Problème blanc Défi math

-décembre 2018 - 5 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Vous devez, dans la mesure du possible, de souligner en rouge vos resultats de calcul.

Les problèmes 1 et 2 sont obligatoires. Si pour une raison ou une autre vous ne savez pas aborder un de ces deux problèmes vous pouvez aborder le problème 3. Si vous avez commencé les problèmes 1 et 2 vous ne devez pas attaquer le problème 3. Ainsi le problème 3 reste facultatif et en réserve en cas de défection de 1 ou 2. Vous pouvez donc prendre du temps (30 min - 1 heure) pour lire les problèmes 1 et 2. Jouez le jeu : ne pas consulter des livres, documents, ... respectez la durée même si vous la fractionnez ! Bon travail !

Problème 1 : groupes et produit semi-direct

Tous les groupes considérés dans ce problème sont en notation multiplicative.
On définit les notions suivantes :

- étant donné un groupe G et un sous-groupe H de G, on appelle normalisateur de H dans G l'ensemble
$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\} = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \mid \forall h \in H, ghg^{-1} \in H\}$$
- on dit que H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si pour tout $g \in G$, $gH = Hg$, autrement dit si $N_G(H) = G$
- étant donné un groupe G et une partie X de G, on appelle centralisateur de X dans G l'ensemble
$$C_G(X) = \{g \in G \mid \forall x \in X, gx = xg\}$$
Si $x \in G$, le centralisateur du singleton $\{x\}$ sera noté $C_G(x)$
- étant donné un groupe G et deux sous-groupes H et K de G, on désigne par HK le produit de H par K, défini par
$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$$
- étant donné deux groupes G et H, de neutres respectifs e_G et e_H, et un morphisme de groupes $f : G \to H$, on appelle noyau de f l'ensemble
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$$
- soit G un groupe d'ordre $p^r m$, où $p^r \wedge m = 1$, et p est un nombre premier ; on appelle p-sous-groupe de Sylow de G un sous-groupe de G de cardinal p^r.
- étant donné H un sous-groupe de G et $g \in G$, on appelle classe à gauche de g modulo H l'ensemble $gH = \{gh : h \in H\}$
- soient H et K deux sous-groupes de G ; on dit que H et K sont conjugués dans G s'il existe $g \in G$ tel que $K = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$

On rappelle ou on admet les points suivants :

- étant donné un morphisme $f : F \to G$, $Ker(f)$ est un sous-groupe de F
- théorèmes de Sylow : tout groupe G admet un p-sous-groupe de Sylow ; de plus, le p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués deux à deux dans G
- l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ de permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la loi de composition des applications est un groupe
- étant donné un sous-groupe H de G, on peut trouver des éléments $x_1, \dots, x_m$ de G tels que les ensembles $x_1 H, \dots, x_m H$ soient deux à deux distincts et forment une partition de G ; on a alors $m = \dfrac{|G|}{|H|}$, où $|G|$ désigne le cardinal (l'ordre) de G ; on dit dans ce cas que $(x_1, \dots, x_m)$ est un système de représentants des classes à gauche modulo H dans G

<u>Partie I</u> : quelques résultats préliminaires

1. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G et que $H \subset N_G(H)$.
2. Soit G un groupe
   (a) Montrer que pour tout $x \in G$, $C_G(x)$ est un sous-groupe de G
   (b) En déduire que pour toute partie X de G, $C_G(X)$ est un sous-groupe de G
   (c) Soit H un sous-groupe de G. Comparer (au sens des inclusions) $C_G(H)$ et $N_G(H)$.

<u>Partie II</u> : produit semi-direct de deux sous-groupes de G

On se donne dans cette partie un groupe G et deux sous-groupes H et K de G

On note e l'élément neutre de G.

1. Montrer que l'application $f : H \times K \to HK$ défini par $f(h,k) = hk$ est bijective si et seulement si $H \cap K = \{e\}$
2. (a) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$

   (b) Montrer que dans ce cas HK est le plus petit sous-groupe de G contenant $H \cup K$

On dit que G est produit semi-direct de K par H si $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$ et si K est un sous-groupe distingué de G.

