# Axiomatique d'Euclide-Hilbert

Ronan Quarez

6 septembre 2016

# Axiomatique d'Euclide-Hilbert

## Euclide

Vers -300, Euclide écrit ses *Éléments de géométrie* dont l'objectif est de fonder la géométrie à partir d'un petit nombre de postulats.

Toutefois subsiste quelques imperfections.

## Hilbert

En 1899, David Hilbert procède à une refonte rigoureuse de l'axiomatique des *Éléments de géométrie*.

## La démarche

- On se donne un ensemble appelé *plan* dont les éléments sont appelés *points* et qui contient des parties appelées *droites* (on aurait pu les appeler *chaises* et *tables*).

## La démarche

- On se donne un ensemble appelé *plan* dont les éléments sont appelés *points* et qui contient des parties appelées *droites* (on aurait pu les appeler *chaises* et *tables*).
- On précise ensuite les relations qu'entretiennent ces objets en tentant de faire en sorte qu'elles rendent compte de de notre réalité.
  Ainsi, l'image référence du plan est celui d'une surface d'eau tranquille, l'image de la droite celle du fil à plomb, l'image du point celle de l'extrémité d'une aiguille.

### À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

### À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

### Axiomes

1. Axiomes d'incidence : relations entre points et droites.

## À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

## Axiomes

1. Axiomes d'incidence : relations entre points et droites.
2. Axiomes d'ordre : un point est situé *entre* deux autres.

## À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

## Axiomes

1. Axiomes d'incidence : relations entre points et droites.
2. Axiomes d'ordre : un point est situé *entre* deux autres.
3. Axiomes de congruence des segments : longueurs.

# Axiomatique d'Euclide-Hilbert

## À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

## Axiomes

1. Axiomes d'incidence : relations entre points et droites.
2. Axiomes d'ordre : un point est situé *entre* deux autres.
3. Axiomes de congruence des segments : longueurs.
4. Axiomes de congruence des angles : angles, orthogonalité.

## À la recherche de la substantifique moelle

L'objectif de toute axiomatique est de dégager des axiomes

- en nombre suffisant pour que la théorie soit suffisamment riche et rendre compte de la réalité,
- pas trop nombreux pour limiter toute redondance.

## Axiomes

1. Axiomes d'incidence : relations entre points et droites.
2. Axiomes d'ordre : un point est situé *entre* deux autres.
3. Axiomes de congruence des segments : longueurs.
4. Axiomes de congruence des angles : angles, orthogonalité.
5. Axiomes de continuité : nombres réels.

# Axiomes d'incidence

**Axiome I.1**

Par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.

# Axiomes d'incidence

**Axiome I.1**

Par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.

**Axiome I.2**

Toute droite contient au moins deux points.

# Axiomes d'incidence

**Axiome I.1**

Par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.

**Axiome I.2**

Toute droite contient au moins deux points.

**Axiome I.3**

Il existe trois points non alignés.

# Axiomes d'incidence

**Axiome I.1**

Par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.

**Axiome I.2**

Toute droite contient au moins deux points.

**Axiome I.3**

Il existe trois points non alignés.

Deux droites sans point commun sont dites parallèles.

**Exercice**

Montrer que

- Deux droites distinctes ont au plus un point commun.
- Pour toute droite $\mathcal{D}$ il existe un point $P$ tel que $P \notin \mathcal{D}$.
- Pour tout point $P$, il existe une droite $\mathcal{D}$ telle que $P \notin \mathcal{D}$.

**Axiome P : postulat d'Euclide**

Par un point $M$ non situé sur la droite $\mathcal{D}$ passe une parallèle à $\mathcal{D}$ et une seule.

# Axiomes d'incidence

### Axiome P : postulat d'Euclide

Par un point $M$ non situé sur la droite $\mathcal{D}$ passe une parallèle à $\mathcal{D}$ et une seule.

### Des géométries ne satisfaisant pas le postulat d'Euclide

Ce n'est qu'au 19ème siècle qu'on montre que le postulat d'Euclide n'est pas une conséquence des autres postulats (d'incidence, d'ordre, etc.) en découvrant des géométries qui satisfont tous les postulats sauf ce dernier : géométries hyperboliques, sphériques...

