Une présentation simple, clair et drôle pour comprendre FiltrOptim

Le filtrage numérique POUR LES NULS

par Olivier Sentieys

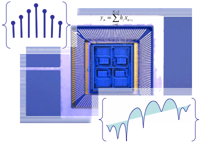
Analyse et synthèse des filtres numériques: une introduction

Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1
IRISA - CAIRN

sentieys@irisa.fr
http://r2d2.enssat.fr/enseignements/Tns

28 mai 2008



Plan

Plan

Plan

Introduction

Traitement (*numérique*) du signal (*numérique*) :

- **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.
- **Synthétiser** – ou générer – un signal.
- **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
- **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système linéaire (filtrer, moduler, coder, ...) ou non linéaire ($()^2$, $|\,|$, $\ldots$).

Signaux à temps discrets

- Séquence $\mathcal{X}$ de nombres dans laquelle le $n$ième nombre est $x(n)$. On écrira :

$$\mathcal{X} = \{x(n)\} \qquad -\infty < n < \infty$$

- $x(n)$ est égal à la valeur du signal analogique $x_a(t)$ au temps $t = nT$, i.e.

$$x(n) = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

- T : période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$, $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$
4. Sinusoïde : $x_3(n) = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$
5. Cas général : $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$
   e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$, $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$
4. Sinusoïde : $x_3(n) = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$
5. Cas général : $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$
   e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$, $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$
4. Sinusoïde : $x_3(n) = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$
5. Cas général : $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$
   e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$, $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$
4. Sinusoïde : $x_3(n) = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$
5. Cas général : $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$
e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$, $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$
4. Sinusoïde : $x_3(n) = A\cos(n\omega_0 + \varphi)$
5. Cas général : $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$
   e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

Transformée en Z

La transformée en Z bilatérale d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie par :

$$Z\left[x(n)\right] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (1)$$

où z est une variable complexe ($z \in \mathbb{C}$) définie partout où cette série converge.

TF d'un signal discret (non périodique)

Pour un signal $x(n)$ discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier (TF) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \tag{2}$$

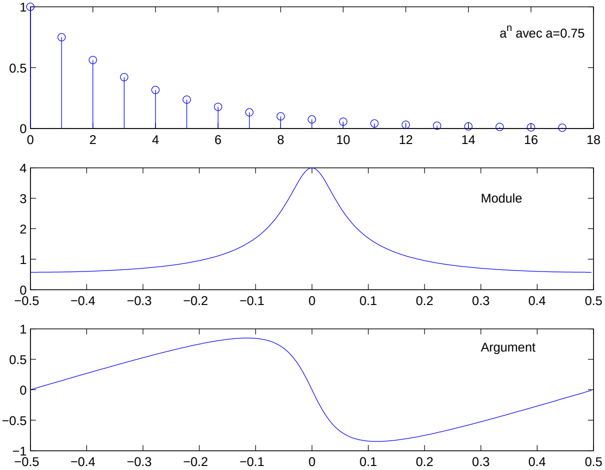
$X(e^{j\Omega})$ peut être exprimé à partir de la transformée en Z par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \tag{3}$$

- $X(\Omega)$ est *périodique* de période 2π. Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique**.

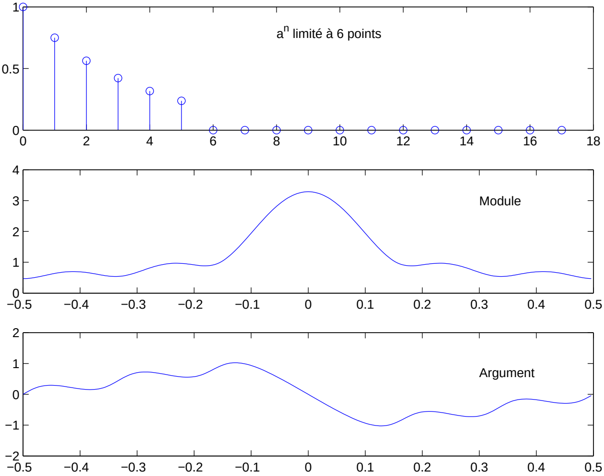
TF d'un signal discret non périodique

Exemple : $x(n) = a^n u(n)$



TF d'un signal discret non périodique

Exemple : $x(n) = a^n, \text{ pour } n = 0 \dots N-1$



Condition d'existence de la TF (1/3)

Une condition suffisante à la convergence de la TF peut être déterminée comme suit ($x(n)$ est dite *absolument sommable*) :

$$|X(e^{j\Omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

De plus, la série converge uniformément vers une fonction continue de Ω.

