Feuille d'exercices # 5
Indépendance

Exercice 1 *Sommes de v.a. indépendantes*
Soit les variables aléatoires indépendantes X et Y. Calculer la loi de la somme $X+Y$ lorsque :

1. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
3. $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(n,\tau^2)$.
4. $X \sim \gamma(p,\lambda)$ et $Y \sim \gamma(q,\lambda)$. Quelle est la loi de X^2+Y^2 quand $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Généraliser pour d variables.

Exercice 2 *Somme, min et max de v.a. uniformes*
Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{U}(1,2,\dots,n)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
2. Trouver la loi de $X+Y$.
3. On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $V=\max\{X,Y\}$. Trouver les lois de (U,V), U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *Premier et deuxième succès*
Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{G}(p)$, $0<p<1$. On pose $U=\min\{X,Y\}$ et $W=\max\{X,Y\}-U$. Trouver les lois de U et W et étudier leur indépendance.

Exercice 4 *Ponctualité*
Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles : les instants X et Y de leur arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément répartis dans [14,15]. Calculer la loi de la variable T durée d'attente du premier arrivé.

Exercice 5 *Triplet de v.a. i.i.d.*
Soit F une fonction de répartition de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Si X a la fonction de répartition F, montrer que X admet une densité.
2. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y)=0$ et que $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}$. Montrer que (X,Y) et (Y,X) ont la même loi.
3. Soit Z encore une variable aléatoire indépendante de (X,Y) et de même loi que X. Calculer $\mathbb{P}(X<Y<Z)$ et montrer que la valeur ne depend pas de F. Montrer que (X,Y,Z) et (Y,Z,X) ont la même loi.
4. Généraliser au cas de n variables aléatoires indépendantes de même loi.

Exercice 6 *Encore autour de min et max de v.a.i.i.d.*
Soient $X_1,\dots,X_n$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On note $U=\min_{1\le j\le n} X_j$ et $V=\max_{1\le j\le n}$.

1. Calculer les fonction de répartition de U et V à l'aide de la fonction de répartition commune des X_j.
2. Si la loi commune des X_j admet une densité, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

Exercice 7 *Renforcement*
Une urne contient b boules blanches et r rouges ; une boule étant tirée, on la remet et avec elle encore c boules de la couleur tirée. On pose $p = \frac{b}{b+r}$, $q = 1 - p$, $\gamma = \frac{c}{b+r}$. On note

$$X_n = \mathbb{1}_{\{\text{la } n\text{-ème boule tirée est blanche}\}}$$

et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Trouver les lois de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
2. Exprimer le coefficient de corrélation de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
3. Trouver la loi conditionnelle de X_n sachant $S_{n-1} = k$.
4. Exprimer la loi de X_n en fonction de p, q, γ et $\mathbb{E}(S_{n-1})$. En déduire la loi de X_n par récurrence.

Exercice 8 *Somme de v.a. uniformes*
Soit $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ indépendante de $Y \sim \mathcal{U}(0, 1, \ldots, n)$. Trouver la loi de $X + Y$ et calculer de deux façons l'espérance de $X + Y$.

Exercice 9 *Produit de deux v.a.*
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités sont

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x),\ f_Y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}.$$

Trouver la loi de XY.

Exercice 10 *Points aléatoires dans le plan*

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note $U = \cos\theta X - \sin\theta Y$ et $V = \sin\theta X + \cos\theta Y$. Trouver la loi de (U, V) et de ses marginales. U, V sont-elles indépendantes ?
2. Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\mathbb{P}i]}$ et $R > 0$ avec $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$. On note $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Trouver leurs lois et étudier leur indépendance.

Exercice 11 *Encore des fonctions caractéristiques*
Soit ε une variable aléatoire discrète prenant seulement les valeurs $\mathbb{P}m1$ et soit X une variable aléatoire à densité f. On suppose que ε et X sont indépendantes.

1. Montrer que $Y = \varepsilon X$ possède une densité et la calculer.
2. Si f est une fonction paire montrer que X et $-X$ ont même loi.
3. Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 12
Montrer que le carré et le carré du module d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.

Exercice 13 *Examen et Bienaymé-Thcebytchev*
Un examen consiste en 20 questions auxquelles il faut répeondre par oui ou par non ; chaque réponse juste est notée 1 point et chaque réponse fausse, 0 points. Un étudiant répond entièrement au hasard et sa note finale est une variable aléatoire X.

1. Soit X_j la note qu'il obtient à la j-ème question. Trouver la loi de X_j, son espérance, sa variance.
2. Exprimer X en fonction des X_j, donner sa loi, son espérance et sa variance.
3. Calculer la probabilité d'avoir une note inférieure à 5. Donner un majorant de cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thcebytchev.
4. Un étudiant sérieux estime qu'il donnera une réponse exacte à chaque question avec une probabilité de 0,8. Quelle est la loi de sa note, l'espérance et la variance. Donner une minoration pour la probabilité qu'il ait plus de 12.

Exercice 14 *Loi beta*
Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(a, 1)$, $\gamma(b, 1)$.

1. Trouver la densité du vecteur aléatoire
$$(U, V) := \left(Z_a + Z_b, \frac{Z_a}{Z_a + Z_b}\right).$$
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? (On dit que V suit une loi de $\mathrm{B}(a, b)$.)

Exercice 15 *Loi de Cauchy et loi arcsinus*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Montrer que la variable aléatoire $C = X/Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
2. Soit $V \sim \mathrm{B}(1/2, 1/2)$ une variable aléatoire de loi arcsinus. Prouver que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la variable aléatoire $1+C^2$, où C suit une loi de Cauchy de paramètre 1.

Exercice 16 *Loi Fisher-Snedecor*
Soient $X \sim \gamma(a, b)$ et $Y \sim \gamma(c, d)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. Trouver la loi de la variable aléatoire X/Y.
2. Supposons que $a = n/2$, $c = m/2$, $b = d = 1/2$. Trouver la loi de :
$$R := \frac{X/n}{Y/m}$$
(On dit que R suit une loi de Fisher-Snedecor à n et m degrés de liberté).
3. Calculer $\mathrm{E}(R)$ et $\mathrm{Var}(R)$ (discussion suivant les valeurs de n et m).

Exercice 17 *Loi Student*
Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. Trouver la loi de la variable aléatoire :

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

(On dit que T suit une loi de Student à n degrés de liberté).

2. Calculer $\mathrm{E}(T)$ et $\mathrm{Var}(T)$.

Exercice 18 *Théorème de Bernstein*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes centrées réduites, alors $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
2. Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
   (a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
   (b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y, satisfait l'égalité $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
   (c) On pose $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1+o(t^2)$, lorsque $t \downarrow 0$. En déduire que, pour tout t, $\psi(t) = 1$ et que $\varphi(t) = \varphi(t/2)^4$. Conclure.