

Feuille d'exercices 4

Inégalités

Exercice 1 Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

Exercice 2 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq e^x - 1 \leq xe^x$$
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x$$

Convexité

Etudier la convexité et déterminer les points d'inflexion éventuels des fonctions données par les formules :

$$f(x) = |x^2 - 2x|^{\frac{1}{2}}$$
$$g(x) = x^\alpha \ln x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$h(x) = \frac{x}{\ln x}$$
$$i(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$$

Etude complète de fonction

Exercice 3 Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

$$f(x) = |x^2 - 2x|^{\frac{1}{2}}$$
$$g(x) = \tan x + \cos x$$
$$h(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$$

Exercice 4 Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

$$f(x) = x^\alpha \ln x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Exercice 5 Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

$$f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$$

$$g(x) = x - \operatorname{th} x \ln(\operatorname{ch} x)$$

$$h(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 6 Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$g(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

Exercice 7 Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

On n'hésitera pas à étudier une (ou plusieurs !) fonctions auxiliaires pour étudier le signe de la dérivée.