Feuille d'exercices # 6

Convergences des v.a. et grands théorèmes

Exercice 1 *Rayon de convergence*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n z^n$ à coefficients aléatoires est p.s. constant.

Exercice 2 *Marche aléatoire*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi donnée par $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p$, $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. L'événement $A_n = \{S_n = 0\}$ s'appelle un retour à 0.

1. Que représente l'événement $\limsup_n A_n$?
2. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 3 *Série aléatoire*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. La loi de X_n est :

$$Q_{X_n} = \frac{1}{n^2}(\delta_{n^4} + \delta_{n^{-4}}) + \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\delta_0.$$

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ converge presque sûrement.

Exercice 4 *Liens entre convergences*
On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace de probabilité. Rappel :

$$\begin{array}{ccccc} \text{convergence p.s.} & \Longrightarrow & \text{convergence en prob.} & \Longrightarrow & \text{convergence en loi} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{convergence dans } \mathrm{L}^2 & & \end{array}$$

1. Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ en probabilité et que X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement, quand $n \to \infty$.
2. Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ dans L^1 mais pas dans L^2, quand $n \to \infty$.
3. Construire une suite de variables aléatoires $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que $X_n \to 0$ presque sûrement et que X_n ne converge pas vers 0 dans L^1.

Exercice 5 *Métrique et convergence en probabilité*
Montrer que l'espace L^0 peut être muni d'une structure d'espace métrique complet. En déduire l'unicité de la limite en probabilité.

Exercice 6 *Convergences et opérations*
Soient $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ des suites de variables aléatoires et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toutes les convergences sont pour $n \to \infty$.

1. Montrer que si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ presque sûrement (resp. en probabilité), alors $g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)$ presque sûrement (resp. en probabilité).
2. Si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en probabilité, alors $X_n + Y_n \to X + Y$, $aX_n + bY_n \to aX + bY$ (a, b constantes), $X_nY_n \to XY$ et enfin, lorsque $\mathbb{P}(Y_n \neq 0) = \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$, $X_n/Y_n \to X/Y$ en probabilité.
3. Si $X_n \to X$ en loi et et $Y_n \to c$ en probabilité alors
   a) $X_n + Y_n \to X + c$ en loi ;
   b) $X_nY_n \to cX$ en loi ;
   c) $X_n/Y_n \to X/c$ en loi, dès que $(Y_n \neq 0) = 1$ et $c \neq 0$.

Exercice 7 *Espérance, variance et convergence en probabilité*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux et telles que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = c$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c.

Exercice 8 *Convergence de variables exponentielles*
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta_n)$ où la suite de paramètres vérifie $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = +\infty$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité et préciser sa limite.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle dans $\mathbb{L}^1$?
3. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ lorsque $\theta_n = n$ puis $\theta_n = \ln n$.

Exercice 9 *Convergence en probabilité et presque sûre*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli telles que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}$. Étudier la convergence en probabilité et presque sûre de cette suite.

Exercice 10 *Maximum d'exponentielles*
On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit alors la suite (Z_n) par

$$Z_n := \frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k.$$

1. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers $1/\lambda$.
2. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 11 *Evénements rares*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ ($0 < \lambda < 1$). Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 12 *Convergence de variables uniformes*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme $X_n \sim \mathcal{U}(1, \ldots, n)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

Exercice 13 *Convergence de lois géométriques*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi géométrique $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{p}{n})$ $(0 < p < 1)$. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi (à l'aide des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition).

Exercice 14 *Lemme de Slutzky*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en loi lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables limites X et Y sont également indépendantes. Montrer alors que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Sans hypothèse d'indépendance, est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. (Lemme de Slutsky) On suppose que la variable limite Y est constante p.s. Montrer que dans ce cas, $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Exercice 15 *Loi de Gumbel*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité $f_X(x) = e^{-x-e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité et calculer la fonction de répartition F_X associée.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Démontrer que la suite $(M_n - \ln(n))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

Exercice 16 *Convergence en loi de série aléatoire*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. On pose

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique de Y_n peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} \cos(\frac{t}{4}) \cos(\frac{t}{8}) \cos(\frac{t}{16}) \ldots \cos(\frac{t}{2^{n+1}}) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} (\frac{1}{2})^n \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2^{n+1}})}.$$

2. En déduire que Y_n converge en loi vers U.

Exercice 17 *Méthode de Monte Carlo*
Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$ et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur [0,1]. On pose

$$I = \int_0^1 \psi(x)dx, \; Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(U_{2k}) \geq U_{2k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes et trouver leurs lois.
2. Montrer que, lorsque $n \to \infty$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} I.$$

3. On veut estimer I à l'aide de $\bar{Y}_n$ et l'erreur relative est $\varepsilon_n = \dfrac{|\bar{Y}_n - I|}{I}$.
   Donner un majorant de $\mathbb{P}(\varepsilon_n > \alpha)$ en termes de α, I, n.
4. Supposons que des estimations ont permis par ailleurs de voir que $I > 0,5$. À partir de quelle valeur de n s'assure-t-on 19 chances sur 20 de faire une erreur relative inférieure à 1% en estimant I ?

Exercice 18 *La formule de Stirling*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Poisson $X_n \sim \mathcal{P}(a_n)$ $(a_n > 0)$. On note $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

1. Montrer que, lorsque $n \to \infty$ $\dfrac{S_n - s_n}{\sqrt{s_n}} \xrightarrow{\text{loi}} G \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. On suppose que tous les $a_n = 1$ et on pose $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Pourquoi pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(x \leq T_n) = \mathbb{P}(x \leq G)$? À l'aide de l'inégalité Bienaymé-Tchebytchev montrer que on peut dominer $\mathbb{P}(x \leq T_n)$ par une fonction intégrable sur $]0,\infty[$. En déduire,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n^+) = \mathbb{E}(G^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$
   Prouver la formule de Stirling : lorsque $n \to \infty$, $\dfrac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Exercice 19 *Delta-méthode*

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec ϕ' continue en un point $a \in \mathbb{R}$. Soient $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de réels, non-nuls, telle que $c_n \to \infty$, et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires telle que $c_n(X_n - a) \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que $c_n(\phi(X_n) - \phi(a)) \to \phi'(a)X$ en loi, quand $n \to \infty$.
2. Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires d'espérance m et de variance σ^2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec dérivée continue au point m. Montrer que $\sqrt{n}[g(\bar{X}) - g(m)] \to \mathcal{N}(0, [\sigma g'(m)]^2)$, en loi quand $n \to \infty$.

Exercice 20 *Formule d'inversion de transformée de Laplace de Post-Widder*
Soit $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction (densité de probabilité) continue bornée. On rappelle que la transformée de Laplace de f est la fonction $g(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{x})$. Quelle sont les densités de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de $\frac{S_n}{n}$.
2. Montrer que g est indéfinement dérivable sur $]\varepsilon,\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$, de dérivée n-ième donnée sur $]0,\infty[$ par
$$g^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx} f(x)dx.$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = f(x)$.
4. En déduire la formule d'inversion de Post-Widder :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n g^{(n-1)}(\frac{n}{x})}{x^n (n-1)!} = f(x),$$
   et l'injectivité de la transformée de Laplace vue comme application de l'espace des fonctions continues bornées dans l'espace des fonctions continues.