## Demi-plan de Poincaré

Soit l'ensemble $\mathcal{H} = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ muni de la distance

$$d(z_1, z_2) = \log\left(\frac{\mid z_1 - \overline{z_2} \mid + \mid z_1 - z_2 \mid}{\mid z_1 - \overline{z_2} \mid - \mid z_1 - z_2 \mid}\right)$$

On appelle droite toute "demi-droite" d'origine l'axe des abscisses et qui y est "perpendiculaire" ainsi que tout "demi-cercle supérieur" centré sur l'axe des abscisses (note : ce sont les géodésiques).

## Demi-plan de Poincaré

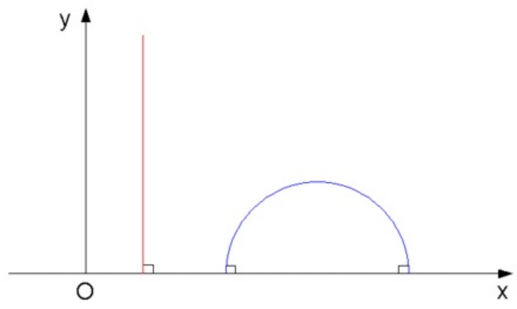



FIGURE – Géométrie du demi-plan de Poincaré

## Demi-plan de Poincaré

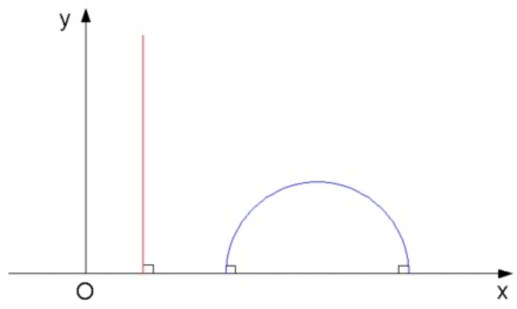



Figure – Géométrie du demi-plan de Poincaré

## Non respect du postulat P

Par un point donné il passe une infinité de droites parallèles à une droite donnée.

Retour à l'axiomatique d'Euclide-Hilbert :

### Directions du plan

La relation, sur l'ensemble des droites du plan, définie par la propriété

$$\mathcal{D} \text{ est parallèle ou confondue avec } \mathcal{D}'$$

est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont les *directions*.

Retour à l'axiomatique d'Euclide-Hilbert :

## Directions du plan

La relation, sur l'ensemble des droites du plan, définie par la propriété

$$\mathcal{D} \text{ est parallèle ou confondue avec } \mathcal{D}'$$

est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont les *directions*.

## Conséquence

Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ et $\Delta$ est sécante à $\mathcal{D}$, alors $\Delta$ est sécante à $\mathcal{D}'$.

Retour à l'axiomatique d'Euclide-Hilbert :

### Directions du plan

La relation, sur l'ensemble des droites du plan, définie par la propriété

$$\mathcal{D} \text{ est parallèle ou confondue avec } \mathcal{D}'$$

est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont les *directions*.

### Conséquence

Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ et $\Delta$ est sécante à $\mathcal{D}$, alors $\Delta$ est sécante à $\mathcal{D}'$.

### Théorème

Toutes les droites ont même cardinalité.

## Exemple de géométrie finie

Soit $q = p^r$ avec $p$ premier et $r$ un entier naturel.

- Dans le plan affine sur $\mathbb{F}_q$, on dénombre

## Exemple de géométrie finie

Soit $q = p^r$ avec $p$ premier et $r$ un entier naturel.

- Dans le plan affine sur $\mathbb{F}_q$, on dénombre $q^2$ points, $q^2 + q$ droites, toute droite compte $q$ points.
- Dans le plan projectif sur $\mathbb{F}_q$, on dénombre

# Axiomes d'incidence

## Exemple de géométrie finie

Soit $q = p^r$ avec $p$ premier et $r$ un entier naturel.