Certaines séquences ne sont pas *absolument sommables* mais sont de *carré sommable* (ou à énergie finie), i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \tag{4}$$

Condition d'existence de la TF (2/3)

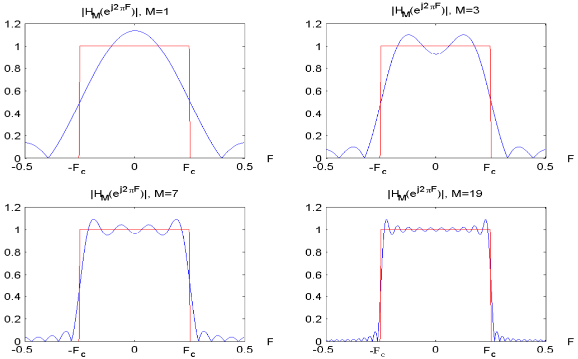
Ces séquences peuvent être représentées par une transformée de Fourier mais sans convergence uniforme de la somme infinie définissant $X(e^{j\Omega})$. Cela signifie que l'erreur $|X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|$ ne tend pas vers 0 quand $M \to \infty$ mais que par contre l'énergie de l'erreur tend vers 0.

Exemple :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \rightleftharpoons h(n) = \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi}, \quad -\infty < n < \infty$$

Condition d'existence de la TF (3/3)

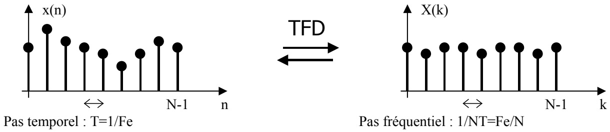
$$H_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega}$$



Transformée de Fourier discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \cdots, N-1 \tag{5}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \cdots, N-1 \tag{6}$$



4. Systèmes discrets

1. Systèmes linéaires invariants dans le temps
2. Représentation temporelle
3. Analyse par transformée en Z
4. Représentation fréquentielle

Systèmes discrets linéaires invariants dans le temps

1. Un signal d'entrée $e(n)$ est *transformé* en un signal de sortie $s(n)$:
$$s(.) = \mathcal{T}[e(.)]$$
2. Un système est dit *linéaire* et *invariant* dans le temps ssi :

$$\mathcal{T}[a \times e_1(n) + b \times e_2(n)] = a \times \mathcal{T}[e_1(n)] + b \times \mathcal{T}[e_2(n)]$$

$$\forall e_1(.), \forall e_2(.), \forall (a, b)$$

$$e(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n) \quad \Rightarrow \quad e(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n-k) \quad \forall e(.), \forall k \in (N)$$

Produit de convolution (1/2)

$$
\begin{aligned}
e(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k) \\
s(n) &= \mathcal{T}[e(n)] = \mathcal{T}[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)]
\end{aligned}
$$

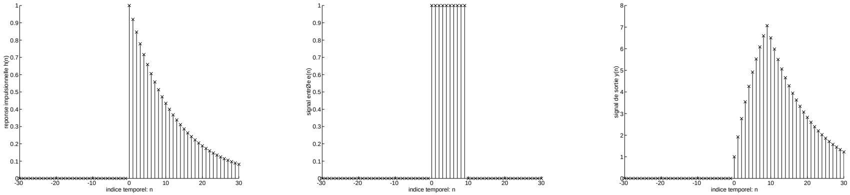
On pose $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$, alors

$$
s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)
$$

Produit de convolution (2/2)

Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(n)$. L'opération $*$ liant la sortie $s(n)$ à l'entrée $e(n)$ et à la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ est appelée produit de convolution.

