Contrôle continu # 3

le 20 décembre 2023 ; durée 1h30 ; aucun document autorisé ; le sujet comporte deux pages

Exercice 1 *Question de cours ou presque : convergences*

1. Énoncer les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée.
2. Déterminer les limites des intégrales suivantes lorsque n tend vers l'infini
$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{n+nx^2+x^4}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+(n+\sin^2 n)x^2}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{n^2\sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}\,dx,$$
en utilisant une et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question précédente.

Exercice 2 *Gendarmes*

Soient (f_n), (g_n) et (h_n) des suites de fonctions de $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ telles que
$$f_n \le g_n \le h_n, \quad \mu\text{-p.p.}$$
On suppose que, lorsque n tend vers l'infini, $f_n \to f$, $g_n \to g$, $h_n \to h$, μ-p.p., avec $f, h \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$, et aussi que
$$\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu \quad \text{et} \quad \int_E h_n\,d\mu \to \int_E h\,d\mu.$$
En utilisant deux fois un des théorèmes de convergence du cours , démontrer que la suite $(\int_E g_n\,d\mu)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 *Approximation de l'unité*

On se place dans $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue dx. À une fonction intégrable $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} u(x)dx = 1$, on associe la famille de fonctions $(u_r)_{r>0}$ définie par
$$u_r : x \mapsto \frac{1}{r^d}\, u\Big(\frac{x}{r}\Big).$$

1. Pour $r > 0$, démontrer que u_r est une fonction intégrable telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u_r(x)dx = 1$.
2. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que lorsque r tend vers 0
$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,u_r(x)\,dx = f(0).$$
On pourra effectuer un changement de variable et utiliser un théorème de convergence du cours.
3. Déterminer la limite suivante lorsque n tend vers l'infini
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} \cos(x)e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Tourner S.V.P.

Exercice 4 *Point fixe de la transformée de Fourier*
On souhaite expliciter la fonction suivante, définie comme une intégrale à paramètre, pour $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} \mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En intégrant par parties l'expression obtenue, démontrer que F vérifie l'équation différentielle linéaire $F'(t) = -tF(t)$ dans $\mathbb{R}$.
3. Expliciter la fonction F. Que remarquez-vous ?