GEA2016
Exemples d'utilisation des matrices

Version du 3 octobre 2016

Puissances d'une matrice

Exercice 1 Déterminer les puissances n-ièmes des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Equation de récurrence linéaire

Exercice 2 On veut déterminer l'ensemble des suites solutions de l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

1. Transformer l'équation précédente en une équation linéaire du premier ordre portant sur U_n une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, à savoir une équation du type $U_{n+1} = AU_n$ avec U_n un vecteur colonne à deux entrées et A une matrice carré de taille 2.
2. Déterminer explicitement U_n en fonction de n ; en déduire u_n.

Puissances d'une matrice

Exercice 3 Résoudre le système différentiel suivant (où x et y sont des fonctions dérivables de la variable réelle t) :

$$\begin{cases} x' = & 4x + 2y \\ y' = & -x + y \end{cases}$$

Applications [1]

Régulation de la glycémie

Exercice 4 On veut étudier l'évolution des concentrations de glucose g_n et d'insuline i_n dans le sang par rapport à la valeur normale n heures après le repas. A jeun, on a la valeur $g = 0.9$ (grammes par litre).

On admet que les concentrations g_n et i_n suivent le modèle simpliste suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} g_{n+1} & = & 0,9g_n - 0,4i_n \\ i_{n+1} & = & -0,1g_n + 0,9i_n \end{array} \right.$$

Donner alors l'expression de g_n et i_n en fonction de n.

Production d'usine

Exercice 5 Deux machines fonctionnent indépendamment avec fiabilité égale à p chaque jour. Si une machine tombe en panne, alors elle est réparée pour le lendemain. Cependant, une seule machine peut être réparée à la fois.

Soit $U_n = (P(A_n), P(B_n))$ où A_n désigne l'événement où aucune machine n'est en panne au matin n et B_n désigne l'événement où exactement une machine est en panne au matin n.

1. Montrer qu'on peut modéliser le processus aléatoire à l'aide d'une matrice de transition
$$M = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & (1-p) \end{pmatrix}$$
2. Y-a-t-il un état stable du processus aléatoire ?

Système proie-prédateur : le modèle de Lotka-Voltera

Exercice 6 On cherche à modéliser l'évolution de deux espèces animales, l'une prédatrice de l'autre.

Version discrète :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & (1 - a + bv_n)u_n \\ v_{n+1} & = & (1 + c - dv_n)v_n \end{array} \right.$$

où u_n et v_n désignent les populations de prédateurs et de proies respectivement et a, b, c, d sont des réels données par les études sur le terrain.

1. Déterminer les points d'équilibre du système.

1. Source : TermS maths repères

2. On linéarise le système en posant $u'_n = u_n - \alpha_0$ et $v'_n = v_n - \beta_0$ (où (α_0, β_0) est un point d'équilibre) puis en négligeant les termes en $u'_n v'_n$; montrer qu'on obtient alors
$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'_{n+1} & = & u'_n + \frac{bc}{d} v'_n \\ v'_{n+1} & = & \frac{-ad}{b} u'_n + v'_n \end{array} \right.$$
3. Application lorsque $a = 0,08$, $b = 0,001$, $c = 0,02$ et $d = 0,0002$ et $(u_0, v_0) = (103, 79)$.

Version continue :
Le linéarisé de la version continue du système correspondant est

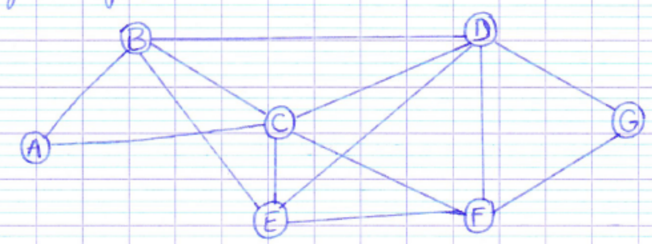
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t) + \frac{bc}{d} y(t) \\ y'(t) & = & \frac{-ad}{b} x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

Que cela donne t-il comme évolution avec le temps pour un choix des paramètres et des conditions initiales comme précédemment ?

