

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Tracez le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par la formule suivante, en utilisant une calculatrice ou Maple :

$$\frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6}$$

Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \rightarrow \pm\infty$. Vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites.

Exercice 2 Tracez les graphes des fonctions données par les formules suivantes, en utilisant une calculatrice ou Maple. Décrivez les comportements limites que vous observez près des asymptotes verticales, et pour $x \rightarrow \pm\infty$. Comme dans l'exercice précédent, vous devrez éventuellement employer plusieurs graphiques afin d'observer ces limites.

- | | |
|---|--|
| (a) $x^4 + 2x^2 - 3x + 1,$ | (b) $3 + 2x^2 - x^5,$ |
| (c) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 6x + 8},$ | (d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}},$ |
| (e) $\sqrt{x^2 + 4},$ | (f) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}},$ |
| (g) $\frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 4x + 5},$ | (h) $\frac{3x^2 + 4x + 5}{x^2 - x - 2},$ |
| (i) $\frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 5},$ | (j) $\frac{2x - 5}{x^2 - 2x + 3},$ |
| (k) $\frac{2x - 5}{x^2 - 2x - 8},$ | (l) $\frac{1}{(\sin(x) + \cos(x))^2},$ |
| (m) $\frac{\exp(2x)}{x^2},$ | (n) $\frac{1}{\exp(3x) - \exp(2x)},$ |
| (o) $\ln((x^2 - 4)^2),$ | (p) $\frac{\ln((x^2 - 4)^2)}{x},$ |
| (q) $\ln\left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),$ | (r) $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),$ |
| (s) $\arctan(x),$ | (t) $\operatorname{argth}(x).$ |

Exercice 3 Soit la fonction f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{|x+k|}{x^2 - k^2} \quad (k \neq 0)$$

Quel est son domaine? Esquissez le graphe de f montrant les discontinuités. Utilisez le graphe pour trouver les valeurs des limites à gauche et à droite en chacune des discontinuités, et justifiez ensuite ces limites.

Exercice 4 Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\begin{array}{ll} (a) \exp\left(\frac{1}{x}\right), & x = 0 \\ (b) \sqrt{\text{Ent}(\sqrt{x})}, & x = 9 \\ (c) \exp\left(\frac{|x|}{x}\right), & x = 0 \\ (d) \frac{|\sin(x)|}{\sin(x)}, & x = \pi \\ (e) \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, & x = 1 \\ (f) \frac{\tan(x)}{|x|}, & x = 0 \end{array}$$

Exercice 5 Trouvez les limites suivantes, en utilisant les règles algébriques appropriées.

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 4}{\cos(2x)}, & (b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2x - 3}{1 + \sin(x)}, \\ (c) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 2x + 3}, & (d) \lim_{x \rightarrow -2} (x - 1)(x - 2)(x + 3), \\ (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2}{x - 2}, & (f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 3}, \\ (g) \lim_{x \rightarrow 1} |2 - x - 3x^2| \cos(\pi x), & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x + 2) \sin(x), \\ (i) \lim_{x \rightarrow 1} \cosh(1 - x) \sin(\pi x), & (j) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sqrt{(\exp(x) + 3x - \ln(x)) \sin(x)}. \end{array}$$

Exercice 6 Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right), & (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) \cos(x), \\ (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) \sin(x^2 + 1), & (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \text{th}(x)) \cos(x), \\ (e) \lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| \cos\left(\frac{1}{x - 1}\right), & (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(\sin(x) - x). \end{array}$$

Exercice 7 Soit f une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes A et B telles que $A \leq f(x) \leq B$ pour tout x dans le domaine de f .

Montrer par encadrement (théorème des gendarmes) que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin(x) = 0$.

Exercice 8

Décrivez les comportements limites près des asymptotes verticales de

$$x \mapsto \frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-1)(x+2)^2}$$

Exercice 9

Évaluez les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques.

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4},$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1},$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1},$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(x) - 1},$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right),$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1},$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{5 + x} - 2},$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x^2} - \sqrt{1 + 2x^2}}{x^2},$ |
| (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x^4 - 3x^3 + x},$ | (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - x - 1},$ |
| (k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{2x + 3},$ | (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1 - x^2},$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{x - 4},$ | (n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ 2x - 5 }{3x + 1},$ |
| (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + \cos^2(x)}{2x^2 - \sin^2(2x)},$ | (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x) - \sin(x) + 1}{2 \exp(x) + \cos(x) - 3}.$ |

Exercice 10

Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes.

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x)}{\exp(x) - 1},$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)},$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})},$ | (d) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2(x) - 1}{\ln(x) - 1},$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin(x)},$ | (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}.$ |

Exercice 11

Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes.

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right),$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right),$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{\cos(bx) - 1}, \quad (b \neq 0)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2} \right),$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x)}{x - \tan(x)},$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$ |

Exercice 12 Trouvez des exemples de fonctions paires f, g satisfaisant les conditions suivantes lorsque $x \rightarrow +\infty$:

1. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ et $f(x) - g(x) \rightarrow 0$;
2. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ et $f(x) - g(x) \rightarrow +\infty$;
3. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ et $f(x) - g(x) \rightarrow -\infty$;
4. $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ et $f(x) - g(x) \rightarrow 3$.

Domaine de continuité

Exercice 13 En précisant les règles que vous utilisez, donnez le domaine de continuité des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$(a) \quad |x^2 + 3x| \quad (b) \quad \frac{x}{\ln x} + \arcsin(x^2) \quad (c) \quad xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \quad \sqrt{e^x - e^{2x}} \quad (e) \quad \arctan(\sqrt{1 - x^2} - x)$$

Croissances comparées

Exercice 14 Donner la limite en $+\infty$ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad \frac{x+2}{x^2 \ln x} \quad (b) \quad \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2} \quad (c) \quad \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$$

Exercice 15 Donner la limite en 0_+ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad 2x \ln(x + \sqrt{x}) \quad (b) \quad \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Exercice 16 Donner la limite en $+\infty$ des fonctions données par les formules

$$(a) \quad \left(\frac{e^x + 1}{x + 2} \right)^{\frac{1}{x+1}} \quad (b) \quad \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$$

Asymptotes

Exercice 17 Déterminer les asymptotes en $+\infty$ (et $-\infty$ le cas échéant) aux graphes des fonctions données par les formules

$$(a) \quad |x^2 + 3x| \quad (b) \quad \frac{x}{\ln x} \quad (c) \quad xe^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \quad \sqrt{e^x - e^{2x}} \quad (e) \quad \arctan(\sqrt{1 - x^2} - x) \quad (f) \quad \ln(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} x + 1)$$