

FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 Manipulation et identification d'ensembles

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n}\right].$$

2. Soient f et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des applications d'un ensemble E dans \mathbb{R} . Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{i \geq k} \left\{ x \in E, |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

3. Donner un exemple de suite d'ensembles (A_n) de fermés non vides de \mathbb{R} , décroissante pour l'inclusion dont l'intersection est vide.

Exercice 2 Images directe et réciproque, complémentaire

Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que pour tout $B \subset F$, on a l'égalité $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que pour tout $A \subset E$:

- (a) $f(A^c) \subset f(A)^c$,
- (b) $f(A)^c \subset f(A^c)$.

Donner un exemple d'application f et d'ensemble A ne satisfaisant aucune des inclusions précédentes.

2. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ des familles de parties de E et F respectivement. Montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Montrer que la dernière inclusion est une égalité si f est injective.

Exercice 3 Fonction additive d'ensembles

Soient E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application vérifiant $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ dès que $A \cap B = \emptyset$. Pour toutes parties A et B , montrer que $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. Soit (A_n) une suite croissante de parties de E . Montrer que la suite $(f(A_n))$ est convergente.

Exercice 4 Fonctions indicatrices

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . Indiquer si les fonctions suivantes sont des fonctions indicatrices (et préciser les ensembles associés si possible) :

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B, \quad \sup\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}, \quad \inf\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}, \quad \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|.$$

Exercice 5 *Identification de tribus*

Pour E un ensemble, donner des conditions pour que les classes suivantes soient des tribus :

$$\{\emptyset, E\}, \quad \mathcal{P}(E), \quad \{\emptyset, \{x\}, E\}, \quad \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\} \text{ pour } x \in E,$$

les parties finies de E , les parties finies ou cofinies de E , les parties dénombrables de E , les parties dénombrables ou codénombrables de E .

Exercice 6 *Tribus image et réciproque*

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} tribus sur E et F respectivement.

1. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E .
2. Justifier que $f(\mathcal{A})$ n'est en général pas une tribu sur F .
3. Montrer que $\{B, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F .

Exercice 7 *Contre-exemples*

1. Expliciter une union finie de tribu qui n'est pas une tribu.
2. Justifier que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma\{\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}\}$ n'est pas une tribu sur \mathbb{N} .

Exercice 8 *Identification de tribus, bis*

Soit E un ensemble.

1. Déterminer la tribu engendrée par les singletons $\mathcal{S} = \sigma(\{\{x\}, x \in E\})$.
2. Déterminer la tribu engendrée par les parties finies de E .
3. Supposons que E ait au moins deux éléments. Déterminer la tribu engendrée par les paires de E , i.e. $\mathcal{D} = \sigma(\{\{x, y\}, (x, y) \in E^2, x \neq y\})$.
4. Déterminer (et donner le cardinal) de la tribu engendrée par une partition finie de E .

Exercice 9 *Définition équivalente*

Soient (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. si $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante pour l'inclusion, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

Montrer que μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .

Exercice 10 *Mesure image*

Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (F, \mathcal{B}) un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (F, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{B} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

définit une mesure sur (F, \mathcal{B}) , appelée mesure image de μ par f .