Utilisation des matrices

Exercice :

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants. On suppose que tout les chemins sont de longueur égale.



1 Donner M, la matrice du graphe.

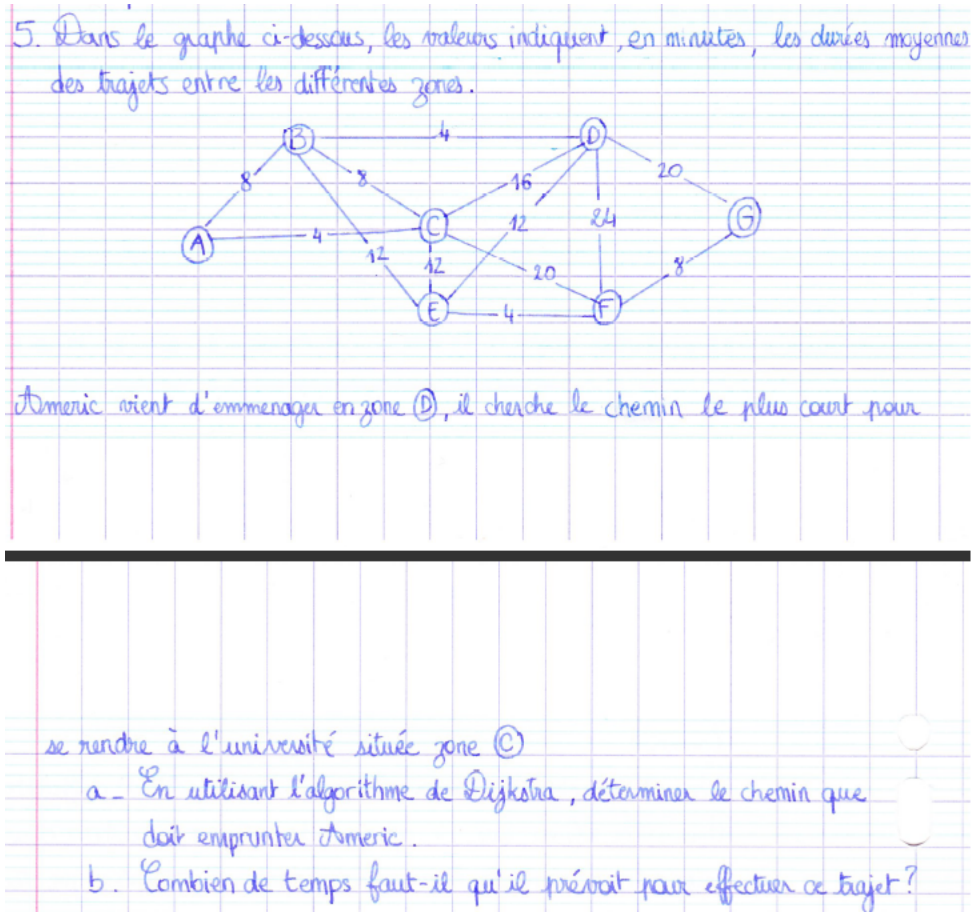
2. Donner le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique)

3 . Calculer M^2 et M^3 à l'aide de la calculatrice.

4_ Bertrand habite en zone A et Camille en zone F. Ils veulent rendre visite à leur ami Thomas qui lui, est en zone G.

a _ Déterminer la longueur minimume du chemin que devra parcourir Bertrand pour aller voir Thomas. (Donner la liste des chemins possibles)

b_ Camille n'ayant pas de voiture, Bertrand propose de passer la chercher. Pour ne pas perdre de temps, quel chemin doit-il emprunter?



