Normes hölderiennes et support des diffusions

Gérard Ben Arous et Mihai Gradinaru

Résumé - Nous montrons dans cette note que le théorème du support de Stroock-Varadhan [S-V] est valide en norme α-hölderienne, $\alpha < \frac{1}{4}$ (cf. Théorème 2). L'outil principal est une majoration (énoncée au Théorème 1 et au Corollaire 1) de la probabilité pour qu'un mouvement brownien ait une grande norme hölderienne et une petite norme uniforme. Cette majoration est obtenue à l'aide du théorème de Ciesielski (cf. [B-R] pour d'autres utilisations de ce théorème).

Hölder norms and the support theorem for diffusions

Abstract - We show that the Stroock-Varadhan [S-V] support theorem is valid in α-Hölder norm, $\alpha < \frac{1}{4}$ (Theorem 2). The central tool is an estimate (stated in Theorem 1 and in Corollary 1) of the probability that the Brownian motion has a large Hölder norm but a small uniform norm. This estimate is obtained by using Ciesielski's theorem (see [B-R] for other applications of this theorem).

Soit x une fonction continue réelle sur $[0,1]$, nulle en 0. On définit les normes

$$\|x\|_0 = \sup_{0\le t\le 1} |x_t| \ , \ \|x\|_\alpha = \sup_{0\le s<t\le 1} (|x_t - x_s|\,|t-s|^{-\alpha}) \, , \ \alpha \in]0,1] \, . \tag{1}$$

Soit w un mouvement brownien réel et α, β deux réels tels que $0 \le \beta < \alpha < \frac{1}{2}$. On notera $a = \frac{1}{2} - \alpha$, $b = \frac{1}{2} - \beta$, $\varphi(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Théorème. 1 *Soit (r, R) un couple de réels positifs et $v = (R^b\, r^{-a})^{\frac{1}{b-a}}$. Alors il existe des constantes $p_{\alpha,\beta}$, q_α , c_β telles que*

$$P(\, \|w.\|_\alpha > R \mid \|w.\|_\beta < r\,)$$

$$\le (\int_0^{p_{\alpha,\beta}\, v} \varphi(t)\, dt)^{-1} \left((p_{\alpha,\beta}\, v)^{-1} \varphi(p_{\alpha,\beta}\, v) + q_\alpha\, R^{-\frac{1}{a}} \int_{p_{\alpha,\beta}\, v}^{\infty} \varphi(t)\, t^{\frac{1}{a}-2}\, dt \right) \exp(c_\beta\, r^{-\frac{2}{1-2\beta}}) \, . \tag{2}$$

Preuve. D'abord on prouve une majoration pour la norme $\|x\|'_\alpha = \sup_{m\ge1} |m^{\alpha-\frac{1}{2}} \xi_m(x)|$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, où $\xi_{2^n+k}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \left(2\,x(\frac{2k-1}{2^{n+1}}) - x(\frac{k}{2^n}) - x(\frac{k-1}{2^n}) \right)$, $n \ge 0$, $k = 1, \ldots, 2^n$. On obtient alors (2) avec $p_{\alpha,\beta} = q_\alpha = 1$ et $c_\beta = 0$.

Ensuite par des inégalités entre les normes $\|\cdot\|'_\alpha$ et $\|\cdot\|_\alpha$ pour $\alpha \in [0,1[$ (le théorème de Ciesielski [C] pour $\alpha \neq 0$) et grâce à l'estimation donée par Baldi-Roynette [B-R] de la probabilité des petites boules pour la norme $\|\cdot\|'_\beta$ on prouve (2). q.e.d.

