Feuille d'exercices # 4

Espérance et fonction caractéristique

Exercice 1 *Partie entière et inverse d'une variable uniforme*
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et $X := \lfloor \frac{1}{U} \rfloor$ la partie entière de son inverse.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité de l'évenement $\{X \geq 100\}$.
3. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Exercice 2 *Quelques calculs explicites d'espérances*
Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[|X|]$, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[e^{itX}]$ dans les cas suivants :

1. $X \sim U_{[-1,1]}$ i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx$.
2. $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}dx$, pour $\lambda > 0$.
3. $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *Moments de tout ordre*
Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c\left(x\mathbf{1}_{[0,1[}(x) + (2-x)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\right).$$

Déterminer c et calculer les moments $\mathbb{E}\left[X^n\right]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 *Variable de Cauchy tronquée*
Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{E}[\min(|X|, n)]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Explicitez la limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5 *Moments de la gaussienne*
Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on note $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ son $k^{\text{ième}}$ moment.

1. Justifier que le moments impairs de X sont nuls.
2. Montrer que les moments pairs vérifient la formule de récurrence $m_{2k} = (2k-1)m_{2k-2}$ et conclure que $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
3. Interpréter m_{2k} en terme combinatoire.

Exercice 6 *Moment et queue d'une loi*
Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X.

1. Soit ϕ une fonction positive strictement croissante de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, nulle en 0. Montrer que
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_0^{+\infty} \phi'(t)\left(1 - F_X(t)\right)dt.$$

2. On suppose de plus que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que
$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t)\mathbb{P}(X > t) = 0.$$
3. Expliciter le cas particulier où $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On suppose maintenant que pour t assez grand, il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{c}{t^\alpha}.$$
Montrer que X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < \alpha$.

Exercice 7 *Tirage de l'urne*
Une urne contient r boules dont 2 rouges et $r-2$ noires. On effectue r tirages sans remise et on note X le rang du premier tirage d'une boule rouge et Y le rang du second tirage. Trouver la loi de (X, Y) et de ses marginales. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 8 *Trouver la bonne clé*

1. Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaye. On note X le nombre de clés qu'elle essaye avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté, quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé à la k-ème tentative ? Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?
2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la k-ème boule tirée de l'urne. Donner la loi de R_k, son espérance et sa variance.
3. On note $W_N = R_1 + \ldots + R_N$. Calculer l'espérance de W_N. Trouver la loi du couple (R_j, R_k), $j \neq k$, et montrer qu'elle ne dépend pas de (j, k). Calculer $\mathbb{E}(W_N^2)$, $\mathbb{E}(R_j R_k)$, puis la variance de W_N.

Exercice 9 *Variable géométrique tronquée*
Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note $Y = \inf\{X, n\}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire succesivement et avec remise à chaque fois une boule de l'urne et on cesse les tirages dès qu'une boule rouge est sortie. On désigne par Z le nombre de boules noires obtenues pendant l'expérience. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercice 10 *Carré d'une gaussienne*
Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et on note $Y = X^2$. Trouver la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 11 *Densité de vecteur gaussien*
On pose
$$f(x, y) = \frac{c}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(3x^2 - 3xy + y^2)\right].$$

1. Déterminer c pour que f soit la densité d'un couple aléatoire (X, Y).

2. Trouver les lois marginales et calculer le vecteur espérance et la matrice de covariance de (X, Y).

Exercice 12 *Généralisation de l'inégalité de Hölder*
Soient $p, q, r \in]0, \infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $X \in \mathrm{L}^p$ et $Y \in \mathrm{L}^q$, alors $XY \in \mathrm{L}^r$ et on a

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Exercice 13 *Contre-exemple au problème des moments sur* $\mathbb{R}^+$
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Déterminer tous les moments $\mathbb{E}[X^n]$, $n \geq 1$.
2. Déterminer la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer les moments $\mathbb{E}[Y^n]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On considère la famille de variables aléatoires $(Y_a, |a| \leq 1)$, dont les densités sont données par
$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)(1 + a \sin(2\pi \ln(x))), \quad x > 0.$$
Calculer les moments $\mathbb{E}[Y_a^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire une conclusion intéressante.

Exercice 14 *Fonctions caractéristiques*

1. Montrer que la fonction caractéristique est à valeurs réelles si et seulement si X et $-X$ ont la même loi.
2. Montrer que la conjuguée et la partie réelle d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.
3. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0,1]$. Montrer que $p\varphi + (1-p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

Exercice 15 *Exemples de fonctions caractéristiques*

1. Montrer que la fonction $\phi(t) = \cos^n(t)$ est une fonction caractéristique d'une variable à expliciter.
2. Même question pour la fonction $\phi(t) = \exp(-|t|)\cos(2t)$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbf{1}_{|x|<1}$?
4. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/\left(\pi x^2\right)$?

Exercice 16 *Couple aléatoire*
Soit la fonction
$$f(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$

1. Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X, Y) à valeurs p.s. dans $[-1, 1]$ de densité f.
2. Trouver les lois et les fonctions caractéristiques de X et Y.

Exercice 17 *Inégalité de Cramer*
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) < \infty$, pour $\lambda > 0$ (ou seulement $0 < \lambda < \lambda_0$). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-I_X(t)},$$
où $I_X(t) := \sup_\lambda \left(\lambda t - \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X})\right)$.

Exercice 18 *Dérivabilité en 0 et moment*
On considère une variable aléatoire X de support $\mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}$ et de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X=-n)=\frac{c}{n^2\ln(n)},\quad n\in\mathbb{N},$$

où c est une constante de normalisation qu'on ne cherchera pas à préciser.

1. Expliciter la fonction caractéristique φ_X de X et en déduire que pour $t\neq 0$

$$\frac{1-\varphi_X(t)}{t}=\frac{2c}{t}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1-\cos(kt)}{k^2\ln(k)}.$$

2. En distinguant selon que $2\leq k<1/t$ et $k\geq 1/t$, montrer que $\frac{1-\varphi_X(t)}{t}$ tend vers zéro lorsque t tend vers 0. Que peut-on remarquer ?

Exercice 19 Développement en série

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\phi_X(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right]+\frac{(it)^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n\int_0^1(1-u)^{n-1}\exp(ituX)\mathrm{d}u\right].$$

2. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\phi_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right]+\frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),$$

   où $|\varepsilon_n(t)|\leq 2\mathbb{E}\left[|X|^n\right]$ et $\lim_{t\to 0}\varepsilon_n(t)=0$

3. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|X\|_n}{n}=\frac{1}{R}<\infty,$$

   où $\|X\|_n:=\mathbb{E}\left[|X|^n\right]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est alors développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant supérieur ou égal à R/e. En déduire que :

$$\forall t\in\left]-\frac{R}{e},\frac{R}{e}\right[,\quad \phi_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Exercice 20 *Dérivée seconde d'une fonction caractéristique*
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $0<\mathbb{E}[X^2]<+\infty$. On désigne par φ_X sa fonction caractéristique. Montrer que

$$\frac{-1}{\mathbb{E}[X^2]}\frac{d^2}{dt^2}\varphi_X(t)$$

est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire que l'on explicitera.