Université de Rennes | L3 Mathématiques Fondamentales
Probabilités | année 2023-2024

Contrôle continu # 2

le 11 avril 2024 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité $f_{(X,Y)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. On note f_X et f_Y les densités marginales. On note $\varphi_{(X,Y)}$, φ_X et φ_Y les fonctions caractéristiques associées.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les densités qui assure que les variables X et Y sont indépendantes.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions caractéristiques qui assure que les variables X et Y sont indépendantes.

c) Soient U et V deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer les fonctions caractéristiques $\varphi_{(X,Y)}$, φ_X et φ_Y des variables $X := U - V$ et $Y := U + V$.

d) Les variables $X = U - V$ et $Y = U + V$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 *Réduction de variance*

Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction de carré intégrable, on note $I(g) := \int_0^1 g(x)dx$. Soit U de loi uniforme dans $[0, 1]$. On pose

$$X := g(U), \qquad Y := \frac{1}{2}[g(U) + g(1 - U)].$$

a) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = I(g)$

b) Via l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que $\mathrm{Var}(Y) \leq \mathrm{Var}(X)$.

Exercice 3 *Sur les lois de Poisson*

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, i.e $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer la fonction caractéristique de X_1.

b) Expliciter la fonction caractéristique de $(X_1 + \ldots + X_n)/n$

c) Que peut-on en déduire ?