Corollaire. 1 *Lorsque r est fixé et R est grand, il existe une constante $c_1(\alpha,\beta)$ telle que*

$$P(\, \|w.\|_\alpha > R \mid \|w.\|_\beta < r\,) \leq c_1\, R^{-\frac{2}{1-2\alpha}} \exp(-c_2(r)\, R^{\frac{1-2\beta}{\alpha-\beta}})\,, \tag{3}$$

où $c_2(r)$ est une constante strictement inférieure à $\frac{1}{2}\, p_{\alpha,\beta}\, r^{-\frac{1-2\alpha}{\alpha-\beta}}$. Lorsque R est fixé et r est petit il existe une constante $c_3(\alpha,\beta)$ telle que

$$P(\, \|w.\|_\alpha > R \mid \|w.\|_\beta < r\,) \leq c_3\, R^{-\frac{2}{1-2\alpha}} \exp(-c_4(R)\, r^{-\frac{1-2\alpha}{\alpha-\beta}}) \exp(c_\beta\, r^{-\frac{2}{1-2\beta}})\,, \tag{4}$$

où $c_4(R)$ est une une constante strictement inférieure à $\frac{1}{2}\, p_{\alpha,\beta}\, R^{\frac{1-2\beta}{\alpha-\beta}}$.

Remarques. 1) Si $r \downarrow 0$ les estimations sont utiles seulement quand $\alpha < \frac{1}{4(1-\beta)}$, $\beta \geq 0$.

2) Soit $B_\alpha(R) = \{\, \|w.\|_\alpha \leq R\,\}$ et $r = 1$. Alors par (3) on peut déduire que pour un grand R on a $P(\, B_\alpha(R)^C \mid B_\beta(1)\,) \leq c_1 \exp(-c_2\, R^{\frac{1-2\beta}{\alpha-\beta}})$. En particulier on comparera cette majoration à l'estimation gaussienne classique

$$\lim_{R\uparrow\infty} \frac{1}{R^2} \log P(\, \|w.\|_\alpha > R\,) \in]-\infty, 0[\,. \tag{5}$$

(voir [BA-L] ou [B-BA-K] pour des conséquences de cette estimation). Alors on voit que si R est assez grand $P(\, B_\alpha(R) \mid B_\beta(1)\,) \geq P(\, B_\alpha(R)\,)$, ce qui confirme dans ce cas particulier la conjecture générale de [DG-E-...], qui prévoit que deux convexes symétriques sont positivement corrélés pour une mesure gaussienne.

Le Théorème 1 permet d'étendre le théorème du support de Stroock-Varadhan aux normes hölderiennes, si $\alpha < \frac{1}{4}$. Soit P_x la loi de la solution (x_t) de l'équation différentielle stochastique

$$dx_t = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(t, x_t) \circ dw_t^k + b(t, x_t)\, dt\,, \text{ avec } x_0 = x\,, \tag{6}$$

où $\sigma_k(t,x)$, $k = 1, \ldots, m$ et $b(t,x)$ sont des champs de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et où $(w^1, \ldots, w^m)$ est un mouvement brownien m-dimensionnel. On note par Φ_x l'application qui à $h \in L^2 = L^2(\,[0,1]\,, \mathbb{R}^m\,)$ associe la solution de l'équation $dy_t = \sum_{k=1}^m \sigma_k(t, y_t)\, h_t^k\, dt + b(t, y_t)\, dt$, avec $y_0 = x$.

Théorème. 2 *Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{4}[$. Le support de la probabilité P_x pour la norme $\|\cdot\|_\alpha$ est l'adhérence de $\Phi_x(L^2)$, i.e. :*

$$supp_\alpha(P_x) = \overline{\Phi_x(L^2)}^{\,\alpha}\,. \tag{7}$$

Pour la preuve on a besoin d'un résultat plus fort que celui du Corollaire 1.

Lemme. 1 *Soient $\alpha\,,\beta$ telles que $\alpha < \frac{1}{4(1-\beta)}$. Pour tout $u \in [0,(1-4\alpha+4\alpha\beta)\,(1-4\beta+4\beta^2)^{-1}[$ il existe $M_0(\alpha,\beta,u)$ et les constantes positives $k_i(\alpha,\beta,u)$, $i=1,2$, telles que pour tout $M \geq M_0$ on a*

$$\sup_{0<\delta\leq 1} P(\,\|w.\|_\alpha > M\delta^u \mid \|w.\|_\beta < \delta) \leq k_1 M^{-\frac{1}{a}} \exp(-k_2 M^{\frac{2b}{b-a}})\,. \tag{8}$$

Preuve. On peut utiliser les estimations obtenues, en considérant $R = M\delta^u$ grand et $r=\delta$ petit, et en s'assurant de l'uniformité des majorations en δ. q.e.d.

