

Feuille d'exercices 5

Intégrale et aire

Exercice 1 Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

$$(a) \int_{-3}^2 (3x - 2) dx \quad (b) \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \quad (c) \int_{-1}^3 |x - 2| dx$$
$$(d) \int_{-4}^3 (|x - 2| - |x + 2|) dx$$

Exercice 2 Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

$$(e) \int_{-2}^2 \operatorname{sh}(x) dx \quad (f) \int_0^\pi \sin(2x) dx$$

Tableau de primitives

Exercice 3 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$(a) \int (3x^2 + 4x - 2) dx \quad (b) \int \sqrt{3x - 1} dx \quad (c) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$
$$(d) \int \frac{1}{\sqrt{2x + 3}} dx \quad (e) \int e^{2x+3} dx \quad (f) \int 2^{-x} dx$$

Linéarité de l'intégrale

Exercice 4 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$(a) \int (x^3 - 2)^2 dx \quad (b) \int (\sqrt{x} + x^2)^3 dx \quad (c) \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx$$
$$(d) \int \operatorname{ch}(3x) dx \quad (e) \int \sin(x) \cos(x) dx \quad (f) \int \cos^2(x) dx$$
$$(g) \int \sin(2x) \sin(5x) dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 5

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f . Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x dx.$$

- (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
 (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.

Exercice 6 Déterminer la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{(x^2)} dx$$

Intégrales impropres

Si f est continue sur $[a, +\infty[$, et que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x) dx = L$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut L .

Exercice 7 Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ est convergente.

Exercice 8 Calculer les intégrales impropres suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} dx & (b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ (c) \int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}} dx & (d) \int_0^{+\infty} e^{2-3x} dx \end{array}$$

Exercice 9 Déterminer si les limites suivantes sont finies ou infinies :

$$(a) \lim_{X \rightarrow 2^+} \int_X^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx \quad (b) \lim_{X \rightarrow -1^+} \int_{-1}^3 \frac{1}{x+1} dx \quad (c) \lim_{X \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

Intégrations par parties

Exercice 10 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes.

$$\begin{array}{lll} (a) \int x \cdot \operatorname{sh}(x) dx & (b) \int x^2 \cdot e^x dx & (c) \int x^2 \cdot \operatorname{ch}(3x) dx \\ (d) \int x \cdot (\ln(x))^2 dx & (e) \int x^2 \cdot \cos(x) dx & (f) \int x \cdot \arctan(x) dx \\ (g) \int x \cdot \cos^2(x) dx & (h) \int \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) dx & (i) \int (x+1) \cdot e^x \cdot \ln(x) dx \\ (j) \int \arccos(x) dx & & \end{array}$$

Exercice 11 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, déterminer les primitives

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx$$

Exercice 12 Soit

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n . Puis calculer $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 dx$.

Exercice 13 Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) dx$.

Exercice 14 Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx.$$

dans le cas où $n = 3$.

Exercice 15 Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On admet que l'intégrale converge.

- 1) Etablir que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
- 2) Calculer $\Gamma(4)$. Calculer $\Gamma(n + 1)$ pour un entier naturel n .
- 3) Sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, déterminer les valeurs de $\Gamma(\frac{3}{2})$ et de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

Changements de variables

Exercice 16 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int 3x^2(x^3 + 4)^{20} dx & (b) \int x(x^2 - 6)^{\frac{4}{3}} dx & (c) \int (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^3 + 3x - 2} dx \\
 (d) \int \frac{x^2}{2x^3 + 5} dx & (e) \int \frac{x^2}{4 + x^6} dx & (f) \int \cos(x) \sin^7(x) dx \\
 (g) \int \tan^5(x) \sec^2(x) dx & (h) \int x^2 \cos(2x^3) dx & (i) \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \\
 (j) \int x \cdot \exp(x^2 - 2) dx & (k) \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx & (l) \int 2 \sin(x) \cos(x) e^{\cos(2x)} dx \\
 (m) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} dx & (n) \int \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} dx &
 \end{array}$$

Exercice 17 A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

$$\begin{array}{ll}
 (a) \int_0^1 x^2 \exp(x^3) dx & (b) \int_0^1 x^4 \cdot (x^5 - 1)^6 dx \\
 (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx & (d) \int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1 + e^x} dx
 \end{array}$$

Exercice 18 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$$\begin{array}{ll}
 (a) \int \sqrt{2 - x^2} dx & (b) \int \sqrt{1 + 2x - x^2} dx \\
 (c) \int \sqrt{x^2 - 4} dx & (d) \int \sqrt{x^2 + 4x - 5} dx \\
 (e) \int \sqrt{2x^2 + 32} dx & (f) \int \sqrt{2x^2 - 4x + 4} dx
 \end{array}$$

Exercice 19 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 4x}} dx & (b) \int \frac{1}{(3 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx & (c) \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\
 (d) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - 9x^2}} dx & (e) \int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} dx & (f) \int \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} dx \\
 (g) \int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx & (h) \int \sqrt{4x^2 - 8x + 24} dx &
 \end{array}$$

Exercice 20 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes :

$$(a) \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2 + \sin(x) + \sin^2(x)}} dx \quad (b) \int \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}} dx$$

Exercice 21 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{lll} (a) \frac{7}{x^2 - 5x - 6} & (b) \frac{3x - 11}{x^2 - 5x + 6} & (c) \frac{3}{x^2 + 4x + 13} \\ (d) \frac{2x + 3}{x^2 + 6x + 10} & (e) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 5} & (f) \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 + 6x + 13} \\ (g) \frac{3x - 1}{x^2 + 4x + 4} & (h) \frac{5x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} & (i) \frac{2x^2 - 11}{x^2 + 6x + 9} \\ (j) \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 3x - 5} & (k) \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^3 + x^2 + 3x - 5} & (l) \frac{25x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} \\ (m) \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} & (n) \frac{x^2 + 3x - 2}{(x^2 - 4x + 5)^2} & \end{array}$$

Exercice 22 En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes, calculer les primitives suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$(a) \int \frac{1}{5 + 3 \cos(x)} dx \quad (b) \int \frac{1}{\cos(x) + \sin(x) + 2} dx$$

Exercice 23 Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + 3 \cos(x) - \sin(x)} dx$$