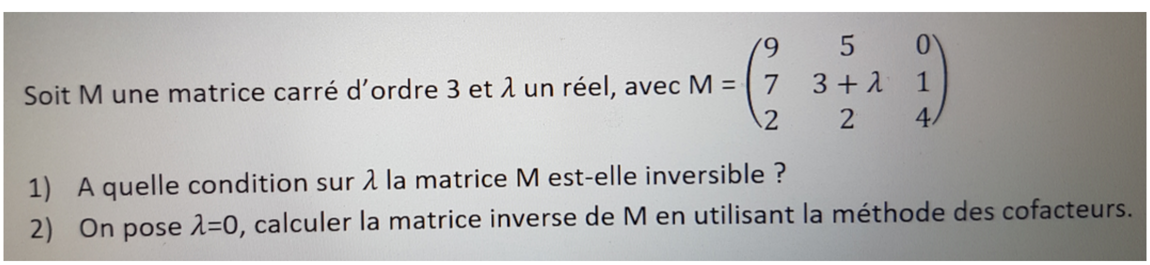
5. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différentes zones.

Americ vient d'emmenager en zone D, il cherche le chemin le plus court pour se rendre à l'université située zone C

a. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit emprunter Americ.

b. Combien de temps faut-il qu'il prévoit pour effectuer ce trajet ?

Figure 1 – Flora Bal, Monji Ben Alaya, Marie Rouxel, Benoit Lejeune



Soit M une matrice carré d'ordre 3 et λ un réel, avec M = $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 7 & 3+\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1) A quelle condition sur λ la matrice M est-elle inversible ?
2) On pose λ=0, calculer la matrice inverse de M en utilisant la méthode des cofacteurs.

Figure 2 – Romain Doineau, Marianne Guillemot, Fangfang Shi

Exercice 4 : (bac S métropole 2013 spécialité mathématiques)

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70% résidaient à la campagne et 30% en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

• l'effectif de la population est globalement constant,

• chaque année, 5% de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1% de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013 + n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. On note $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A tel que $X_{n+1} = AX_n$

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

2. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^n P^{-1}$.

3. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0{,}94^n) v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0{,}94^n) c_0 .$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Figure 3 – Nicolas Crumbach, Aymeric Desbois, Amelie Scarpel

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la n-ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
- $P_n = (V_n \quad O_n \quad R_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1.

a. Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

b. Donner la matrice de transition M de ce graphe, les couleurs étant dans l'ordre vert, orange, rouge.

2. On suppose que le premier feu rencontré est vert.

a. Donner la matrice ligne P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

b. Calculer P_3 en détaillant les calculs effectués. Quelle est la probabilité que le 3ème feu soit vert ?

3. On suppose que le premier feu rencontré est rouge.

a. Donner la matrice P_1 de l'état initial.

On donne $P_8 = (0{,}85 \quad 0{,}05 \quad 0{,}1)$ arrondis à 10^{-2} près.

b. Donner une interprétation concrète de ce résultat.

4. Calculer la matrice ligne S état stable de la marche aléatoire de matrice de transition M. Comparer ce résultat avec la matrice ligne P_8 précédente et déduire une interprétation.

FIGURE 4 – Léa-Céline Bambi, Yann Jutard, Max Lekeux

Partie B. Étude de suites

On considère les suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases}$ et

$$\begin{cases} u_n = \frac{4}{3}u_{n-1} - \frac{5}{3}v_{n-1} \\ v_n = \frac{5}{6}u_{n-1} - \frac{7}{6}v_{n-1} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1. Utiliser ces relations pour écrire un algorithme de calcul de u_n et v_n pour $n \geq 1$.

2. On note X_0 la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et X_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

Vérifier que $X_n = AX_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

On admettra que pour tout $n \geq 1$, $X_n = A^n X_0$.

3. En utilisant les résultats de la partie **A**, déduire que $X_n = PD^nBX_0$ pour tout $n \geq 1$.

4. Donner alors l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

En déduire la limite de chaque suite lorsque $n \to +\infty$.

Figure 5 – Bafetegue Diarrassoubia, Yannick Kenne, Julien Lescob