- Dans le plan affine sur $\mathbb{F}_q$, on dénombre $q^2$ points, $q^2 + q$ droites, toute droite compte $q$ points.
- Dans le plan projectif sur $\mathbb{F}_q$, on dénombre $q^2 + q + 1$ points, $q^2 + q + 1$ droites, toute droite compte $q + 1$ points, deux droites distinctes sont toujours sécantes.

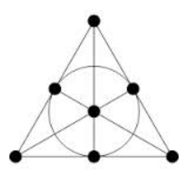


FIGURE – Plan projectif sur $\mathbb{F}_2$

Ils régissent la relation "être entre" pour des points alignés. On note $]AB[$ l'ensemble des points (de la droite $(AB)$) entre $A$ et $B$.

Ils régissent la relation “être entre” pour des points alignés. On note $]AB[$ l'ensemble des points (de la droite $(AB)$) entre $A$ et $B$.

**Axiome O.1**

Si $B$ est entre $A$ et $C$, alors $B$ est entre $C$ et $A$.

# Axiomes d'ordre

Ils régissent la relation "être entre" pour des points alignés. On note $]AB[$ l'ensemble des points (de la droite $(AB)$) entre $A$ et $B$.

**Axiome O.1**

Si $B$ est entre $A$ et $C$, alors $B$ est entre $C$ et $A$.

**Axiome O.2**

Soient $B$ et $D$ deux points distincts. Il existe trois points $A, C, E$ de $(BD)$ tels que $B \in ]AD[$, $C \in ]BD[$ et $D \in ]BE[$.

Ils régissent la relation "être entre" pour des points alignés. On note $]AB[$ l'ensemble des points (de la droite $(AB)$) entre $A$ et $B$.

### Axiome O.1

Si $B$ est entre $A$ et $C$, alors $B$ est entre $C$ et $A$.

### Axiome O.2

Soient $B$ et $D$ deux points distincts. Il existe trois points $A, C, E$ de $(BD)$ tels que $B \in ]AD[$, $C \in ]BD[$ et $D \in ]BE[$.

### Axiome O.3

Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.

# Axiomes d'ordre

**Définition : demi-plan**

On dit que $A$ et $B$ sont d'un même côté d'une droite $\mathcal{D}$ si $[AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Un demi-plan ouvert délimité par une droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points d'un même côté de $\mathcal{D}$.

# Axiomes d'ordre

## Définition : demi-plan

On dit que $A$ et $B$ sont d'un même côté d'une droite $\mathcal{D}$ si $[AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Un demi-plan ouvert délimité par une droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points d'un même côté de $\mathcal{D}$.

## Axiome O.4

Soient trois points $A, B, C$ hors d'une droite $\mathcal{D}$.

- Si $A$ et $B$ sont du même côté de $\mathcal{D}$, $B$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$, alors $A$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$.
- Si $A$ et $B$ ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, $B$ et $C$ ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, alors $A$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$.

# Axiomes d'ordre

**Définition : demi-plan**

On dit que $A$ et $B$ sont d'un même côté d'une droite $\mathcal{D}$ si $[AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$.
Un demi-plan ouvert délimité par une droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points d'un même côté de $\mathcal{D}$.

**Axiome O.4**

Soient trois points $A, B, C$ hors d'une droite $\mathcal{D}$.

- Si $A$ et $B$ sont du même côté de $\mathcal{D}$, $B$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$, alors $A$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$.
- Si $A$ et $B$ ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, $B$ et $C$ ne sont pas du même côté de $\mathcal{D}$, alors $A$ et $C$ sont du même côté de $\mathcal{D}$.

**Proposition**

Une droite partage le plan en deux de demi-plans disjoints.

On peut alors définir :

**Définition : convexe**

Un sous-ensemble $\mathcal{Q}$ du plan est dit convexe si pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{Q}$, on a $[AB] \subset \mathcal{Q}$.

On peut alors définir :

**Définition : convexe**

Un sous-ensemble $\mathcal{Q}$ du plan est dit convexe si pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{Q}$, on a $[AB] \subset \mathcal{Q}$.