Exemple



$h(n)$: réponse impulsionnelle ; $e(n)$: entrée du système ; $s(n)$: réponse du système à l'entrée

Equation aux différences finies

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k e(n-k) \qquad (7)$$

- Système *récursif* ou *non-récursif*
- Réponse impulsionnelle infinie (RII *ou IIR*) ou finie (RIF *ou FIR*)

Fonction de transfert en z (1/2)

La fonction de transfert en z $H(z)$ d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \tag{8}$$

$H(z)$ est également la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.
À partir de l'équation aux différences (7), on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{9}$$

Représentation fréquentielle des SLD (1/2)

Soit l'entrée $e(n) = e^{jn\omega T} = e^{jn\Omega}$ pour $-\infty < n < +\infty$ d'un SLI de réponse impulsionnelle $h(k)$. La sortie peut alors s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j(n-k)\Omega} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\Omega}$$

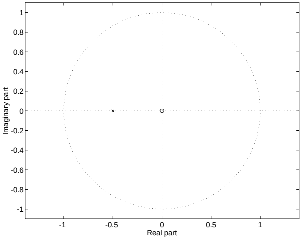
$H(e^{j\Omega})$ est appelé *réponse fréquentielle* du système. On étudie son module et sa phase :

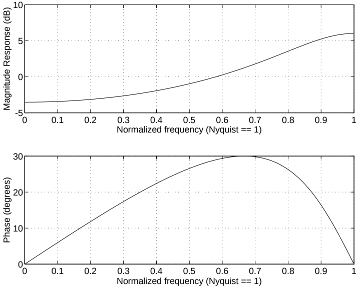
$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{jarg[H(e^{j\Omega})]}$$

Représentation fréquentielle des SLD (2/2)

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$





Plan

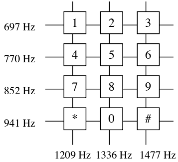
4. Filtres numériques
   - Filtrage numérique : introduction
   - Représentation d'un filtre numérique
   - Spécification d'un filtre numérique
   - Filtres non récursifs RIF
   - Filtres récursifs RII

Filtre numérique : définition

Système Linéaire Discret (SLD) modifiant la représentation temporelle et fréquentielle de signaux

Exemples

- Réduction de bruit pour des signaux radio, des images issues de capteurs, ou encore des signaux audio
- Modification de certaines zones de fréquence dans un signal audio ou sur une image
- Limitation à une bande fréquentielle pré-définie
- Fonctions spéciales (dérivation, intégration, transformée de Hilbert, ...)
- Exemple du code DTMF (Digital Tone Multiple Frequency) utilisé en téléphonie :



Fréquences de tonalité du clavier numérique

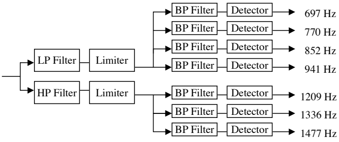


Schéma de détection de tonalité

Représentation d'un filtre numérique (1/2)

Un filtrage numérique peut être représenté en utilisant plusieurs types de spécifications.

1. **Fonction de transfert en z** :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i.z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i.z^{-i}} \tag{10}$$

2. **Réponse impulsionnelle** (transformée en z inverse de $H(z)$) :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n} \tag{11}$$

3. **Équation aux différences** :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i.x(n-i) - \sum_{i=0}^{N} a_i.y(n-i) \tag{12}$$

Représentation d'un filtre numérique (2/2)

