GEA2016
Exemples d'exercices où intervient la notion d'espace euclidien

Dans le triangle

Exercice 1 Démontrer l'identité du parrallélogramme dans un espace vectoriel euclidien.

En déduire la formule de la médiane (ou théorème d'Appolonius) dans le un triangle A, B, C avec I milieu de $[BC]$:

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

Exercice 2 Soit A, B, C un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives BC, CA, AB et $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les angles (géométriques) respectifs $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$.

Redémontrer le théorème d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Barycentres

Exercice 3 Soient A, B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\left\{ M \in \mathcal{P} \mid \frac{MA}{MB} = k \right\}.$$

Exercice 4 Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. Déterminer le minimum de $\sum_{i=1}^{n} a_i {MA_i}^2$ lorsque M décrit $\mathcal{P}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soient A, B, C, D des points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

1. Déterminer
$$\{M \in \mathcal{P} \mid (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 0\}.$$

2. Déterminer
$$\{M \in \mathcal{P} \mid (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = 0\}.$$

Géométrie euclidienne et minimisation

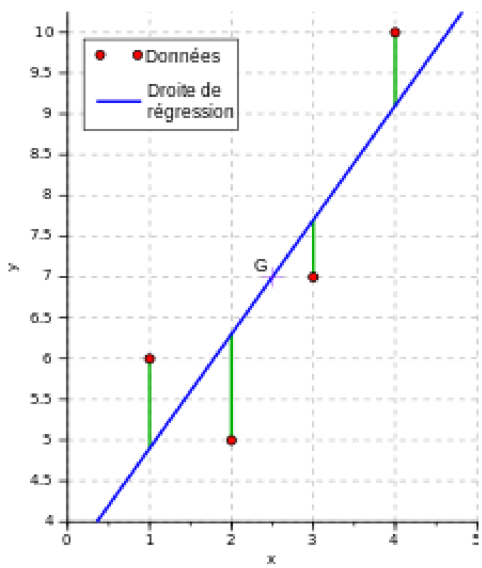
$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Déterminer le minimum d de

$$\int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 dt$$

pour a et b décrivant $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_i)_{1\leq i\leq n}$ deux séries statistiques dont on note les moyennes $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$.

On veut minimiser la quantité $\delta_{y/x} = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ pour a et b décrivant $\mathbb{R}$.



Démontrer que la quantité $\delta_{y/x}$ est minimal pour

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)}$$

et b vérifiant $\bar{y} = a\bar{x} + b$.

Indication : On pourra poser $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $U = (1, \ldots, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

Géométrie euclidienne et séries de Fourier

Exercice 8

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni produit scalaire usuel, on considère un vecteur $\vec{u}$ et une famille orthonormale $(\vec{u_k})_{1 \leq k \leq m}$. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{u}$, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{u_k} = x_k$.

   (a) Montrer que, pour tout $m \leq n$,

   $$\sum_{k=0}^{m} (\vec{u} \cdot \vec{u_k})^2 = \sum_{k=0}^{m} x_k^2 \leq \|\vec{u}\|^2$$

   (b) Lorsque $m = n$, montrer que l'on a même

   $$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

   (c) Peut-on généraliser à un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $<, >$.

2. Sur F l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose

   $$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

   On introduit les coefficients de Fourier de f :

   $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = < f, e_n >$$

   avec $e_n : t \mapsto e^{int}$.

   (a) Montrer que $<, >$ définit un produit scalaire (hermitien et non plus euclidien) sur F.

   (b) Montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de F.

   (c) Peut-on généraliser les résultats de la question 1 ?

Productions des trinomes

Exercice *(inspiré d'un exercice extrait de Maths Term S, Collection Indice, Bordas, 2002)*
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ cm et $AD = 3$ cm.
Soit A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).

1. Faire la figure correspondante.
2. (a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
   (b) En déduire $\cos \widehat{ABD}$, puis une valeur approchée de $\widehat{ABD}$.
3. (a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
   (b) En déduire $A'C'$.

FIGURE 1 – Camille Gouelou, Bertarnd Mahé, Thomas Morant

Groupe 7 Le Thérizien Charlène / Fournier Amélie / Le Bohec Kévin

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{C}$.
On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), D l'intersection entre la hauteur (AH) et le cercle $\mathcal{C}$ et E le point du cercle diamètralement opposé à A.
Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$.

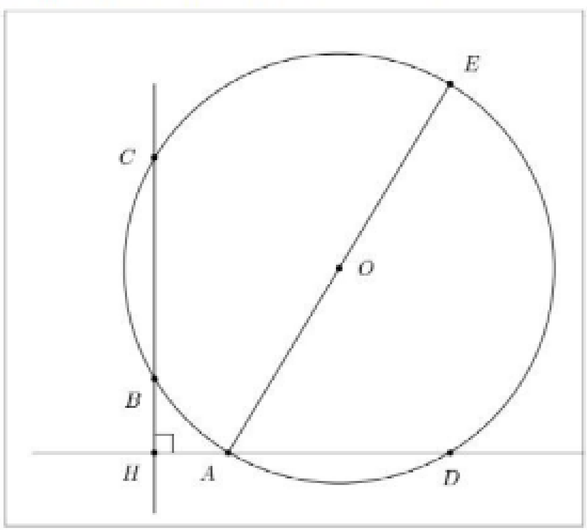
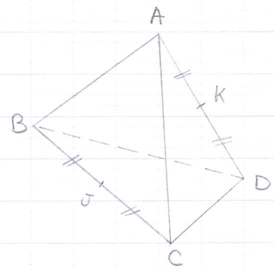


FIGURE 2 – Amélie Fournier, Kévin Le Bohec, Charlène Le Théerizien

Exercice   Niveau Terminale S.