**Définition : demi-droite**

$$C \in [AB) si C \in [AB] \text{ ou } B \in [AC]$$

On peut alors définir :

**Définition : convexe**

Un sous-ensemble $\mathcal{Q}$ du plan est dit convexe si pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{Q}$, on a $[AB] \subset \mathcal{Q}$.

**Définition : demi-droite**

$$C \in [AB) si C \in [AB] \text{ ou } B \in [AC]$$

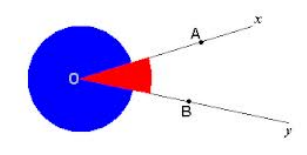
**Théorème de Pasch**

Soient $A, B, C$ trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite intersectant $]AB[$. Alors une seule de ces trois situations se produit :

$C \in \mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}$ coupe $]AC[$ ou $\mathcal{D}$ coupe $]BC[$.

## Notations

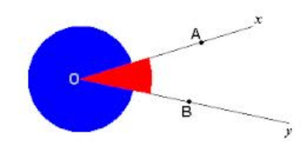
Soient $O, A, B$ trois non-alignés du plan. On note $H_A^+$ le demi-plan ouvert limité par $[OA)$ et contenant $B$ et $H_A^-$ le demi-plan complémentaire. Respectivement $H_B^+$ et $H_B^-$.



# Axiomes d'ordre et de congruence

## Notations

Soient $O, A, B$ trois non-alignés du plan. On note $H_A^+$ le demi-plan ouvert limité par $[OA)$ et contenant $B$ et $H_A^-$ le demi-plan complémentaire. Respectivement $H_B^+$ et $H_B^-$.

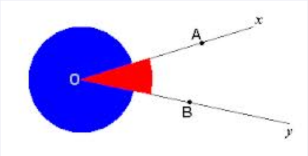



## Définition : angles géométriques

La réunion des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ délimite un angle saillant $H_A^+ \cap H_B^+$ noté $\widehat{AOB}$ et un angle rentrant $H_A^- \cup H_B^-$ noté $AOB^{\vee}$.

## Notations

Soient $O, A, B$ trois non-alignés du plan. On note $H_A^+$ le demi-plan ouvert limité par $[OA)$ et contenant $B$ et $H_A^-$ le demi-plan complémentaire. Respectivement $H_B^+$ et $H_B^-$.




## Définition : angles géométriques

La réunion des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ délimite un angle saillant $H_A^+ \cap H_B^+$ noté $\widehat{AOB}$ et un angle rentrant $H_A^- \cup H_B^-$ noté $AOB^{\vee}$.

## Remarque

Un angle saillant est convexe ; un angle rentrant ne l'est pas.

# Les axiomes de congruence de segments

Les axiomes de congruences entre segments sont à la base de la notion de longueur de segments : les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont dits congruents pour signifier qu'ils ont "même longueur".

# Les axiomes de congruence de segments

Les axiomes de congruences entre segments sont à la base de la notion de longueur de segments : les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont dits congruents pour signifier qu'ils ont "même longueur".

**Axiome C1**

Étant donné quatre points distincts $A, B, A', C'$, il existe un unique point $B' \in [A'C')$ tel que $[AB] \equiv [A'B']$

# Les axiomes de congruence de segments

Les axiomes de congruences entre segments sont à la base de la notion de longueur de segments : les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont dits congruents pour signifier qu'ils ont "même longueur".

**Axiome C1**

Étant donné quatre points distincts $A, B, A', C'$, il existe un unique point $B' \in [A'C')$ tel que $[AB] \equiv [A'B']$

**Axiome C2**

La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments.

Les axiomes de congruences entre segments sont à la base de la notion de longueur de segments : les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont dits congruents pour signifier qu'ils ont "même longueur".

### Axiome C1

Étant donné quatre points distincts $A, B, A', C'$, il existe un unique point $B' \in [A'C')$ tel que $[AB] \equiv [A'B']$

### Axiome C2

La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments.

