Feuille d'exercices # 4

Exercice 1 *Applications de théorèmes limites*
À l'aide des théorèmes de convergence, déterminer les limites des suites de temes généraux :

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+nk+1}, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n, \qquad (iii)\ \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}dx,$$
$$(iv)\ \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx, \quad (v)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\ \mathrm{d}x, \qquad (vi)\ n\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}}\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 2 *Interversion série intégrale*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \to \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$
2. Montrer que la somme de la série $\sum_{n\geq 1} ne^{-nr}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer son intégrale.
3. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $x \mapsto e^{x^2}$ soit μ-intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\ \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n\ \mathrm{d}\mu(x).$$

Exercice 3 *Problème d'interversion*
Soit $f : 0.1\,[\to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, admettant une limite $f\left(1^-\right)$ à gauche en 1. L'objectif est de montrer l'équivalent suivant :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f\left(1^-\right)}{n}.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est bien de limite nulle.
2. Montrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. En déduire que l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n.
3. Montrer l'équivalent souhaité.

Exercice 4 *Fonction Gamma d'Euler*
Pour tout $t > 0$, on pose :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x.$$

Montrer que Γ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ et montrer la formule d'Euler :

$$\forall t > 0, \Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\ldots(t+n)}.$$

Exercice 5 *Mesure produit*
Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}\left(\mathbb{N}^2\right)$ et que $m \otimes m$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$. Donner un exemple de mesure sur $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ qui n'est pas le produit de deux mesures sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Graphe et mesure*
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Notons $\Gamma = \left\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^d\right\}$ le graphe de f. Montrer que Γ est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 7 *Question d'intégrabilité*
Étudier l'intégrabilité de f_α sur $\mathbb{R}_+^2$ selon α et calculer son intégrale lorsque c'est possible :

$$f_\alpha : (x, y) \mapsto \frac{1}{(1 + x + y)^\alpha}.$$

Exercice 8 *Calcul d'intégrale*
En étudiant la fonction $(x, y) \to x^y$ sur $[0, 1] \times [a, b]$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 9 *Intégrale de Gauss*
Calculer l'intégrale de Gauss ci-dessous en l'élevant au carré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_\alpha : (x, y) \to \exp\left(-x^2 - \alpha xy - y^2\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 *Volume de la boule unité*
Notons B_d la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la norme $\|\_\|_2$. Calculer le volume de B_d en montrant la relation de récurrence

$$\forall d \geq 2, \lambda_d\left(B_d\right) = \frac{2\pi}{d} \lambda_{d-2}\left(B_{d-2}\right).$$

Exercice 11 *Changement de coordonnées*
Soient $U = [0, 1[2 \times] - \pi, \pi[$ et φ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\to (u, uv \cos w, v \sin w). \end{aligned}$$

Montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image et calculer $\lambda_3(\varphi(U))$.

Exercice 12 *Changement de variables*
Soient $U = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > v > 0\right\}$ et $V = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v > u > 0\right\}$. Considérons ψ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(u^2 + v^2, 2uv\right). \end{aligned}$$

Montrer que ψ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U (resp. V) sur son image que l'on déterminera. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left|u^4 - v^4\right| e^{-(u+v)^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$