Université de Rennes 1 — Année 2008-2009
UFR Mathématiques
MIEE L1, Module AN1

Feuille d'exercices 7

Intégration

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

$(a)\quad y' = 2\sqrt{x};\quad y(2) = 7$ $\qquad (b)\quad y' = 1 + x;\quad y(0) = 0$

$(c)\quad y' = ((x+1)^2 + 1)^2;\quad y(-1) = 5$ $\qquad (d)\quad y' = \sin(x);\quad y(0) = 0$

$(e)\quad y' = \dfrac{1}{x^2+1};\quad y(1) = 4$

Champs de directions

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Pour chacune des équations différentielles suivantes, dessiner une esquisse du champ de directions dans la région $[-3{,}3] \times [0{,}3]$. Pour ceci, on pourra calculer la pente $y'(x,y)$ pour $x,y \in \mathbb{Z}$. Dessiner approximativement le graphe de la solution satisfaisant la condition initiale donnée.

$(a)\quad y' = 0{,}2 \cdot \sqrt{x+5};\quad y(2) = 2{,}5$ $\qquad (b)\quad y' = 1 + x;\quad y(0) = 1$

$(c)\quad y' = 0{,}1 \cdot ((x+1)^2 + 1)^2;\quad y(-1) = 1$ $\qquad (d)\quad y' = \sin(x);\quad y(0) = 0$

$(e)\quad y' = \dfrac{1}{x^2+1};\quad y(1) = 1$ $\qquad (f)\quad y' = x - y;\quad y(-1) = 2$

Résoudre ensuite chacune des équations différentielles et valider le graphe obtenu.

Equations sans second membre

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données. Spécifier le domaine de définition des solutions.

$(a)\quad y' = 4y;\quad y(1) = 42$ $\qquad (b)\quad 3y' = -y;\quad y(0) = 1$

$(c)\quad y' = \dfrac{y}{x};\quad y(0{,}1) = 0{,}1$ $\qquad (d)\quad y' = \dfrac{y}{x};\quad y(-1) = 0{,}75$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

$$(a)\quad y' + y\sin x = 0 \qquad (b)\quad y' - \frac{y}{\tan x} = 0$$

Avec second membre

Exercice 5 En précisant sur quel intervalle, résoudre les équations différentielles

$(a)\quad y' - y = e^x - 1 \qquad\qquad (b)\quad y' - \dfrac{1}{\tan x}y = \sin^2 x$

$(c)\quad y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad\qquad (d)\quad (x^2-1)y' + xy = 1$

$(e)\quad y' + y\tan x = \dfrac{x}{\cos x}$

Exercice 6 Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \geq m$. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{m}{x}y = e^x x^n$$

Recollement

Exercice 7 Résoudre l'équation différentielle $(1+x^3)y' + x^2y = x^2$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Existe t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8 Résoudre l'équation différentielle $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

Existe t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Plus difficile

Exercice 9 On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$.

1) Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2) A l'aide du changement de fonction $y = x^3u$ déterminer les solutions de (E) sur tout intervalle I ne contenant pas 0.
3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Soit l'équation différentielle

$$(E) : \quad x(x+1)y' + y = \arctan x$$

1) Résoudre E sur $]-1,0[$. On pourra utiliser l'égalité $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$.
2) Résoudre E sur $\mathbb{R}$.

Applications pratiques

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Sur chaque ligne du tableau suivant, on donne quatre nombres qui représentent la taille d'une population bactérielle $N(t)$, mesurée aux temps t_0, t_0+1, t_0+2, t_0+3 en heures (c'est à dire qu'on prend 3 mesures espacées d'une heure à chaque fois). Dans certains cas, la population augmente exponentiellement, dans d'autres cas, où un antibiotique a été rajouté, elle diminue exponentiellement, et dans certains cas on observe juste une migration de la popultation, ce qui se traduit par une fonction affine.

Dans chaque cas, décider de quel type de comportement il s'agit, donner l'équation différentielle satisfaite par la population, et prédire la taille de la population trois heures après la dernière mesure.

(a)	4129, 4501, 406 et 5347	(b)	4129, 4831, 5652 et 6613
(c)	4129, 4501, 4872 et 5244	(d)	4129, 4061, 3992 et 3924
(e)	4129, 4061, 3994 et 3928	(f)	4129, 2890, 2023 et 1416

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ On désigne par $N(t)$ la masse d'un échantillon radioactif à l'instant t. On admet que la fonction $t \mapsto N(t)$ est proportionnelle à une fonction exponentielle.

En mesurant la radioactivité de l'échantillon, on remarque qu'après dix ans il ne reste que 30% de de la substance rayonnante originale.

Quelle est la demi-vie de la substance ?

Donner l'équation différentielle vérifiée par $t \mapsto N(t)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ On désigne par $N(t)$ le nombre de particules de ${}^{14}C$ d'un vestige archéologique à l'instant t. On admet que la fonction $t \mapsto N(t)$ est proportionnelle à une fonction exponentielle.

On trouve que, par rapport au taux probable au moment où le vestige a été façonné, il ne reste que 4% du ${}^{14}C$. Sachant que le ${}^{14}C$ a une demi-vie de 5580 ans.

Calculer l'âge de l'objet.

Donner l'équation différentielle vérifiée par $t \mapsto N(t)$.

Equations différentielles linéaires du second ordre

Sans second membre

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$
(b) $y'' - 8y' + 12y = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$
(d) $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(e) $y'' - 9y' = 0$; $y(0) = 6,\ y'(0) = 4$
(f) $y'' + 9y = 0$; $y(0) = y_0,\ y'(0) = k$
(g) $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Avec second membre polynômial

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 3$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$
(b) $y''(x) - 8y'(x) + 12y(x) = 2x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(c) $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 1$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$
(d) $y'' + 2y' + y = x^2 - x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(e) $y'' - y' = -x$; $y(0) = 6,\ y'(0) = 4$

Avec second membre exponentiel

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + y = e^{2x}$
(b) $y'' + y' + y = e^{3x}$
(c) $y'' + 5y' = e^{-5x}$
(d) $y'' - 4y = e^{\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + y = \cos(2x)$
(b) $y'' + 3y' + y = \sin x$

Avec second membre du type $e^{\alpha x} P(x)$

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$
(b) $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{-x}$
(c) $y'' - 2y' + y = xe^{x}$

$\boxed{\textbf{Exercice 19}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $y' - 2y' + y = x \cos x$
(b) $y'' + y = x \sin x$
(c) $y'' - 2y = xe^{2x} \sin x$

Superposition des solutions

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' - 4y' + y = x + e^{2x}$
(b) $y'' - 2y' + 10y = \sin(3x) + e^{x}$
(c) $y'' - 10y' + 25y = \operatorname{ch}(5x)$
(c) $y'' + y = 2x \cos x \cos(2x)$

Autre

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - y' - e^{2x} y = e^{3x}$.
On pourra poser $z(u) = y(x)$, avec $x = \ln u$.