### Axiome C3

Si $B \in [AC]$, $B' \in [A'C']$, $[AB] \equiv [A'B']$ et $[BC] \equiv [B'C']$ alors $[AC] \equiv [A'C']$ ;

## Premier cas d'égalité des triangles

Soient deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ tel que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$. Alors $BC = B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ and $\hat{C} = \hat{C}'$.

# Les axiomes de congruence d'angles

## Premier cas d'égalité des triangles

Soient deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ tel que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$. Alors $BC = B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ and $\hat{C} = \hat{C}'$.

## Démonstration par Euclide

Si on applique le triangle $ABC$ sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points $A$ et $A'$ puis les côtés $AB$ et $A'B'$, le point $B$ coïnciderait avec $B'$ car $AB = A'B'$.
Les côtés $AC$ et $A'C'$ coïnciderait aussi à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$, de sorte que le point $C$ coïnciderait avec $C'$ car $AC = A'C'$.
Ainsi, le triangle tout entier $ABC$ coïnciderait avec $A'B'C'$ et les angles restants coïncideraient aussi.

### Premier cas d'égalité des triangles

Soient deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ tel que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$. Alors $BC = B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ and $\hat{C} = \hat{C}'$.

### Démonstration par Euclide

Si on applique le triangle $ABC$ sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points $A$ et $A'$ puis les côtés $AB$ et $A'B'$, le point $B$ coïnciderait avec $B'$ car $AB = A'B'$.
Les côtés $AC$ et $A'C'$ coïncideraint aussi à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$, de sorte que le point $C$ coïnciderait avec $C'$ car $AC = A'C'$.
Ainsi, le triangle tout entier $ABC$ coïnciderait avec $A'B'C'$ et les angles restants coïncideraient aussi.

Se posent toutefois quelques problèmes...

# Les axiomes de congruence d'angles

## Axiome C4

Soient $A, O, B, A', O'$ des points distincts du plan et soit $H$ un demi-plan délimité par $(O'A')$. Il existe une unique demi-droite $[OB') \subset H$ telle que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

# Les axiomes de congruence d'angles

## Axiome C4

Soient $A, O, B, A', O'$ des points distincts du plan et soit $H$ un demi-plan délimité par $(O'A')$. Il existe une unique demi-droite $[OB') \subset H$ telle que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

## Axiome C5

La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des angles.

## Axiome C4

Soient $A$, $O$, $B$, $A'$, $O'$ des points distincts du plan et soit $H$ un demi-plan délimité par $(O'A')$. Il existe une unique demi-droite $[OB') \subset H$ telle que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

## Axiome C5

La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des angles.

Congruence des triangles :

## Axiome C6

Si deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont tels que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$, $[AB] \equiv [A'B']$ et $[AC] \equiv [A'C']$, alors $[CB] \equiv [C'B']$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.

# Quelques conséquences...

**Proposition**

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents.

# Quelques conséquences...

**Proposition**

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents.

**Proposition**

Les angles opposés par le sommet sont congruents.

# Quelques conséquences...

**Proposition**

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents.

**Proposition**

Les angles opposés par le sommet sont congruents.

Et puis aussi :

**Théorème des angles internes-externes**

**Sommes des angles dans un triangle**

**Second et troisième cas de congruence des triangles**

**Théorème de l'angle inscrit**

**Tous les angles droits sont congruents**

etc.

## Axiome d'Archimède

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments non réduits à un point. Il existe $n$ points $E_1, \ldots, E_n$ de la droite $(AB)$ tels que $E_1 = A$, $B \in [E_1, E_n]$ et pour tout $m$, $[CD] \equiv [E_m E_{m+1}]$.

# Les axiomes de continuité

## Axiome d'Archimède

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments non réduits à un point. Il existe $n$ points $E_1, \ldots, E_n$ de la droite $(AB)$ tels que $E_1 = A$, $B \in [E_1, E_n]$ et pour tout $m$, $[CD] \equiv [E_m E_{m+1}]$.

