Université de Rennes 1 Année 2022-2023
Master 1 Mathématiques Analyse Fonctionnelle

Contrôle continu # 3

le 12 décembre 2022 ; durée 2h30 ; trois feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Ensembles résolvant et spectral d'un opérateur*
Soient $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{C}-$espace de Banach et $T \in B(E)$ un opérateur linéaire borné.

a) Montrer que si $\|T\| < 1$ alors la série $\sum_{\ell \geq 0} T^\ell$ converge et préciser sa somme.
Donner ensuite une démonstration du fait que l'ensemble résolvant $\rho(T)$ est non-vide.

b) Fournir une démonstration du fait que $\|R_T(\lambda)\| \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$.
Montrer que si de plus $T \neq 0$ alors pour $|\lambda| > 2\,\|T\|$ on a $\big\|R_T(\lambda)\big\| \leqslant \|T\|^{-1}$.

c) Justifier que lorsque $\sigma(T) = \emptyset$, alors pour $x \in E$ et $f \in E'$ arbitraires mais fixés, la fonction $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto f\big(R_T(\lambda)x\big) =: h(\lambda)$ est une fonction entière (*i.e.* holomorphe sur tout le plan complexe).

d) Montrer que lorsque $T \neq 0$ et $\sigma(T) = \emptyset$ la fonction définie au point précédent est bornée sur $\mathbb{C}$. On pourra distinguer deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$: le disque fermé centré en 0 de rayon $2\,\|T\|$ et $\{\lambda \in \mathbb{C} : \, |\lambda| > 2\,\|T\|\}$.
Justifier que [1], lorsque $T \neq 0$ et $\sigma(T) = \emptyset$ l'opérateur $R_T(\lambda)$ ne dépend pas de λ. Est-il possible ?

e) Déduire que l'ensemble spectral $\sigma(T)$ est non-vide.

f) Montrer, en utilisant les resultats de cours (sans reprendre les preuves) que pour $\lambda \in \rho(T)$ on a $\big\|R_T(\lambda\big\| \geqslant \delta(\lambda)^{-1}$, où $\delta(\lambda) := \operatorname{dist}\big(\lambda, \sigma(T)\big) = \inf\limits_{\omega \in \sigma(T)} |\lambda - \omega| < +\infty$, et donc $\|R_T(\lambda)\| \to \infty$ lorsque $\delta(\lambda) \to 0$.

Exercice 2 *Césaro versus von Neumann*
Soit $U \in B(H)$ un opérateur de norme ≤ 1 sur un espace de Hilbert H et désiognons par P la projection orthogonale sur l'espace propre $\{x \in H : Ux = x\}$. On veut montrer que pour tout $x \in H$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j x = Px$.

a) Vérifier l'égalité pour tout $x \in R(P)$.

b) Montrer $\operatorname{Ker}(I - U^*) = \operatorname{Ker}(I - U) = R(P)$. En déduire $\operatorname{Ker}(P) = \big(\operatorname{Ker}(I - U^*)\big)^\perp = \overline{R(I - U)}$.

c) Montrer que pour $z = (I - U)y$ on a $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j z \to 0$ quand $n \to \infty$.

d) Déduire l'égalité souhaitée pour tout $x \in \operatorname{Ker}(P)$ et conclure.

e) <u>Bonus</u> : Soit $C(x)$ l'adhérence de l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $\{U^j x : j \geq 0\}$.
Vérifier que $C(x)$ est convexe, ensuite montrer que Px est la projection de 0 sur $C(x)$.
En déduire que Px est l'unique point fixe de U dans $C(x)$.

Exercice 3 *Norme d'un opérateur compact*
Soient $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{C}-$espace de Banach réflexif, $H \neq \{0\}$ un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert, et considérons $T \in K(E)$ et $A \in K(H)$ deux opérateurs linéaires compacts. Nous allons montrer qu'il existe un $x_0 \in H$ (resp. $\in E$), $\|x_0\| \leq 1$, tel que $\|A\| = \|Ax_0\|$ (resp. $\|T\| = \|Tx_0\|$).

Tournez S.V.P.

1. *Théorème de Liouville : toute fonction entière bornée sur tout le plan complexe est constante.*

a) Montrer que A^*A est un opérateur continu compact autoadjoint, positif. Que peut-on dire de son spectre ?

b) Justifier soigneusement qu'il existe un vecteur propre $x_0 \in H \setminus \{0\}$ tel que $A^*Ax_0 = \|A^*A\|x_0$. Déduire que $\|Ax_0\| = \sqrt{\|A^*A\|}\,\|x_0\|$ et conclure pour A.

c) Justifier qu'il existe une suite $(x_n) \subset E$, $\|x_n\| \leq 1$, et une sous-suite (x_{n_j}) telle que $\|Tx_n\| \to \|T\|$ et $Tx_{n_j} \to y \in E$ fortement et faiblement. Que peut-on dire de la boule unité B_E ?

d) Déduire qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{n_{j_k}})$ faiblement convergente vers un $x_0 \in B_E$. Justifier soigneusement que $Tx_{n_{j_k}} \to Tx_0$ faiblement, que $\|Tx_{n_{j_k}}\| \to \|Tx_0\|$, et enfin conclure pour T.

Exercice 4 *Quel spectre contient* 0 *?*

a) Soit l'opérateur $T : \ell^2 \to \ell^2$ donné par $Tx = (\xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \ldots)$, où $x = (\xi_j)$.

   i) Montrer que T est bien défini, lináire. Vérifier que T est limite d'opérateurs de rang fini. En déduire que $T \in K(\ell^2)$.

   ii) Pour quelles valeurs de λ, $(\lambda I - T)^{-1} \in B(\ell^2)$.

   iii) Montrer que T est injective et que $R(T)$ est dense dans ℓ^2.

   iv) Donner $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ et $\sigma_r(T)$.

b) Soit maintenant $S : \ell^2 \to \ell^2$, $Sx = (\xi_2/1, \xi_3/2, \xi_4/3, \ldots)$.
Étudier la compacité de S et donner $\sigma_p(S)$.

c) L'opérateur $V : \ell^2 \to \ell^2$ donné par $V = (0, \xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \ldots)$ est-il compact ?
Montrer que $\sigma(V) = \sigma_r(V) = \{0\}$.