Feuille d'exercices # 3
Lois de variables aléatoires

Exercice 1 Mesurabilité et tribu triviale
Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 2 Limsup et liminf, le retour
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de va. réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$

1. Comparer les ensembles $\{\limsup_n X_n > 1\}$, $\limsup_n \{X_n > 1\}$, $\{\limsup_n X_n \geq 1\}$ et $\limsup_n \{X_n \geq 1\}$.
2. Comparer les ensembles $\{\liminf_n X_n > 1\}$, $\liminf_n \{X_n > 1\}$, $\{\liminf_n X_n \geq 1\}$ et $\liminf_n \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 3 Copies ordonnées
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\mathbb{P}(Y \leq t < X) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.
2. On suppose maintenant que X et Y ont même loi. Montrer que si $X \leq Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

Exercice 4 Egalité p.s. et en loi
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
(i) $\{X \neq Y\}$ est-il un événement ? Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$|\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

(ii) On suppose que X et Y sont presque sûrement égales. Montrer qu'elles ont la même loi.

Exercice 5 Fonctions et fonctions de répartition
Soit l' espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que les applications suivantes sont des variables aléatoires et calculer leur fonction de répartition :

1. $X_1(\omega) = 2\omega$ et $X_2(\omega) = 2 - 2\omega$.
2. $Y(\omega) = \omega^2$.
3. $Z_1 = X_1 + X_2$, $Z_2 = X_1 + Y$ et $Z_3 = X_1 \wedge 1$.
4. $W(\omega) = [10\omega]$ et $T(\omega) = [1/\omega]$ ($[\cdot]$ désigne la partie entière).
5. $V(\omega) = \cos^2(2\pi\omega)$. V possède-t-elle une densité ?

Exercice 6 Pesked ha farz

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{2}\frac{2^k}{k!} + a\,\frac{3^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Trouver la loi de la variable aléatoire

$$Z := \begin{cases} {}^{Y}\!/_{2}, & \text{si } Y \text{ est pair,} \\ {}^{1-Y}\!/_{2}, & \text{si } Y \text{ est impair.} \end{cases}$$

3. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $U = 4[{}^{T}\!/_{2}] - 2T + 1$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver la loi de U.

Exercice 7 Une fonction de répartition

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F_X(t) = \left(1 + e^{-t}\right)^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. La variable X admet-elle une densité f_X ? Si oui, explicitez cette densité.
3. On définit de nouvelles variables en posant $U := e^X$, $V := \mathbb{1}_{\{0<X<\log(2)\}}$ et $W := X\mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$. Déterminer les lois des variables U, V et W.

Exercice 8 Densités et marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = c\, y \mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c. Calculer les densités marginales f_X et f_Y.
2. Mêmes questions pour $f(x, y) = c\, y(x - y) \exp(-(x + y))\mathbb{1}_{0\leq y\leq x}$.

Exercice 9 Couple de variables aléatoire

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \mapsto c\, e^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Quelle est la loi du vecteur $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$?

Exercice 10 Propriété d'absence de mémoire

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0$$

et respectivement

$$\mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > \ell), \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.

Exercice 11 Quelques transformations remarquables

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$.

2. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Déterminer la loi de la variable $Y = 1/X$.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(U)$.
4. Soit ε une variable aléatoire de loi de Rademacher i.e $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$ et X une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de ε. Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$. Généraliser.

Exercice 12 Taux de panne et loi de Weibull
Soit X variable aléatoire positive de densité f telle que $f(x) > 0$ si $x > 0$, et de fonction de répartition F. On regarde X comme la durée de vie d'un composant ; son taux de panne à l'instant $t > 0$ est défini par

$$r(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq X < t+h)}{h\mathbb{P}(t \leq X)}.$$

1. Calculer r en termes de F et f et réciproquement. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.
2. Déterminer les densités correspondant aux taux de panne constants.
3. Calculer f et F lorsque $r(t) = kt^{\alpha-1}$, $t > 0$, $k, \alpha > 0$ (loi de Weibull).

Exercice 13 Trinomiale
Soient $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}, & \text{si } i+j \leq n, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un couple (X,Y) tel que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$ et ensuite trouver les lois de X et de Y.

Exercice 14 Loi arcsinus
On jette un point D au hasard sur le cercle centré en $O' = (\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, que pour tout arc $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D \in \mathcal{A})$ est proportionnel à la longueur de $\mathcal{A}$. On note aussi le point $C = (1,0)$.

1. Calculer le coefficient de proportionnalité. On note Θ la mesure de l'angle $(\widehat{O'C, O'D})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$. Quelle est la loi de Θ ?
2. On pose $D = (X,Y)$. Trouver la loi de X (loi arcsinus).

Exercice 15 Jouer à la fléchette
Le couple aléatoire (X,Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x,y), \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1/\sqrt{2})$, $\mathbb{P}(Y \geq 1/\sqrt{2})$, puis $\mathbb{P}(X \geq 1/\sqrt{2}, Y \geq 1/\sqrt{2})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq \lambda Y)$.
3. Trouver les marginales de X et de Y.
4. Soient a, b deux réels égaux à ± 1. Montrer que (X,Y) a la même loi que (aX, bY). Montrer que (X,Y) a la même loi que (Y,X).
5. On note (R,Θ) les coordonnées polaires de (X,Y). Trouver la loi du couple (R,Θ) et ses marginales.