Contrôle continu # 1

le 22 février 2024 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : événements et probabilité*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

i) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ suite d'événements. Donner les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$. Énoncer deux phrases signifiant que $\omega \in \liminf_n A_n$ et, respectivement, que $\omega \in \limsup_n A_n$. Montrer que $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n$ lorsque les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire quand $A_n \cap A_\ell = \emptyset$ pour $n \neq \ell$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la minoration suivante est satisfaite

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) \geq \mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(B_n) - n + 1,$$

quelque soient les événements $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$.

Exercice 2 *Loi discrète*
On suppose que T est une variable aléatoire discrète définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

i) Donner la formule de calcul de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T > n)$.

ii) On suppose maintenant que T est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire $T(\Omega) = \{1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{P}(T = \ell) = p(1-p)^{\ell-1}$, $\ell \in \{1, 2, \ldots\}$. Utiliser l'égalité précédente pour calculer $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 3 *Variable aléatoire explicite*
On considère la fonction $C(\omega) = \tan\left(\pi\omega - \frac{\pi}{2}\right)$ définie sur l'espace de probabilité $(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

i) Expliquer pourquoi C est une variable aléatoire et calculer sa fonction de répartition. La variable C admet-elle une densité ? Si oui, la calculer.

ii) La variable $D = 1/C$ est-elle bien définie ? Déterminer sa loi et sa densité. On pourra par exemple expliciter sa fonction de répartition puis en déduire la densité, ou bien exprimer $\mathbb{E}[g(D)]$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée quelconque, et ainsi identifier la densité. Que peut-on remarquer ?