

Feuille d'exercices 6

Nombres complexes

Forme algébrique, forme exponentielle

Exercice 1 Donnez la forme algébrique des complexes suivants

$$(a) \quad z_1 = (2 + i)^4 \quad (b) \quad z_2 = (1 + i)^5 \quad (c) \quad z_3 = \frac{4 - 3i}{2 - i} - \frac{1 - i}{-2 - i}$$

Exercice 2 Pour tout complexe z , on pose

$$P(z) = z^3 + (-4 + i)z^2 + (13 - 4i)z + 13i$$

Écrivez la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2 - 3i)$.

Exercice 3 Donnez la forme exponentielle de

$$\begin{array}{lll} (a) \quad z = 1 - i\sqrt{3} & (b) \quad z = -\sqrt{3} + i & (c) \quad z = -4 + 4i \\ (d) \quad z = -2 & (e) \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & (f) \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (g) \quad z = 5i & (h) \quad z = \frac{2}{1-i} & \end{array}$$

Exercice 4 Donnez la forme exponentielle de chaque complexe proposé.

$$(a) \quad z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad (b) \quad z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 5 En utilisant le fait qu'un argument d'un quotient est une différence d'arguments, puis qu'un argument d'un produit est une somme d'arguments, donnez un argument du nombre

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i} \right)^{12}$$

Exercice 6 Sachant que $e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 Simplifiez l'écriture du complexe

$$\frac{1 - \cos(x) - i \sin(x)}{1 + \cos(x) + i \sin(x)}$$

après avoir précisé pour quelles valeurs de x ce nombre existe.
Quelle est sa forme exponentielle ?

Exercice 8 Calculez les deux complexes :

$$(a) \quad z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad (b) \quad z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$$

Indication : Une bonne remarque avant de commencer le calcul permettra de le simplifier.

Linéarisation

Exercice 9 Linéariser $\cos^5 x$.

En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^5 x$.

Exercice 10 Linéariser $\cos^2(3x) \sin^2(5x)$.

En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^2(3x) \sin^2(5x)$.

Exercice 11 Linéariser $\cos^2 x \sin^4 x$.

En déduire les primitives de $x \mapsto \cos^2 x \sin^4 x$.

Résolution d'équations

Exercice 12 Résolvez dans \mathbb{C} les équations suivantes.

$$\begin{array}{ll} (a) \quad 2iz + 5 = 3 + 2i & (b) \quad 1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i) \\ (c) \quad (z + i)(z - 5) = z^2 - i & (d) \quad (z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2 \\ (e) \quad z^2 = -1 & (f) \quad z^2 + 9 = 0 \\ (g) \quad z^4 + 2z^2 = 0 & \end{array}$$

Exercice 13 Résolvez dans \mathbb{C}

$$(a) \quad 2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad (b) \quad z^2 - 5z + 9 = 0 \quad (c) \quad z^4 + z^2 - 20 = 0$$

Exercice 14 Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Exercice 15 Déterminer les racines carrées de $1 + 3i$ et $1 + 4\sqrt{5}i$.

Exercice 16

- 1) Déterminer les racines 3-ièmes de $1 + i$ et $-i$.
- 2) Déterminer les racines 4-ième de $2i$.
- 3) Déterminer les racines 6-ième de $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

Exercice 17

- (a) Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - 1 = 0$.
- (b) Développez le produit $(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
- (c) Quelles sont les solutions dans \mathbb{C} , de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$?

Exercice 18

Résoudre dans \mathbb{C} les équations

- 1) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
- 2) $z^6 + z^3 + 1 = 0$
- 3) $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$

Exercice 19

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-3 + 5i)z + 6 + 2i = 0$$

Indication : chercher d'abord une solution réelle.

Exercice 20

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(z - 2)^n + (z + 2)^n = 0$$

Exercice 21

Résolvez dans \mathbb{C}

$$(a) \quad z = 2\bar{z} - 2 + 6i \quad (b) \quad 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

Exercice 22

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que, si z_0 est racine de P , alors son conjugué \bar{z}_0 est aussi racine de P .

Exercice 23

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

- (a) Montrez que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\bar{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.
- (b) Calculez $P(1 + i)$. Déduisez alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
- (c) Écrivez $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Nombres complexes et géométrie

Exercice 24 Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives 1 et $3 + 2i$. Représentez l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$.

Exercice 25 Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M , d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\operatorname{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (d) $|z| = 2$ et $\operatorname{Im}(z) = 1$

Exercice 26 Quel est l'ensemble des complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ?

Exercice 27 Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

(a) $|z - 3| = |z - (1 + i)|$ (b) $|z + 1 + i| = |z - 2 + 3i|$
(c) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ (d) $|z + 3 - i| \leq 2$
(e) $|z + 3 - i| > |z|$ (f) $|z| < |z + 3 - i| < 2$

Exercice 28 Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$. Déterminer les complexes z tels que :

- 1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
- 2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
- 3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 29 Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?

Exercice 30 Construisez dans le plan complexe

- (a) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Im}(z^2) = 1$.
- (b) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Re}(z^2) = 0$.
- (c) l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $3 \cdot \operatorname{Re}(z^2) = 4 \cdot \operatorname{Im}(z^2) = 1$. On utilisera l'identité $(a - 3b)(b + 3a) = 3a^2 - 8ab - 3b^2$.
- (d) Déterminez les points communs à E_1 et E_2 , puis à E_1 et E_3 .