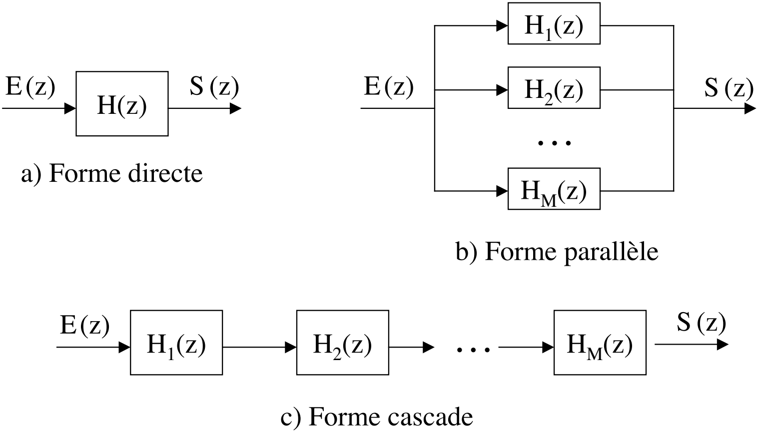


Fig.: Représentations sous forme de fonctions de transfert en z

Plusieurs types de filtres

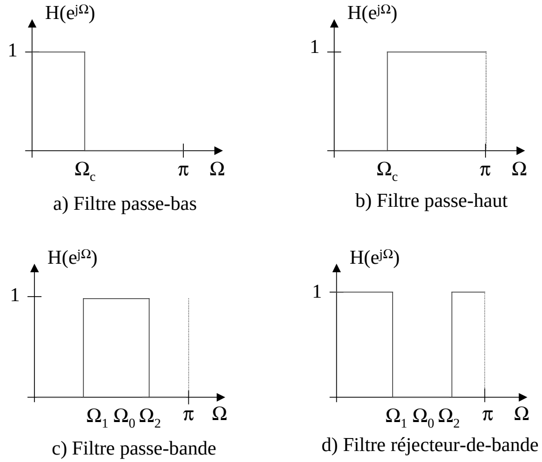
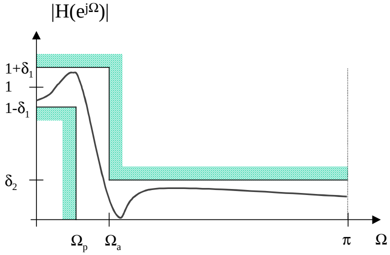


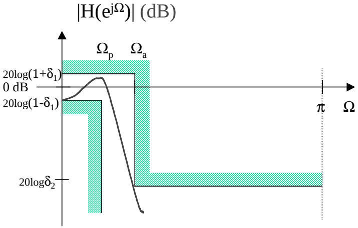
Fig.: Représentation de différents filtres idéaux

Gabarit fréquentiel

Un filtre passe-bas (ou passe-haut) possède trois zones : la bande passante ($0 \leq \Omega \leq \Omega_p$), la bande de transition ($\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_a$) et la bande atténuée ($\Omega_a \leq \Omega \leq \pi$).



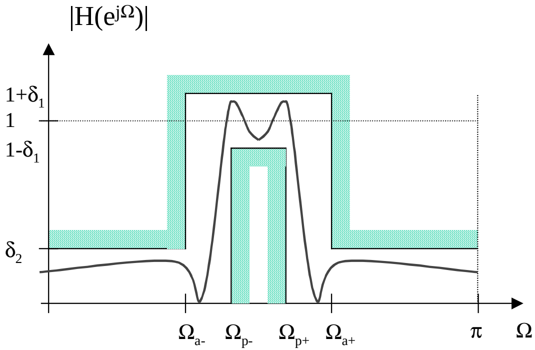
a) Gabarit fréquentiel linéaire



b) Gabarit fréquentiel en dB

Gabarit fréquentiel

Un filtre passe-bande (ou réjecteur de bande) possède plusieurs zones : la bande passante ($\Omega_{p-} \leq \Omega \leq \Omega_{p+}$), deux bandes de transition et deux bandes atténuées ($0 \leq \Omega \leq \Omega_{a-}$ et $\Omega_{a+} \leq \Omega \leq \pi$).



Classification

Les filtres numériques peuvent être classés selon plusieurs critères :

1. la longueur de la réponse impulsionnelle implique deux types de filtres :
   RIF, i.e. $h(n) = 0$ pour $n < 0$ et $n > N$
   RII, i.e. $h(n) \neq 0 \; \forall n$,
2. le type de représentation, ou de structure, implique deux types de filtres récursifs $(a_i = 0)$ et non récursifs.

A l'exception de cas particuliers, les filtres récursifs et non récursifs sont respectivement équivalents aux filtres RII et RIF.

