Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 *Sous le tapis*
On se place sur la tribu $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A$ dénombrable ou A^c dénombrable$\}$. Montrer que l'application μ définie par $\mu(A) = 0$ si A dénombrable et $\mu(A) = 1$ sinon est bien une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice 2 *Invariance par translation*
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mu([0,1]) = 1$ et invariante par transation, i.e.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(a + B) = \mu(B).$$

Pour $a < b$, determiner $\mu(\{a\})$ et $\mu([a, b])$. En deduire $\mu([a, +\infty[)$.

Exercice 3 *Intersection d'ensembles de mesure pleine*
Soit μ une mesure finie sur $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables telle que $\mu(A_n) = \mu(E)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\mu(\cap_{n\geq 1} A_n) = \mu(E)$. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus la mesure finie ?

Exercice 4 *Queue d'une distribution*
Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Posons $F : x \mapsto \mu([x, +\infty[]$. Justifier que la mesure μ est entièrement déterminée par la donnée de F. Que dire de l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) > 0\}$?

Exercice 5 *Somme de négligeables*
Déterminer $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle, tels que $A + B = [0, 1]$.

Exercice 6 *Suites monotones de mesures*

1. Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (μ_n) une suite de mesures sur $(E, \mathcal{A})$ telle que :

   $$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A).$$

   Montrer que $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ définit ume mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
2. Trouver une suite de mesures décroissante dont la limite n'est plus une mesure.

Exercice 7 *Dilatation et translation*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$. Montrer que $f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(f(A)) = |a|\lambda(A)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Exercice 8 *Sur les fonctions mesurables*
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable, autrement dit pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Montrer que, si $\mu(E) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A. De la même façon, montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée par une constante strictement positive sur A.

Exercice 9 *Limite de fonctions mesurables*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

2. En déduire que si (f_n) converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.

Exercice 10 *Ensembles de niveau*
Soient f, g deux fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :

$$A = \{f < g\} = \{x \in E, f(x) < g(x)\}, \quad B = \{f \leq g\}, \quad C = \{f = g\}.$$

En déduire que $f + g$ est mesurable.

Exercice 11 *Lieu de convergence*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in E,\ (f_n(x))_{n\geq 0}$ converge $\}$ est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 12 *Propriétés élémentaires*
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
2. Soit (E_k) une partition dénombrable de E qui engendre $\mathcal{A}$. Montrer qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chacun des E_k.
3. L'inverse d'une bijection mesurable est-elle toujours mesurable ?

Exercice 13 *Monotonie et mesurabilité*
Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone est mesurable.

Exercice 14 *Convergence en mesure*
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que (f_n) converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Montrer que si $\mu(E) < +\infty$, alors la convergence μ-presque partout implique la convergence en mesure. Montrer que si (f_n) converge en mesure vers f, alors (f_n) converge μ-presque partout vers f à une extraction de suite près.