GEA-2016

Feuille $n°$ 1

Exemples d'exercices où intervient la notion d'espace vectoriel ou d'application linéaire

Exercice 1 Une population de lapins évolue de la manière suivante.
Tous les trois mois un couple de lapins adultes met bas à un couple de lapins bébés.
Tout lapin bébé devient adulte au bout de trois mois.

1. Si on note u_n le nombre de couple de lapins après 3n mois passés, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

2. Montrer que les suites données par $u_n = \phi^n$ et $v_n = \psi^n$, avec ϕ, ψ ls deux racines de $r^2 - r - 1 = 0$, sont solutions de (E).
3. En déduire que toutes les suites de la forme $\alpha u_n + \beta v_n$ sont solutions de (E) avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
4. On cherche à établir la réciproque de la question 3). Soit (a_n) une solution de (E).
   (a) On pose $b_n = a_{n+1} - \psi a_n$. Montrer que (b_n) est géométrique de raison ϕ.
   (b) On pose $c_n = (\phi - \psi)a_n - b_n$. Montrer que (c_n) est une suite géométrique de raison ψ.
   (c) Conclure.
5. Sachant qu'à l'origine l'élevage de lapin comportait un seul couple, déterminer au bout de combien de mois, elle dépassera 2000 couples.

Exercice 2 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$. On cherche à en déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions données par $e_2(x) = e^{2x}$ et $e_3(x) = e^{3x}$ sont solutions de (E).
2. En déduire que toutes les fonctions de la forme $\alpha e_2 + \beta e_3$ sont solutions de (E) avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
3. On cherche à établir la réciproque de la question 2).
   (a) Montrer que toute fonction deux fois dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $f = e_2 \times z$ avec z deux fois dérivable.
   (b) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $z'' + z' = 0$.
   (c) Conclure.

ABCD est un tétraèdre et P, Q , R et S sont définis par:

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

1) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$.

2) En déduire que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires.

3) Donner la nature du quadrilatère PQRS.

FIGURE 1 – Flora Bal, Monji Ben Alaya, Marie Rouxel, Benoit Lejeune

B. Généralisation

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et M un point de l'espace.

1. a. Expliquer pourquoi la parallèle à (AD) passant par M coupe le plan (ABC) en un point M′.

b. Justifier qu'il existe :

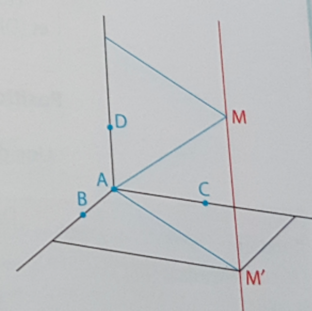
– un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{AD}$.

– deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

2. Supposons qu'il existe deux triplets $(x\,;y;z)$ et $(x';y';z')$ tels que :

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$.



a. Démontrer que :

$$(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC} + (z' - z)\overrightarrow{AD}.$$

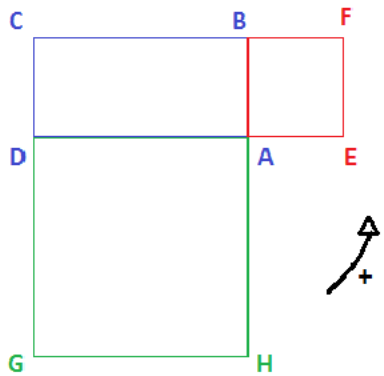
b. Montrer par l'absurde que $x = x'$. En déduire que $y = y'$ et $z = z'$.

Que peut-on en déduire ?

FIGURE 2 – Romain Doineau, Marianne Guillemot, Fangfang Shi

Exercice 46 : *Transmath, Term S, Spécialité, Nathan, programme 2002*

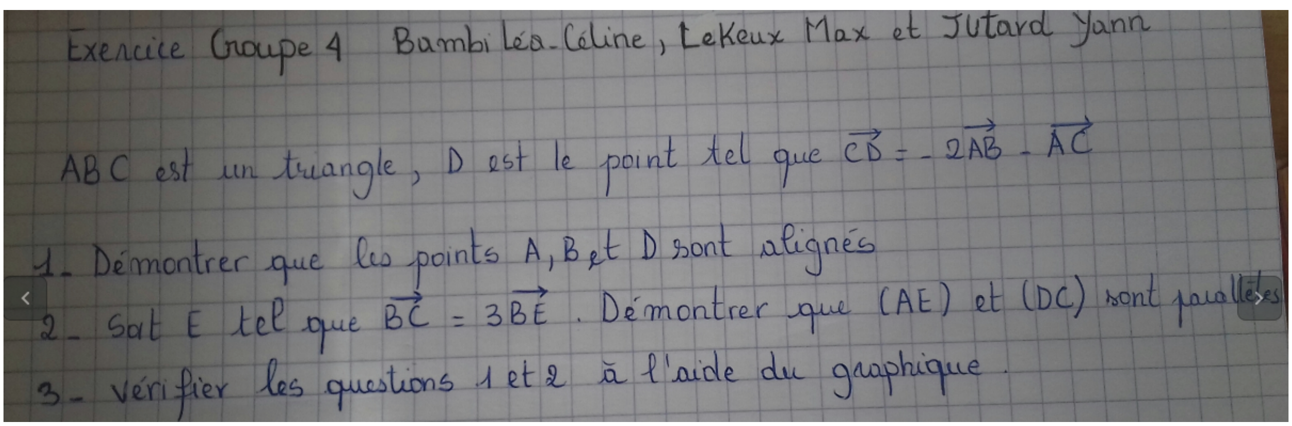
Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.



1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes.
Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et FH) et on introduit :
   - l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E ;
   - l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

   a) Déterminez l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1, puis par la composée $h_2 \circ h_1$.
   b) Déterminez l'image de la droite (CF) par la composée $h_1 \circ h_2$.
   c) Justifiez l'égalité $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. Déduisez-en que la droite (AC) passe aussi par le point I.

FIGURE 3 – Nicolas Crumbach, Aymeric Desbois, Amelie Scarpel


Exercice Groupe 4 Bambi Léa-Céline, Lekeux Max et Jutard Yann

ABC est un triangle, D est le point tel que $\vec{CD} = -2\vec{AB} - \vec{AC}$

1- Démontrer que les points A, B et D sont alignés

2- Soit E tel que $\vec{BC} = 3\vec{BE}$. Démontrer que (AE) et (DC) sont parallèles

3- vérifier les questions 1 et 2 à l'aide du graphique.

FIGURE 4 – Léa-Céline Bambi, Yann Jutard, Max Lekeux

1 Exercice

Le poids d'un corps sur un astre dépend de sa masse et de l'accélération de la pésanteur.

1) L'accélération de la pésanteur sur la Terre est environ de 9.8.

Calculer le poids (en newtons) sur la Terre d'un homme ayant une masse de 70 kg.

2) On donne ci-dessous le tableau de correspondance poids-masse sur la Lune.

Masse (en Kg)	3	10	25	40	55
Poids (en newtons)	5.1	17	42.5	68	93.5

a) Existe t-il un lien entre les données de ce tableau?

b) En déduire l'accélération de la pésanteur sur la Lune.

c) "Sur la Lune on pèse 6 fois moins lourds que sur Terre."

Cette affirmation est t-elle correcte?

FIGURE 5 – Bafetegue Diarrassoubia, Yannick Kenne, Julien Lescob