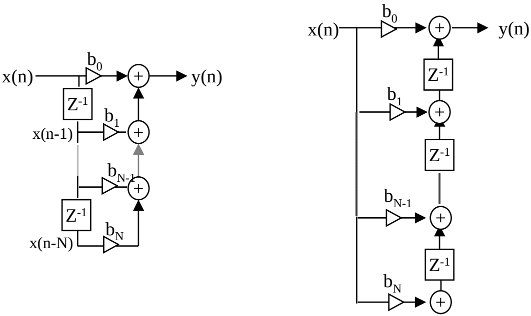
Filtres non récursifs RIF

Les principales caractéristiques des filtres RIF sont :

1. une bande de transition qui sera toujours plus large qu'un filtre RII ayant le même nombre de coefficients ;
2. des méthodes de synthèse permettant de dériver n'importe quelle réponse fréquentielle ;
3. une stabilité inhérente $\left(\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| < \infty\right)$;
4. une plus grande stabilité numérique que les RII ;
5. une phase qui peut être exactement linéaire, par conséquent un temps de propagation de groupe constant et une absence de distorsion harmonique dans le signal ;
6. une plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement.

Structure des filtres RIF

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i.x(n-i) = b_0.x(n)+b_1.x(n-1)+\ldots+b_{N-1}.x(n-N+1)+b_N.x(n-N)$$



a) Structure directe **b) Structure transposée**

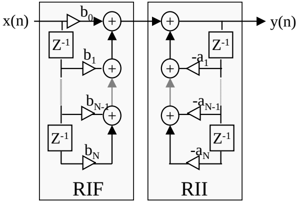
Filtres récursifs RII

Les principales caractéristiques des filtres RII sont :

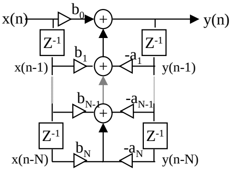
1. une bande de transition qui peut être étroite ;
2. une instabilité potentielle due à des pôles de $H(z)$ situés en dehors du cercle unité ;
3. une complexité plus faible qu'un RIF à sélectivité équivalente ;
4. une plus grande sensibilité numérique (quantification des coefficients, bruits de calculs).

Structure des filtres RII

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = [N(z)] \times \left[\frac{1}{D(z)}\right] = \left[\sum_{i=0}^{N} b_i . z^{-i}\right] \times \left[\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i . z^{-i}}\right]$$



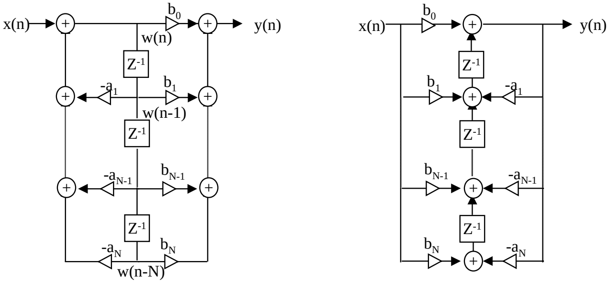
a) Cascade



b) Structure directe

Structure des filtres RII

$$H(z) = \left[\frac{1}{D(z)}\right] \times [N(z)] = \left[\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i.z^{-i}}\right] \times \left[\sum_{i=0}^{N} b_i.z^{-i}\right]$$



a) Structure canonique directe **b) Structure canonique transposée**

Plan

5. Synthèse des filtres numériques RIF
   - Introduction
   - Filtres à phase linéaire
   - Synthèse par fenêtrage
   - Synthèse par échantillonnage fréquentiel
   - Synthèse par approximation optimale de fonctions

Introduction

Trois principales méthodes :

1. **la méthode du fenêtrage (windowing)** consiste à appliquer une fenêtre de taille N au filtre idéal équivalent ;
2. **la méthode de l'échantillonnage fréquentiel** utilise la Transformée de Fourier Discrète inverse depuis une fonction discrète représentative du filtre et définie en fréquence ;
3. **les méthodes d'optimisation** se concentrent sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal. La plus utilisée est la méthode de Parks and McClellan [PM73], qui reformule le problème de synthèse de filtre sous la forme d'une approximation polynômiale.