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
Soit J le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AD]$.



1) Calculer $\vec{CB}.\vec{CA}$ et $\vec{CB}.\vec{CD}$. En déduire que $\vec{CB}.\vec{AD} = 0$.

2) Calculer $\vec{AJ}.\vec{CK}$ en fonction de a.

3) Soit J' le point tel que $\vec{CJ'} = \vec{AJ}$.
Déterminer la valeur de $\cos \widehat{J'CK}$.

4) On considère la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;3)$ et la droite (ST), avec $S(-1;0;2)$ et $T=(-3,2,4)$.
Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (ST) sont orthogonales.

Déclic - Term S enseignement obligatoire.

FIGURE 3 – Christelle Mbajon, Adèle Parolin, Célestine Rault

N° 79 p 234, Tranmaths 2011, 1ere S, Nathan

79 Produit scalaire et parabole

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et M est un point quelconque de $\mathcal{P}$ distinct de O.

La perpendiculaire à la droite (OM) passant par O recoupe $\mathcal{P}$ en N.

On s'intéresse au « déplacement » de la droite (MN) lorsque M décrit la parabole $\mathcal{P}$ privée de O.

1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Construisez la figure et créez la droite (MN).

b) Déplacez M sur la parabole $\mathcal{P}$.
Quelle conjecture faites-vous ?

Note
Activer la trace de (MN).

2. Démontrer

On note m l'abscisse du point M avec $m \neq 0$.

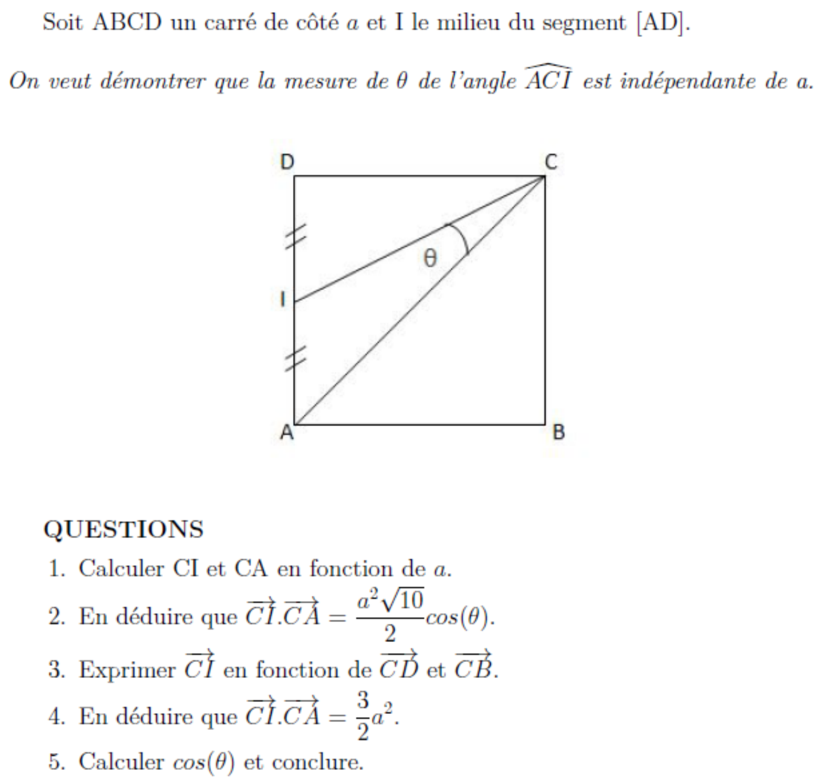
a) Calculez les coordonnées de N en fonction de m.

b) Démontrez que le vecteur $\vec{u}(-m\,;\,1 - m^2)$ est un vecteur directeur de la droite (MN).

c) Déduisez-en une équation de la droite (MN).

d) Prouvez que la droite (MN) passe par un point fixe F repéré lors de l'expérimentation.

FIGURE 4 – Eadwinn Le Duc, Gabriel Manieca, Hélène Pinault



Soit ABCD un carré de côté a et I le milieu du segment [AD].

On veut démontrer que la mesure de θ de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.

QUESTIONS

1. Calculer CI et CA en fonction de a.
2. En déduire que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}cos(\theta)$.
3. Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.
4. En déduire que $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}a^2$.
5. Calculer $cos(\theta)$ et conclure.

Figure 5 – Maiwenn Gougon-Rescan, Pierre-Antoine Haumont, Cédric Touzé