3. On suppose dans cette question que G est produit semi-direct de K par H.

   (a) Montrer qu'il existe une unique application $\alpha : G \to H$ telle que pour tout $(x,y) \in H \times K$, $\alpha(xy) = x$, et que α est un morphisme de groupe

   (b) Montrer que $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$
4. Réciproquement, étant donné un sous-groupe H d'un groupe G et α un morphisme de G dans H tel que $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$, montrer que G est un produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ par H.

Partie III : quand un groupe est un produit semi-direct

Dans cette partie, on suppose que G est un groupe fini d'ordre $p^r m$, où p est un nombre premier et $p \wedge m = 1$. On considère H un p-sous-groupe de Sylow de G, et on suppose que $N_G(H) = C_G(H)$. On se propose de prouver qu'il existe un sous-groupe K de G tel que G soit produit semi-direct de K par H.

1. Vérifier que H est abélien
2. Soit $(x,y) \in G \times H$ et $z = xyx^{-1}$. On suppose que $z \in H$
   (a) Montrer que H et xHx^{-1} sont des p-sous-groupes de Sylow de $C_G(z)$
   (b) A l'aide d'un résultat admis au début de l'énoncé, en déduire l'existence de $x' \in C_G(z)$ tel que $H = x'(xHx^{-1})x'^{-1}$, et en déduire que $z = y$
3. Soit $y \in G$ et $(x_1, \dots, x_m)$ un système de représentants des classes à gauche modulo H dans G
   (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe un indice $\sigma(i)$ dans $[\![1, m]\!]$ et un élément h_i de H uniques tels que $yx_i = x_{\sigma(i)} h_i$
   (b) Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_m$
   (c) On définit alors $T(y) = \prod_{i=1}^{m} h_i$. Montrer que $T : y \mapsto T(y)$ définit un morphisme de G dans H
   (d) Soit $y \in G$. Montrer qu'il existe une partie J de $[\![1, m]\!]$ et une famille d'entiers strictement positifs $(n_i)_{i \in J}$ tels que
   $$\begin{cases} T(y) = \prod_{i \in J} (x_i^{-1} y^{n_i} x_i) \\ \forall i \in J, \ x_i^{-1} y^{n_i} x_i \in H \\ \sum_{i \in J} n_i = m \end{cases}$$
   On pourra définir une relation d'équivalence sur $[\![1, m]\!]$ par
   $$i \sim j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \ j = \sigma^k(i)$$
   où $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ (k facteurs) et $\sigma^0 = id$. Faire ensuite le produit des $x_{\sigma(i)}^{-1} y x_i$ en les regroupant par classes d'équivalences de l'indice i, en respectant au sein de chaque classe un certain

ordre

(e) Déduire de certaines questions qui précèdent que pour tout $y \in H$, $T(y) = y^m$

(f) Montrer que G est produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(T)$ par H.

(le morphisme T est le morphisme de transfert de G dans H; on peut montrer qu'il est indépendant du choix des $(x_1, \dots, x_m)$: admis)

Problème 2 : approximation d'intégrale

Partie I : approximation polynomiale à gauche

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[\alpha, \beta]$

1. Justifier, pour tout $\ell \in [\![0, n+1]\!]$, l'existence du réel $M_\ell = \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |f^{(\ell)}|$
   On conserve cette notation jusqu'à la fin du problème.

2. Justifier que le polynôme
$$P = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{f^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!} (X-\alpha)^\ell$$
   est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, $P^{(\ell)}(\alpha) = f^{(\ell)}(\alpha)$.

3. Montrer que $\left| \int_\alpha^\beta (f(x) - P(x))\,dx \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+2)!} (\beta-\alpha)^{n+2}$

4. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a, b]$, et $N \in \mathbb{N}^*$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ ($k \in [\![0, N-1]\!]$), où $x_k = a + kh$, avec $h = \frac{b-a}{N}$

   Justifier que lorsque N tend vers $+\infty$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{(\ell+1)!\, N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(x_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)$$

5. Commentez le cas $n=0$.

Partie II : approximation polynomiale au milieu

Avec les notations de la partie précédente, on note, pour $k \in [\![0, N-1]\!]$, m_k le milieu de $[x_k, x_{k+1}]$ et, pour f de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, $Q_{n,k}$ l'unique polynôme tel que pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $Q_{n,k}^{(\ell)}(m_k) = f^{(\ell)}(m_k)$.