Filtres à phase linéaire

$$H(e^{j\Omega}) = A(e^{j\Omega})e^{-j\alpha\Omega+j\beta}$$

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).e^{-jn\Omega}$$

Premier cas : $\varphi(\Omega) = -\alpha\Omega$, $-\pi \leq \Omega \leq \pi$

$$H(e^{j\Omega}) = A(e^{j\Omega})[\cos\alpha\Omega - j\sin\alpha\Omega] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)[\cos n\Omega - j\sin n\Omega]$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\alpha - n)\Omega] = 0$$

Filtres à phase linéaire

$$\begin{cases} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \; pour \; 0 \leq n \leq \alpha \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle est donc **symétrique** par rapport à α.

Second cas : $\varphi(\Omega) = \beta - \alpha\Omega$, $-\pi \leq \Omega \leq \pi$

$$\begin{cases} \beta = \pm\pi/2 \\ \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \; pour \; 0 \leq n \leq \alpha \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle est donc **antisymétrique**.

On déduit de ces deux cas que selon la parité de N et le type de symétrie de $h(n)$, quatre types distincts de filtres sont à étudier.

Filtre RIF à phase linéaire de type I

Un filtre RIF à phase linéaire de type I est défini par une réponse impulsionnelle symétrique :

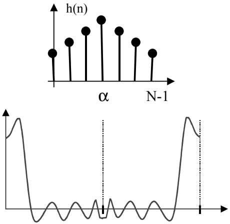
$$h(n) = h(N-1-n), \qquad 0 \leq n \leq \alpha$$

avec N impair. $\alpha = \frac{N-1}{2}$ est entier. La réponse fréquentielle du filtre est :

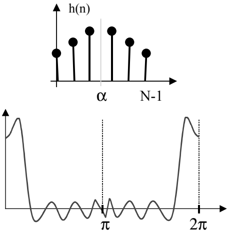
$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n . \cos(n\Omega)$$

$$a_0 = h(\frac{N-1}{2})$$

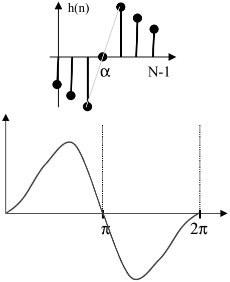
$$a_n = 2h(\frac{N-1}{2} - n), \qquad n = 1, \ldots \frac{N-1}{2}$$



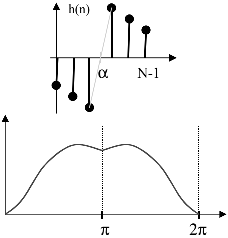
a) Filtre de type I



b) Filtre de type II



c) Filtre de type III



d) Filtre de type IV

Synthèse par fenêtrage

Soit un filtre numérique idéal $H(e^{j\Omega})$, périodique de période 2π :

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\Omega}$$

de réponse impulsionnelle

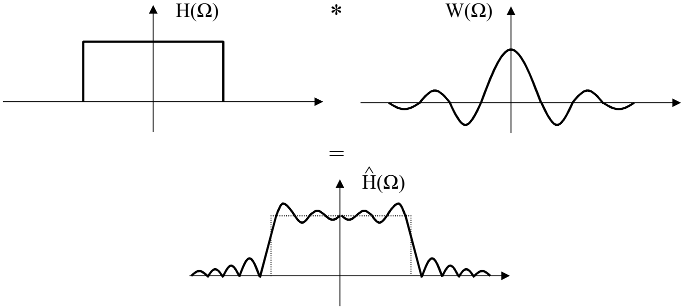
$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega$$

Ce filtre est non causal et à réponse impulsionnelle infinie. La manière la plus simple d'obtenir un filtre RIF approchant $H(e^{j\Omega})$ est de limiter $h(n)$ par :

