Université de Rennes 1 | Année 2022-2023
Master 1 Mathématiques | Analyse Fonctionnelle

Contrôle continu # 1

le 11 octobre 2022 ; durée 75 minutes ; résumé sur une feuille format A4 autorisé

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*

i) a) Soient E un e.v.n, G un sous-espace vectoriel de E et $g \in G'$ une forme linéaire continue. Soient $f_1, f_2 \in E'$ deux extensions de Hahn-Banach de g distinctes. Montrer que l'ensemble des extensions de Hahn-Banach est un convexe de E' et c'est un ensemble infini. Commenter l'unicité d'extension de Hahn-Banach.

b) Supposons dans cette question que E est un espace de Hilbert et que G est un sous-espace vectoriel fermé de E. Notons $P_G x$ la projection orthogonale de $x \in E$ sur G. Montrer que si $g \in G'$ alors $f(x) = g(P_G x)$, $\forall x \in E$, est l'unique extension de Hahn-Banach de g. On pourra remarquer que si $\widetilde{f}$ est une (autre) extension de Hahn-Banach de g alors $\widetilde{f}(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in E$, avec $P_{G^\perp} a = 0$.

ii) Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. On introduit

$$N := \cap\{\overline{T(V)} : V \text{ voisinage de } 0_E\}.$$

Montrer que N est un sous-espace vectoriel fermé de F et que T continu ssi $N = \{0_F\}$.

Exercice 2 *Extension de normes équivalentes*

Soit $(E, \|\cdot\|_1)$ un e.v.n. et soit G un sous-espace vectoriel de E. Soit $\|\cdot\|_2$ une autre norme sur E telle qu'elle soit équivalente à $\|\cdot\|_1$ sur G, i.e. $\exists m, M > 0$ t.q. $m\|y\|_1 \leq \|y\|_2 \leq M\|y\|_1$, $\forall y \in G$. Montrer qu'il existe une norme sur E équivalente à $\|\cdot\|_1$ sur E et dont la restriction à G est $\|\cdot\|_2$. On pourra introduire

$$\|x\| := \max\big\{m\|x\|_1, \sup_{f,\widetilde{f}} |\widetilde{f}(x)|\big\},$$

le sup étant pris sur f et $\widetilde{f}$, où $f \in (G, \|\cdot\|_2)'$, $\|f\|_{(G,\|\cdot\|_2)'} \leq 1$, et où $\widetilde{f} \in (E, \|\cdot\|_1)'$ est une extension de Hahn-Banach de $f_{\big|(G,\|\cdot\|_1)}$.

Exercice 3 *Extension de Phillips d'un opérateur*

i) Soit H un espace de Hilbert, G un sous-espace vectoriel fermé de H et E un e.v.n. quelconque. Soit $T : G \to E$ un opérateur linéaire continu. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu $\widetilde{T} : H \to E$ qui est une extension de T, c'est-à-dire $\widetilde{T}_{|G} = T$, et tel que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ (extension de Phillips de T).

ii) Soit $H = \ell_2$ avec sa norme usuelle d'espace de Hilbert, $G = \{x \in \ell_2 : \langle x, e_1\rangle = 0\}$, où $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, et soit $T : G \to c_0$ l'inclusion canonique $Tx = x$, pour tout $x \in G$ (c_0 étant muni de sa norme usuelle $\|(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |\xi_k|$). Montrer que les extensions de Phillips de T sont de la forme $\widetilde{T}_{a_1} : \ell_2 \to c_0$, $\widetilde{T}_{a_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (a_1\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$, avec $|a_1| \leq 1$.