Université de Rennes 1 | Année 2022-2023
Master 1 Mathématiques | Analyse Fonctionnelle

Contrôle continu # 2

le 16 novembre 2022 ; durée 1h15 ; deux feuilles résumés autorisées

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Dans les questions suivantes on désigne par E un espace de Banach.

a) Fournir une démonstration complète du fait que si E est réflexif alors tout s.e.v. fermé $M \subset E$ est réflexif. En déduire que si E' est réflexif alors E est réflexif (admettre que si un espace est réflexif alors son dual l'est aussi).

b) Fournir une démonstration complète du fait que si E est séparable alors toute suite bornée d'éléments de E' admet une sous-suite faiblement-$\star$ (donc $\sigma(E', E)$) convergente. Donner un énoncé d'un résultat similaire pour la convergence faible $\sigma(E, E')$.

c) Supposons que E réflexif et soit $C \subset E$ un convexe fermé. Montrer qu'il existe un vecteur $\widetilde{x} \in C$ tel que $\|\widetilde{x}\| = \inf_{x \in C} \|x\|$.

Exercice 2 *Convergence faible dans des espaces réflexifs*
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée d'un espace de Banach E. Pour $n \geq 1$, on pose $C_n := \overline{\mathrm{Conv}(x_n, x_{n+1}, \dots)}$.

a) Montrer que si la suite converge faiblement $x_n \rightharpoonup x_0$ alors $\cap_{n\geq 1} C_n = \{x_0\}$. On pourra :
   i) d'une part montrer que x_0 appartient à l'adhérence (pour quelle topologie ?) de tous les C_n,
   ii) d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $f \in E'$ étudier la position de l'ensemble $A = \{x \in E : |f(x - x_0)| < \varepsilon\}$ par rapport à C_n pour n suffisamment grand.

b) Montrer que si E est réflexif et que si $\cap_{n\geq 1} C_n = \{x_0\}$ avec $x_0 \in E$ alors la suite converge faiblement $x_n \rightharpoonup x_0$. On pourra justifier l'existence d'une sous-suite $(x_{k_{j_n}})$ convergente faiblement et comparer $A_n := \overline{\mathrm{Conv}(x_{k_{j_n}}, x_{k_{j_{n+1}}} \dots)}$ avec C_n, ensuite comparer l'intersection des A_n et celle des C_n. Enfin pour conclure, on pourra montrer que : lorsque de toute sous-suite (y_{k_n}) d'une suite (y_n) d'un e.v. muni d'une topologie on peut extraire une sous-suite $(y_{k_{j_n}})$, convergente vers un y_0 de l'e.v., alors la suite (y_n) converge vers y_0.

c) Étudier le cas de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de ℓ^1 donnée par $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (0, 1, 0, \dots)$, ..., $x_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ (avec 1 sur la n-ième place), ... : que peut-on dire sur les C_n, que vaut leur intersection et que peut-on dire de la convergence faible de (x_n) ?

Exercice 3 *Convergence faible sur l'espace des fonctions continues*

a) Soit T un espace métrique compact et soient f et $f_n \in \mathrm{C}(T; \mathbb{K})$, $n \geq 1$. Montrer que la suite (f_n) converge faiblement vers f si et seulement si $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty < \infty$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ pour tout $t \in T$. On pourra :
   i) d'abord considérer la masse de Dirac $\delta_t : \mathrm{C}(T; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ donnée par $\delta_t(f) = f(t)$, $f \in \mathrm{C}(T; \mathbb{K})$,
   ii) ensuite utiliser une propriété de cours de représentation (admise) : si $\ell \in \mathrm{C}(T; \mathbb{K})'$ alors il existe une mesure borélienne finie régulière μ sur T telle que la représentation intégrale suivante $\ell(f) = \int_T f(t)\mu(dt)$ soit vraie pour toute $f \in \mathrm{C}(T; \mathbb{K})$.

b) Soit $u : [0, 1] \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et on introduit, pour chaque $n \geq 1$ entier, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{K}$ donnée par $f_n(t) = u(t^n)$. En utilisant le point précédent montrer que la suite (f_n) est faiblement convergente si et seulement si $u(0) = u(1)$.