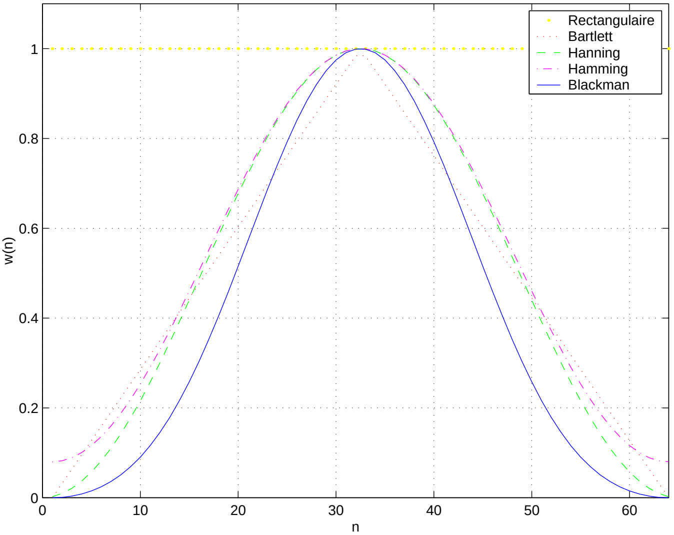
$$\hat{h}(n) = \begin{cases} h(n).w(n), & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

Synthèse par fenêtrage

$$\begin{aligned}\hat{H}(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n).w(n).e^{-jn\Omega} \\ &= H(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})\end{aligned}$$



Principales fenêtres



Principales fenêtres

Rectangulaire

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

Hanning

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

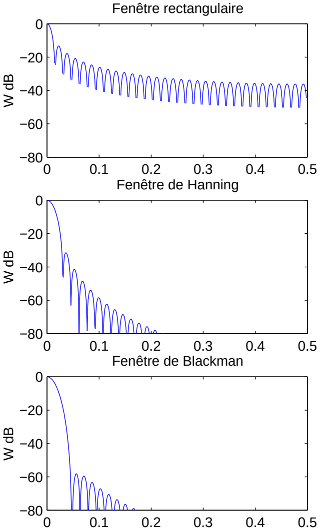
Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

Principales fenêtres



Choix de la fenêtre

Type de fenêtre	Rapport d'amplitude entre lobe principal et lobe secondaire λ	Largeur du lobe principal $\Delta\Omega_m$	Atténuation minimale en bande atténuée ΔA
Rectangulaire	$-13dB$	$4\pi/N$	-21dB
Bartlett	$-25dB$	$8\pi/N$	-25dB
Hanning	$-31dB$	$8\pi/N$	-44dB
Hamming	$-41dB$	$8\pi/N$	-53dB
Blackman	$-57dB$	$12\pi/N$	-74dB

Tab.: Caractéristiques des principales fenêtres

Choix de la fenêtre

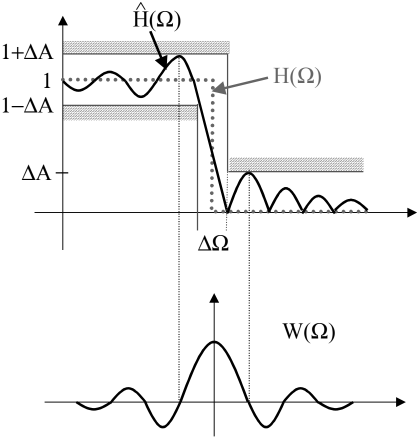
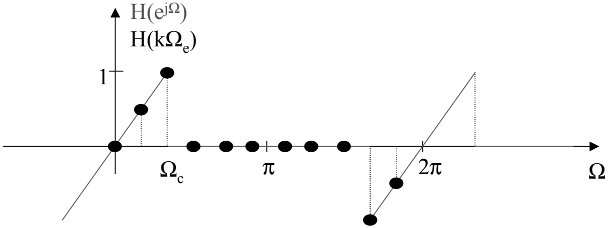


Fig.: Illustration de l'effet du fenêtrage sur le filtre idéal

Synthèse par échantillonnage fréquentiel

Echantillonnage en fréquence du filtre idéal $H(e^{j\Omega})$:

$$\hat{H}(e^{jk\Omega_e}) \triangleq H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\frac{2k\pi}{N}=k.\Omega_e}$$



TFD inverse :

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{H}(e^{jk\Omega_e})e^{2j\pi\frac{n.k}{N}},\ n = 0, 1 \ldots N-1$$

Synthèse par approximation optimale de filtres idéaux

La synthèse par fenêtrage rectangulaire équivaut à minimiser l'erreur quadratique moyenne pour une valeur donnée de N :

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

avec

$$h_d(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \ et \ n \geq N \end{cases}$$

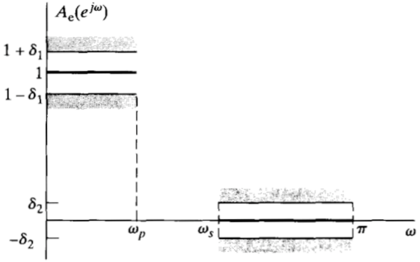
mais il existe des imperfections dues aux discontinuités du filtre idéal.

