Feuille d'exercices # 1 et # 2

Rappels sur les tribus, classes monotones. Espaces de probabilité.

1 Rappels sur les tribus, classes monotones

Exercice 1.1 *Tribus images*
Soient X et Y des ensembles et f une application de X dans Y.

1. Montrer que si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Y, $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G),\ G \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X.
2. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu sur X, $\mathcal{G} := \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y.
3. Montrer que pour toute partie $\mathcal{C} \subset Y$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 1.2 *Classes monotones et tribus*

1. Une union de tribus est-elle une tribu ? Une union croissante de tribus est-elle une tribu ? Si non, donner un/des contre-exemples.
2. Montrer qu'une classe monotone $\mathcal{M}$ est une tribu si et seulement si c'est un $\pi-$système, i.e. ssi $\mathcal{M}$ est stable par intersection.

Exercice 1.3 *Cardinal d'une tribu*
Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit I'atome de la tribu $\mathcal{E}$ engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E},\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{E}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.

Exercice 1.4 *Tribu engendrée*
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A, B, C\})$ où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \emptyset$.

Exercice 1.5 *Anticipation sur la notion d'indépendance*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Plus généralement, on dit que deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ d'événements sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{G}$ et $B \in \mathcal{H}$, A et B sont indépendants.

1. Soit $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles stable par intersection finie et indépendante d'une tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, montrer que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ est encore indépendante de la tribu $\mathcal{G}$.
2. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des familles d'événements stables par intersection. Montrer que les deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont indépendantes si et seulement si les tribus $\sigma(\mathcal{G})$ et $\sigma(\mathcal{H})$ qu'elles engendrent sont indépendantes.

3. Montrer par un exemple que l'hypothèse de stabilité par intersection est nécessaire.

Exercice 1.6 *Version fonctionnelle du lemme de classes monotones*
Soit H un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble Ω et soit $\mathcal{E}$ un $\pi-$système contenant Ω. On suppose que

1. $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{1}_A \in H$,
2. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives de H convergeant vers une fonction f bornée, alors $f \in H$.

Montrer que H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{E})-$mesurables.

2 Espaces de probabilité

Exercice 2.1 *Formule du crible*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Montrer que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille d'évènements, alors

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) = \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_3)-\mathbb{P}(A_2\cap A_3)+\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3),$$

et plus généralement

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} (-1)^{\#I-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right).$$

Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j) - \sum_{1\leq j<k\leq n}\mathbb{P}(A_j\cap A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j).$$

Exercice 2.2 *Convergence monotone pour les probabilités*
Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A\cap B = \emptyset$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité, i.e. elle est $\sigma-$additive.
2. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$
3. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$
4. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 2.3 *Limites inférieure et supérieure*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et on note

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

1. Montrer que $\omega \in \liminf_n A_n$ ssi à partir d'un certain rang, ω est dans tous les A_n.
2. Montrer que $\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$.
4. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors elle est convergente et préciser la limite.
5. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a alors la propriété de continuité de la mesure $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 2.4 *Limites inférieure et supérieure, suite*
Décrire les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ dans les cas suivantes

1. $A_n =]-\infty, n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
2. $A_n =]-\infty, -n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
3. $A_n =]-\infty, (-1)^n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
4. $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$ avec $A, B \in \mathcal{F}$.

Exercice 2.5 *Premier lemme de Borel–Cantelli*
On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements qui est telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 2.6 *Presque sûr*
On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est presque sûr si A est presque surement égal à Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$ avec N un ensemble négligeable, i.e. il existe $B \in \mathcal{F}$ avec $N \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit K un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_k)_{k\in K}$ une famille d'évènements presque sûrs. Montrer que $\bigcap_{k\in K} A_k$ est presque sûr.

Exercice 2.7 *Tribu complétée*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\overline{\mathcal{F}} := \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{tels que } \ A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu et plus précisément $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles $\mathbb{P}-$négligeables, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$.
2. On définit une nouvelle mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mathbb{P}}(C) := \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\overline{\mathbb{P}}$ est bien définie, i.e. que sa valeur ne dépend par du choix des encadrants A_1 et A_2, et que $\overline{\mathbb{P}}$ est l'unique mesure sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ qui prolonge $\mathbb{P}$, i.e. qui coincide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$.
3. Montrer que pour toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\overline{\mathcal{F}}-$mesurable, il existe des fonctions $\mathcal{F}-$mesurables $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$, telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$, $\mathbb{P}-$presque sûrement.