Pour $\alpha,\beta \in\ [0,\frac{1}{2}[$ et $u\in[0,1]$ on note $\mathcal{M}_u^{\alpha,\beta}$ l'ensemble des processus stochastiques Y tels que $\lim_{M\uparrow\infty}\sup_{0<\delta\leq 1} P(\,\|Y.\|_\alpha > M\delta^u \mid \|w.\|_\beta < \delta\,) = 0\,.$

Lemme. 2 *Soit $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Soient, pour $i,j\in\{1,\ldots,r\}$, $\eta_t^{ij} = \frac{1}{2}\int_0^t (w_s^i\,dw_s^j - w_s^j\,dw_s^i)$, $\xi_t^{ij} = \int_0^t w_s^i \circ dw_s^j$. Alors on a*
(i) $w.^i \in \mathcal{M}_u^{\alpha,\beta}$, pour $0\leq\beta<\alpha<\frac{1}{2}\,,\alpha<\frac{1}{4(1-\beta)}$ et $u\in[0,(1-4\alpha+4\alpha\beta)\,(1-4\beta+4\beta^2)^{-1}[$.
(ii) $\eta.^{ij}\in\mathcal{M}_u^{\alpha,0}$, pour $\alpha\in[0,\frac{1}{2}[$ et $u\in[0,1]$.
(iii) $\xi.^{ij}\in\mathcal{M}_u^{\alpha,0}$, pour $\alpha\in[0,\frac{1}{2}[$ et $u\in[0,2(1-2\alpha)\wedge 1]$.
(iv) $\int_0^\cdot f(x_s)d\xi_s^{ij}\in\mathcal{M}_u^{\alpha,0}$, pour $\alpha\in[0,\frac{1}{2}[$ et $u\in[0,2(1-2\alpha)\wedge 1]$.
(v) $\int_0^\cdot f(x_s)\circ dw_s^k\in\mathcal{M}_u^{\alpha,0}$, pour $\alpha\in[0,\frac{1}{4}[$ et $u\in[0,1-4\alpha[$.

Preuve. Le (i) est prouvé dans le Lemme 1.

(ii) On peut écrire, comme [S-V] $\eta_t^{ij} = B(a(t))$, $a(t) = \frac{1}{4}\int_0^t((w_s^i)^2+(w_s^j)^2)\,ds$ où B est un mouvement brownien 1-dimensionnel indépendant de $\|w.\|_0$. Après un changement d'échelle dans la norme $\|\cdot\|_\alpha$, où on utilise $\|z\circ\tilde{z}\|_{\alpha\beta} \leq \|z\|_{\alpha\,,\|\tilde{z}\|_0}\cdot\|\tilde{z}\|_\beta^\alpha$, (la norme $\|z\|_\alpha$ est prise sur l'interval $[0,\|\tilde{z}\|_0]$) on obtient grâce à l'inégalité (5) la majoration $P(\,\|\eta.^{ij}\|_\alpha > M\delta^u \mid \|w.\|_0<\delta\,) \leq \exp(-c_\alpha M^2\,\delta^{2(u-1)})$.

(iii) On obtient la conclusion par (i), (ii) et la remarque triviale : $\|z\tilde{z}\|_\alpha \leq \|z\|_\alpha\cdot\|\tilde{z}\|_0 + \|z\|_0\cdot\|\tilde{z}\|_\alpha$.

(iv) On applique plusieurs fois la formule d'Itô. Outre des termes qui sont majorés par des produits des normes $\|w.\|_0$, $\|\xi.^{ij}\|_0$, $\|\xi.^{ij}\|_\alpha$, il reste à contrôler les normes hölderiennes de browniens changés de temps, $B(a(t))$. On les majore comme dans (ii), sans toutefois pouvoir utiliser l'indépendance de a et B.