Approximation de filtres RIF à phase linéaire (type I)

Réponse fréquentielle d'un filtre à phase linéaire ($h(n)$ symétrique, N impair) :

$$A_e(e^{j\Omega}) = h_e(0) + \sum_{n=1}^{L} 2.h_e(n).\cos(n\Omega)$$

$$L = \frac{N-1}{2}, h_e(0) = h(\frac{N-1}{2}), h_e(n) = h(\frac{N-1}{2} - n)$$



Technique de Parks-McClellan [PM73]

Reformulation de la synthèse de filtres sous la forme d'une approximation polynomiale :

$$A_e(e^{j\Omega}) = P(x)|_{x=\cos\Omega}$$

avec $P(x)$ un polynôme d'ordre L tel que :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{L} a_k . x^k$$

Ω_p et Ω_s sont fixés, tandis que δ_1 et δ_2 peuvent varier.

Technique de Parks-McClellan

Fonction d'erreur d'approximation :

$$E(\Omega) = W(\Omega)\left(H_d(e^{j\Omega}) - A_e(\Omega)\right)$$

où la fonction de poids $W(\Omega)$ incorpore les contraintes sur les bandes. Par exemple :

$$W(\Omega) = \begin{cases} 1/K, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \\ 1, & \Omega_s \leq \Omega \leq \pi \end{cases}$$

avec $K = \delta_1/\delta_2$.

Technique de Parks-McClellan

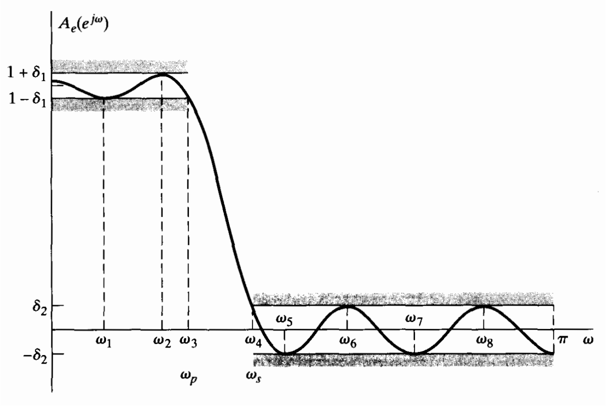
Critère minimax (ou Chebyshev) :

$$\min_{h_e(n):0\leq n\leq L}\left(\max_{\Omega\in F}|E(\Omega)|\right)$$

avec F le sous-ensemble tel que $0 \leq \Omega \leq \Omega_p$ ou $\Omega_s \leq \Omega \leq \pi$. Ensuite, la technique de Parks Mc-Clellan applique *“the famous alternation theorem”*...

Technique de Parks-McClellan

Exemple de réponse fréquentielle d'un filtre passe bas optimale au sens du théorème d'*alternation* pour $L = 7$



Pour plus de détails :[PM73],[OS99]

Technique de Parks-McClellan

$N = ?$

Etude due à [Kaiser,73] :

$$N = \frac{-10\log_{10}\delta_1\delta_2 - 13}{2.324\Delta\Omega}$$

On peut sûrement faire mieux...

Pour plus d'informations...

- T.W. Parks and J.H. McClellan.
  A unified approach to the design of optimum linear phase digital filters.
  IEEE Transactions on Circuit Theory, 20 :697–701, Nov. 1973.
- J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder.
  DSP First : a Multimedia Approach.
  Prentice Hall, 1998.
- A. V. Oppenheim and R. W. Schafer.
  Discrete-Time Signal Processing, second edition.
  Prentice-Hall, 1999.
- J. Proakis and D. Manolakis.
  Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications.
  Prentice Hall, 1996.