1. En adaptant la preuve de la partie I, montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{2^\ell (\ell+1)!\, N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)$$

2. En comparant $\int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n,k}$ et $\int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_{n+1,k}$ montrer que si n est pair, et f est de classe C^{n+2}, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{n} \left(\frac{(b-a)^{\ell+1}}{2^\ell (\ell+1)!\, N^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(\ell)}(m_k) \right) + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right)$$

3. Commenter et comparer les cas $n=0$ et $n=1$.

Partie III : méthode de Newton - Cotes

On suppose dans ce qui suit que f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$ d'intégration donc aussi sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ d'une subdivision de $[a,b]$.

On note, pour $k \in [\![0, n+1]\!]$, $y_k = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$

1. Exprimer sous forme d'une somme l'unique polynôme P de degré au plus n tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(y_k) = f(y_k)$ (Voir aussi IV 2 p. 8)

2. Justifier qu'il existe des coefficients $b_{n,\ell}$, $\ell \in [\![0, n]\!]$, indépendants de

f, α et β, tels que $\int_\alpha^\beta P(t)\,dt = (\beta-\alpha)\sum_{l=0}^{n} b_{n,l}\, f(y_l)$

On exprimera $b_{n,k}$ en fonction de l'intégrale $\int_0^n t(t-1)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n)\,dt$

3. Justifier que $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = 1$.

4. (a) Soit x un élément de $[\alpha,\beta]$ distinct des y_i et g la fonction définie sur $[a,b]$ par
$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}\left(f(x) - P(x)\right), \text{ où}$$
$q(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-y_k)$. Justifier que les y_i sont des zéros de g.
Trouver un $(n+2)$-ième zéro de g distinct des y_i

(b) Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$.

(c) En déduire que $|f(x) - P(x)| \leq M_{n+1} \dfrac{\left|\prod_{k=0}^{n}(x-y_k)\right|}{(n+1)!}$

5. Soit, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $I_N = h\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{n} b_{n,l}\, f\left(a+\left(k+\frac{l}{n}\right)h\right)$, où $h = \dfrac{b-a}{N}$. Justifier qu'il existe un réel C_n indépendant de N, de f, et de a et b t.q.
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - I_N\right| \leq \frac{C_n M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{N^{n+1}}$$
On exprimera C_n à l'aide de l'intégrale $\int_0^n |t(t-1)(t-n)|\,dt$

6. Jusqu'à la fin de cette partie on suppose de plus que n est pair et que f est de classe C^{n+2}. On garde les notations du début de la partie.

(a) Montrer que $\int_\alpha^\beta (x-y_0)\dots(x-y_n)\,dx = 0$

(b) En considérant $P - \lambda(x-y_0)\dots(x-y_n)$, montrer qu'il existe un polynôme Q de degré au plus $n+1$, tel que $\int_\alpha^\beta Q(t)dt = \int_\alpha^\beta P(t)dt$, et $Q'(y_m) = f'(y_m)$, où $m = \frac{n}{2}$

(c) En adaptant le raisonnement de la question 5 avec $g(t) = (t-y_m)\prod_{k=0}^{n}(t-y_k)$, montrer que $\int_a^b f(t)dt = I_N + O\left(\frac{1}{N^{n+2}}\right)$

(d) Expliciter le cas $n=2$.

Partie IV : méthode de Gauss

On considère dans un premier temps une fonction f de classe C^{2n} de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes
$$P_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = P_n^{(n)}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$

(b) Justifier que les racines de L_n sont toutes simples et appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$. On les note $-1<r_1<r_2<\dots<r_n<1$.

2. Soit Q_n le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ interpolant f aux points $r_1,\dots,r_n$. Justifier l'existence de réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, indépendants de f, tels que
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell f(r_\ell)$$

On pourra utiliser $L_{n,k}$ le k-ième polynôme d'interpolation de Lagrange de la famille $r_1,\dots,r_n$
$$L_{n,k}(X) = \frac{\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(X-r_i)}{\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(r_k-r_i)}.$$

On note désormais $I_n(f) = \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx$ et on étudie l'erreur faite en approchant $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ par $I_n(f)$.

