UNIVERSITÉ DE RENNES | L3 MATHÉMATIQUES
INTÉGRATION DE LEBESGUE | ANNÉE 2023-2024

CONTRÔLE CONTINU # 2

le 21 novembre 2023 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : convergences*
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose que les fonctions f_n et f sont intégrables.

a) On suppose que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$.
Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ et $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E |f| d\mu$.

b) On suppose, inversement que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E |f| d\mu$. En considérant la suite de fonctions $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$, montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$.

c) Montrer que l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ n'entraîne pas $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$.
On pourra considérer sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ la suite de fonctions définie, pour $n \geq 1$, par $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]} - \mathbb{1}_{[n+1,n+2]}$, vérifier les hypothèses et illustrer l'affirmation.

Exercice 2 *Application de la convergence dominée*
Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$ on pose $f_n(x) = \left(1 + x/n\right)^n$.

a) Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ et que $|f_n(x)| \leq e^x$.
Rappel : pour tout $t > 0$, $\ln(1+t) \leq t$.

b) Soit le réel $\beta > 1$. Déduire la valeur de la limite, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) e^{-\beta x} dx$.

Exercice 3 *Intégrale avec paramètre*
On considère

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, dx.$$

a) Pour quels $t \in \mathbb{R}$, $F(t)$ est-elle bien définie ?

b) Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner sa dérivée.