

Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
MIEE L1, Module AN1

Année 2008-2009

Nom :
Note :

Contrôle Long du 9/12/2008.
Durée 60 min.

Exercice 1 Trouver la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^{12} - 1) \sin x}{1 - \cos x}.$$

Exercice 2 Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0.$$

Exercice 3

1. Trouver une primitive G de la fonction $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^9 \cdot \ln(x)$.
2. Calculer la limite

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 g(t) dt.$$

Exercice 4 Soit $z = (1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3})i \in \mathbb{C}$.

- (1) Quel est le module de z ?
- (2) Calculer z^2 sous forme algébrique.
- (3) Calculer z^3 et montrer que $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$.
- (4) Quel est l'argument $\vartheta \in [0, 2\pi[$ de z ?
- (5) Donner les formes exponentielles de z et de $\frac{z}{|z|}$.
- (6) En déduire la valeur exacte de $\cos(17\pi/12)$.

Exercice 5

1. Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$y'' + 4y' + 5y = 0. \quad (1)$$

2. Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$y'' + 4y' + 5y = 1. \quad (2)$$

3. Pour chaque solution $y(t)$ de l'équation (2) déterminer, en justifiant le résultat, la

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t).$$