

Feuille d'exercices 7

**Exercice 1** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = 2\sqrt{x}; \quad y(2) = 7 \\ (b) & y' = 1 + x; \quad y(0) = 0 \\ (c) & y' = ((x + 1)^2 + 1)^2; \quad y(-1) = 5 \\ (d) & y' = \sin(x); \quad y(0) = 0 \\ (e) & y' = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad y(1) = 4 \end{array}$$

**Exercice 2** Pour chacune des équations différentielles suivantes, dessiner une esquisse du champ de directions dans la région  $[-3, 3] \times [0, 3]$ . Pour ceci, on pourra calculer la pente  $y'(x, y)$  pour  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Dessiner approximativement le graphe de la solution satisfaisant la condition initiale donnée.

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = 0,2 \cdot \sqrt{x + 5}; \quad y(2) = 2,5 \\ (b) & y' = 1 + x; \quad y(0) = 1 \\ (c) & y' = 0,1 \cdot ((x + 1)^2 + 1)^2; \quad y(-1) = 1 \\ (d) & y' = \sin(x); \quad y(0) = 0 \\ (e) & y' = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad y(1) = 1 \\ & (e) \quad y' = x - y; \quad y(-1) = 2 \end{array}$$

**Exercice 3** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données. Spécifier le domaine de définition des solutions.

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = 4y; \quad y(1) = 42 \\ (b) & \frac{3y'}{y} = -1; \quad y(0) = 1 \\ (c) & \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}; \quad y(0,1) = 0,1 \\ (d) & y' = \frac{y}{x}; \quad y(-1) = 0,75 \end{array}$$

**Exercice 4** Dans les exercices suivants, les quatre nombres représentent la taille d'une population bactérielle, mesurée pendant 3 heures, en intervalles d'une heure. Dans certains cas, la population augmentait exponentiellement, dans d'autres cas, où un antibiotique avait été rajouté, elle diminue exponentiellement, et dans certains cas on observe juste une migration de la population, ce qui se traduit par une fonction linéaire. Dans chaque exercice, décider de quel type de comportement il s'agit, et prédire la taille de la population trois heures après la dernière mesure.

$$\begin{array}{ll} (a) & 4129, 4501, 4906 \text{ et } 5347 \\ (b) & 4129, 4831, 5652 \text{ et } 6613 \\ (c) & 4129, 4501, 4872 \text{ et } 5244 \\ (d) & 4129, 4061, 3992 \text{ et } 3924 \\ (e) & 4129, 4061, 3994 \text{ et } 3928 \\ (f) & 4129, 2890, 2023 \text{ et } 1416 \end{array}$$

**Exercice 5** En mesurant la radioactivité d'un échantillon, on remarque qu'après dix ans il ne reste que 30% de de la substance rayonnante originale. Quelle est la demi-vie de la substance ?

**Exercice 6** Un archéologue trouve un objet et mesure sont taux de carbone  $^{14}\text{C}$ . Il trouve que, par rapport au taux probable au moment où l'objet a été façonné, il ne reste que 4% du  $^{14}\text{C}$ . Sachant que le  $^{14}\text{C}$  a une demi-vie de 5580 ans, calculer l'âge de l'objet.