Feuille d'exercices # 5

Exercice 1 *Inversion de sommes et calcul d'intégrale*

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy.$$
En déduire que $x \mapsto \sin(x)/x$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$

Exercice 2 *Pourquoi faire simple...*
En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :
$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x} e^{-tx} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 *Inégalité de corrélation*
Sur un espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, soient f et g deux fonctions intégrables et telles que fg est encore intégrable. On suppose de plus que f et g sont monotones et de même monotonie. Démontrer l'inégalité :
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x) \geq \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x).$$

Exercice 4 *Intégration par parties*
Soit f et g deux fonctions Lebesgue intégrables. On définit μ_f par $\mu_f(A) = \int_A f(x)dx$ et μ_g de même. On pose $F(x) = \mu_f(]-\infty, x])$, $G(x) := \mu_g(]-\infty, x])$ et
$$\Delta_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b\right\} \text{ et } \Delta_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq x \leq b\right\}.$$
En calculant de deux façons différentes la quantité $\mu_f \otimes \mu_g\left(\Delta_1 \cup \Delta_2\right)$., démontrer la formule d'intégration par parties :
$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda(x) + \int_{[a,b]} G(x)f(x)d\lambda(x)$$

Exercice 5 *Transformée de Fourier*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable (i.e. $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$). On définit la transformée de Fourier de f par :
$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ définit une application linéaire continue.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$. Montrer que $\mathcal{F}\left(\tau_a f\right)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$.
3. Montrer le lemme de Riemann–Lebesgue : $\mathcal{F}f(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $\mathcal{F}f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $h = f * g$. Montrer que $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Exercice 6 *Transformée de Fourier encore*
On souhaite expliciter la transformée de Fourier suivante, pour $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx} \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En intégrant par parties l'expression obtenue, montrer que F vérifie l'équation différentielle linéaire suivante $F'(t) = -tF(t)$.
3. Expliciter la fonction F, que remarquez-vous ?

Exercice 7 *Non-intégrabilité et valeur principale et transformée de Hilbert*
Il se peut qu'une fonction f ne soit pas intégrable sur un intervalle $]a, b[$ car elle possède une singularité non intégrable en $x_0 \in]a, b[$. Par exemple la fonction $x \mapsto 1/x^3$ sur $[-1, 1]$ n'est clairement pas intégrable au voisinage zéro. Pour autant, il se peut que la limite suivante existe

$$L := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Si c'est le cas, on appelle L la valeur principale de l'intégrale et on note

$$L = \text{v.p.} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Attention, l'expression ci-dessus ne signifie pas que la fonction f est intégrable ! ! !

La définition ci-dessus s'étend naturellement au cas où f possède un nombre fini de singularités $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans l'intervalle, si les intégrales $\int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x)\mathrm{d}x, \dots, \int_{x_n + \varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ existent et sont finies et que la limite

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{x_1 - \varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \dots + \int_{x_n + \varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

existe, on pose de la même façon $L = \text{v.p.} \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer la valeur principale de $x \mapsto 1/x^3$ sur $[-1, 1]$.
2. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$ la valeur principale $\text{v.p.} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{x - t}$.
3. Calculer la valeur principale $\text{v.p.} \displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 4}$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit (si elle existe) sa transformée de Hilbert par l'expression

$$\mathcal{H}(f)(x) := \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x - t} \mathrm{d}t.$$

4. Déterminer la transformée de Hilbert des fonctions sin, cos, $t \to 1/(1 + t^2)$.
5. Montrer que l'on a
$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x - t) - f(x + t)}{2t} \mathrm{d}t.$$
6. Montrer que $\mathcal{H}(\mathcal{H}(f))(x) = -f(x)$.