Il est alors possible de mesurer la longueur d'un segment donné à l'aide d'un nombre réel. On pourra faire intervenir la notion de milieu d'un segment (pour l'existence du milieu de $[AB]$, on pourra considérer un point $C$ hors de $(AB)$ puis le point $C'$ tel que le triangle $ABC$ soit "indirectement semblable" à $ABC'$).

# Les axiomes de continuité

## Axiome d'Archimède

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments non réduits à un point. Il existe $n$ points $E_1, \dots, E_n$ de la droite $(AB)$ tels que $E_1 = A$, $B \in [E_1, E_n]$ et pour tout $m$, $[CD] \equiv [E_m E_{m+1}]$.

Il est alors possible de mesurer la longueur d'un segment donné à l'aide d'un nombre réel. On pourra faire intervenir la notion de milieu d'un segment (pour l'existence du milieu de $[AB]$, on pourra considérer un point $C$ hors de $(AB)$ puis le point $C'$ tel que le triangle $ABC$ soit "indirectement semblable" à $ABC'$).

## Axiome de Dedekind

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{D} = S_1 \cup S_2$ une partition en parties convexes. Il existe un point $O \in \mathcal{D}$ tel que $O \in ]A, B[ \subset \mathcal{D}$ si et seulement si une extrémité de $]A, B[$ est dans $S_1$ et l'autre dans $S_2$.

### Axiome d'Archimède

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments non réduits à un point. Il existe $n$ points $E_1, \ldots, E_n$ de la droite $(AB)$ tels que $E_1 = A$, $B \in [E_1, E_n]$ et pour tout $m$, $[CD] \equiv [E_m E_{m+1}]$.

Il est alors possible de mesurer la longueur d'un segment donné à l'aide d'un nombre réel. On pourra faire intervenir la notion de milieu d'un segment (pour l'existence du milieu de $[AB]$, on pourra considérer un point $C$ hors de $(AB)$ puis le point $C'$ tel que le triangle $ABC$ soit "indirectement semblable" à $ABC'$).

### Axiome de Dedekind

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{D} = S_1 \cup S_2$ une partition en parties convexes. Il existe un point $O \in \mathcal{D}$ tel que $O \in ]A, B[ \subset \mathcal{D}$ si et seulement si une extrémité de $]A, B[$ est dans $S_1$ et l'autre dans $S_2$.

Ces axiomes disent que toute droite est isomorphe à $\mathbb{R}$.

# La suite...

## Orthogonalité

Orthogonalité, théorème de Pythagore, cosinus, sinus, angles orientés.

# La suite...

## Orthogonalité

Orthogonalité, théorème de Pythagore, cosinus, sinus, angles orientés.

## Mesure des angles

Soient $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre $O$ et $A$, $B$ deux points sur le cercle.
Par définition, le périmètre de $\mathcal{C}$ est $2\pi$.
La mesure en radians du secteur angulaire $\widehat{AOB}$ est par définition la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte.

# La suite...

## Orthogonalité

Orthogonalité, théorème de Pythagore, cosinus, sinus, angles orientés.

## Mesure des angles

Soient $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre $O$ et $A, B$ deux points sur le cercle.
Par définition, le périmètre de $\mathcal{C}$ est $2\pi$.
La mesure en radians du secteur angulaire $\widehat{AOB}$ est par définition la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte.

## Vecteurs

Définition d'un vecteur (les bipoints $(A, B)$ et $(C, D)$ sont équipollents si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu), addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire.

# La suite...

## Orthogonalité

Orthogonalité, théorème de Pythagore, cosinus, sinus, angles orientés.

## Mesure des angles

Soient $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre $O$ et $A$, $B$ deux points sur le cercle.
Par définition, le périmètre de $\mathcal{C}$ est $2\pi$.
La mesure en radians du secteur angulaire $\widehat{AOB}$ est par définition la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte.

## Vecteurs

Définition d'un vecteur (les bipoints $(A, B)$ et $(C, D)$ sont équipollents si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu), addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire.

## Produit scalaire

Orthogonalité de vecteurs, norme, repères orthonormés, coordonnées, produit scalaire.

Etc.