(v) On utilise les mêmes idées que dans (iv). La restriction à $\alpha<\frac{1}{4}$ vient du fait qu'on doit contrôler des termes du type $c\,\|w.\|_\alpha$ (qui correspondent au cas où f est une constante). q.e.d.

On prouve ensuite que $\lim_{\delta\downarrow 0} P(\,\|x.-\Phi_x(0)\|_\alpha>\varepsilon \mid \|w.\|_0<\delta\,)=0\,$, pour tout $\varepsilon>0\,$. Pour cela on voit par le Lemme 2 (v) que $\lim_{\delta\downarrow 0} P(\,\|\int_0^\cdot\sigma_k(s,x_s)\circ dw_s^k\|_\alpha>\varepsilon \mid \|w.\|_0<\delta\,)=0\,$, pour tout $\varepsilon>0$, et on conclut grâce au Lemme suivant :

Lemme. 3 *Soient $z_t = z+m_t+\int_0^t l(z_s)\,ds$, $\tilde{z}_t = z+\int_0^t l(\tilde{z}_s)\,ds$ où $\|m\|_\alpha\leq\epsilon$, $m(0)=0$ et l est lipschitzienne de constante L. Alors $\|z-\tilde{z}\|_\alpha \leq (1+L)e^L\,\epsilon\,.$*

Preuve. Par le lemme de Gronwall on a $\|z-\tilde{z}\|_0 \leq \epsilon e^L$. Ensuite on déduit, par un calcul facile que $\|z-\tilde{z}\|_{\alpha,t} \leq \epsilon + L\|z-\tilde{z}\|_0 + L\int_0^t \|z-\tilde{z}\|_{\alpha,u} du$. D'où on tire la conclusion, par une nouvelle application du lemme de Gronwall. q.e.d.

Enfin la formule de Girsanov donne $P(\|\Phi_x(w.)-\Phi_x(h.)\|_\alpha < \varepsilon) > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $h \in L^2$.

Ainsi $\mathrm{supp}_\alpha(P_x) \supseteq \overline{\Phi_x(L^2)}^\alpha$.

L'inclusion inverse est obtenue en utilisant l'approximation polygonale du mouvement brownien. Le raisonnement est classique, on prouve la tension de cette approximation pour la norme hölderienne, à l'aide des majorations standard pour les moments et le fait qu'un ensemble borné dans $\|\cdot\|_{\alpha'}$, $\alpha' > \alpha$ est compact dans $\|\cdot\|_\alpha$.

On achève ainsi la preuve du Théorème 2. Les résultats qui précedent sont développés dans l'article [BA-G].

Les auteurs remercient P. Baldi pour ses suggestions, en particulier pour le Lemme 3.

Bibliographie.

[B-BA-K] Baldi, P., Ben Arous, G., Kerkycharian, G. : Large deviations and Strassen law in Hölder norm, Stoch. Processes Applic., 42 (1992), p. 171-180.

[B-R] Baldi, P., Roynette, B. : Some exact equivalents for the Brownian motion in Hölder norm, Probability Theory and Related Fields, 93 (1992), p.457-484.

[BA-L] Ben Arous, G., Léandre, R. : Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (II), Probability Theory and Related Fields, 90 (1991), p. 337-402.

[BA-G] Ben Arous, G., Gradinaru, M. : Hölder norms and diffusion support theorem (soumis).

[C] Ciesielski, Z. : On the isomorphims of the spaces H_α and m, Bull. Acad. Pol. Sc., 8 (1960), p. 217- 222.

[DG-E-...] Das Gupta, S., Eaton, M.L., Olkin, I., Perlman, M., Savage, L.J., Sobel, M. : Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. II, Univ. California Press., Berkeley, 1972, p. 241-267.

[S-V] Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S. : On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III, Univ. California Press., Berkeley, 1972, p. 333-359.

Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425,
91405 Orsay Cedex.