC et C'BA, de centres respectifs F, G et H.

1. Sur une figure, placer les triangles et les points cités.

2. On note r_1, r_2 et r_3 les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centres respectifs F, G et H.

a. Déterminer le déplacement $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ (on pourra préciser l'image de B).

b. Déterminer le centre et l'angle de la rotation $r_2 \circ r_3$.

3. On note s la réflexion par rapport à la droite (GH).

a. Déterminer les axes des réflexions s_2 et s_3 telles que :

$$r_2 = s_2 \circ s \quad \text{et} \quad r_3 = s \circ s_3.$$

b. En déduire que ces deux axes se coupent en un point F' tel que le triangle F'GH est équilatéral direct.

4. Déduire des questions précédentes que le triangle FGH est équilatéral direct.

FIGURE 6 – Trinôme 10 : Maiwenn Gougon-Rescan, Pierre-Antoine Haumont, Cédric Touzé