3. (a) Montrer que si P est un polynôme vérifiant $\deg(P) < n$, alors $I_n(P) = I(P)$

(b) Montrer que si P est un polynôme vérifiant $\deg(P) < 2n$, alors $I_n(P) = I(P)$ (on pourra comparer avec $I(R)$ où R est le reste de la division euclidienne de P par L_n)

4. (a) À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on associe l'élément de $\mathbb{R}^{2n}$ suivant :

$$\varphi(H) = \left(H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \dots, H(r_n), H'(r_n)\right)$$

Établir que φ est un isomorphisme d'espace vectoriels de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$

(b) En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul, tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ B_n(r_j) = f(r_j) \text{ et } B_n'(r_j) = f'(r_j)$$

5. Montrer que $I(B_n) = I_n(f)$.

6. Dans cette question, on fixe x un nombre réel donné de $[-1,1]$ distinct des nombres $r_1, \dots, r_n$. On définit l'application g sur $[-1,1]$ par la relation

$$g(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \cdot \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2,$$

où le réel α est l'unique réel tel que $g(x) = 0$.

(a) Justifier l'existence et l'unicité de α

(b) Montrer que g' s'annulle en au moins $2n$ points distincts de $]-1,1[$

(c) En déduire l'existence de $c \in]-1,1[$ tel que

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

7. En conclure que
$$\left|I(f) - I_n(f)\right| \leqslant \frac{M_{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
où M_{2n} désigne un majorant de $f^{(2n)}$ sur $[-1,1]$.

8. On suppose maintenant que f est de classe C^{2n} sur un intervalle quelconque $[\alpha, \beta]$ et on désigne toujours par M_{2n} un majorant de $f^{(2n)}$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Donner un majorant de
$$\left|\int_\alpha^\beta f(u)\,du - \frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + r_j \frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right|$$
en fonction de M_{2n}, n, α et β

9. Montrer que si f est une fonction de classe C^4 sur $[a,b]$ et $N \in \mathbb{N}^*$ alors
$$\left|\int_a^b f(u)\,du - \frac{b-a}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f\left(m_k - \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right) + f\left(m_k + \frac{b-a}{2N\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4 (b-a)^5}{4320 N^4}$$
où pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ m_k est le milieu de l'intervalle $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$ et M_4 est un majorant de $f^{(4)}$.

<u>Problème 3</u> : discontinuités des fonctions.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite réglée si elle admet une limite à gauche et une limite à droite. Le but de ce problème est de montrer qu'une fonction réglée a au plus un nombre dénombrable de discontinuités.

On admettra dans ce problème le théorème de Bolzano-Weierstrass affirmant que de toute suite (u_n) à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a,b]$ on peut extraire une sous-suite (v_n) convergente dans $[a,b]$ (ici $v_n = u_{\varphi(n)}$ ou $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante).

On rappelle qu'un ensemble est dénombrable s'il peut-être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ et qu'il est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable. On rappelle aussi qu'une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est encore au plus dénombrable.

Partie I : une fonction réglée n'est pas trop discontinue

Soit f une fonction réglée sur $\mathbb{R}$. On notera $f(a+)$, $f(a-)$ les limites à droite et à gauche de f au point a. On note I un intervalle fermé borné et pour tout $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{a \in I \mid |f(a) - f(a-)| \geq \varepsilon\}$.

1. Montrer que $f|_I$ n'est pas continue à gauche en un point a de I si et seulement si $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose ici que D_ε est infini. Justifier l'existence d'une suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de D_ε. On note a sa limite.

3. Justifier que soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une infinité de termes vérifiant $a_n > a$ soit elle possède une infinité de termes vérifiant $a_n < a$ (disjonction non exclusive)

4. Supposons que (a_n) possède une infinité de termes tq $a_n > a$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut alors supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > a$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $b_n \in]a, a_n[$ tel que $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

(b) Trouver une contradiction.

5. Adapter ce raisonnement au cas où il existe une infinité de termes a_n vérifiant $a_n < a$

6. Conclure.

Partie III : une fonction réglée avec discontinuités imposées

Soit A un sous-ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$.

1. Si A est fini, donner une fonction réglée dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement A.

2. On suppose désormais A dénombrable, et on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont deux à deux distincts, et telle que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. On définit $f_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{]a_n, +\infty[}$

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est convergente. On note $f(x)$ sa somme. Cela définit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) Montrer que f est croissante

(c) Soit $x < y$. Montrer que $f(y) - f(x) = \sum_{n;\, x \leq a_n < y} \frac{1}{2^n}$

(d) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement A, et conclure

(fournir un raisonnement aussi rigoureux que possible.)

———•———