
Fiche de TD n° 2 : Martingales

Exercice 1 (Martingale et fonction caractéristique) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $\varphi(u) := \mathbb{E}\big[\exp(iuZ_1)\big]$, $u \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de la loi commune et on pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, $n \geq 1$. Montrer que pour $u \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) \neq 0$, $M_n(u) = {\exp(iuS_n)}/{\varphi(u)^n}$, $n \geq 0$ est une martingale (complexe).

Exercice 2 (Martingale multiplicative I) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes intégrables avec $\mathbb{E}[Y_n] = m_n \neq 0$. Montrer que $M_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \big({Y_j}/{m_j}\big)$, $n \geq 1$, $M_0 = 1$ définit une martingale.

Exercice 3 (Martingale multiplicative II) Soit $Y_1, Y_2, \dots$ des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées et la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_0 = 1$ et $X_n := \prod_{j=1}^{n} Y_j$ pour $n \geq 1$.

1. Sous quelles conditions la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle une sur-martingale ? Une sous-martingale ? Une martingale ?
2. On se place dans le dernier cas et on suppose de plus que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y_1 \geq \delta$.
   (a) Montrer que $\ln(Y_1)$ est intégrable.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}\big[\ln Y_1\big] < 0$.
   (c) Utiliser la loi des grands nombres pour ${(\ln X_n)}/{n}$ pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 4 (Urne de Pólya I) On dispose (d'une infinité) de boules blanches et noires. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne uniformément au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur. On note S_n le nombre de boules blanches au temps n, et $X_n := {S_n}/{(n+2)}$ la proportion de boules blanches au temps n.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle (canonique) $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
2. Si au lieu d'ajouter une seule boule, on ajoute $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur que la boule extraite, est-ce que la proportion de boules blanches reste une martingale ?

Exercice 5 (Martingale et loi géométrique) Soit Z une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}$ (ie. $\mathbb{P}(Z = n) = (1-p)^n p$ pour tout $n \geq 0$). Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $Z \wedge (n+1)$.

1. Montrer que :
$$\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\}, \dots, \{Z = n\}, \{Z \geq n+1\}\big).$$
2. Montrer que :
$$X_n := \mathbf{1}_{\{Z\leq n\}} - p(Z \wedge n),\ n \geq 0.$$
   est une martingale.

Exercice 6 (Martingale et suite récurrente I) Soit $a \in [0, \pi/2]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1} \sin(X_n)$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ prend des valeurs positives, puis que la suite $\big(2^n X_n\big)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 7 (Transformée de Lévy discrète) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma\big(X_1, \dots, X_n\big)$ et $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. On considère la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par $M_0 := 0$ et pour $n \geq 1$:

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}\,(S_{k-1})\, X_k,$$

où $\operatorname{sign}\,(x) = +1$ si $x > 0$, $\operatorname{sign}\,(x) = -1$ si $x < 0$ et $\operatorname{sign}\,(0) = 0$.

1. Quel est le compensateur de la martingale $(S_n)_{n\geq 0}$?
2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et calculer le compensateur de $(M_n)_{n\geq 0}$.
3. Quelle est la décomposition de Doob de $\big(|S_n|\big)_{n\geq 0}$?
4. En déduire que M_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma\big(|S_1|, \dots, |S_n|\big)$.

Exercice 8 (La prochaine est rouge) On considère un jeu de 52 cartes, et on en retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire ″la prochaine est rouge″ ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour $n = 0, \dots, 51$, on note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'évènement ″la n-ième carte retournée est rouge″.

1. Calculer $\mathbb{P}\big(A_{n+1} \,|\, R_n = j\big)$, pour $j \in \{2, \dots, 26\}$ et $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}\big(R_{n+1} = j \,|\, R_n\big) = \mathbb{P}\big(R_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n\big)$, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$ et $j \in \{0, \dots, 26\}$, où on a posé $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.
3. Montrer que, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$,
$$\mathbb{E}\big[R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\big] = R_n - \frac{R_n}{52 - n}.$$
4. Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \dots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et que $X_n = \mathbb{P}\big(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\big)$.
5. On définit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit ″la prochaine est rouge″ avant de retourner la $(\tau+1)$-ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}[X_\tau]$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.

Exercice 9 (Martingale identiquement distribuée) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale telle que les variables aléatoires X_n ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est en fait une martingale, ainsi que $(X_n \vee a)_{n\geq 0}$ et $(X_n \wedge a)_{n\geq 0}$ où a est un réel fixé.

2. Soit $n > m$ deux entiers et a un réel. Montrer que sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega \,:\, X_m(\omega) \geq a\}$, on a $X_n \geq a$ presque sûrement. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est constante presque sûrement.

Exercice 10 (Une réciproque du théorème d'arrêt) 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration, T un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose

$$T_A := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ +\infty & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que T_A est un temps d'arrêt.

2. Si S est un autre temps d'arrêt tel que $T \leq S$ et si $A \in \mathcal{F}_T$, on pose

$$U := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ S & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que U est un temps d'arrêt.

3. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que M est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout temps d'arrêt borné τ.

Exercice 11 (Un critère de finitude pour les temps d'arrêt) Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier tels que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\big(T \leq n + N \,|\mathcal{F}_n\big) > \varepsilon \quad \text{ps.}$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 12 (Autre version du théorème d'arrêt) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale définie sur un espace de probabilité filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ et T un temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, $\mathbb{E}\big[|X_T|\big] < +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[|X_n|\,\mathbf{1}_{\{T>n\}}\big] = 0$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[|X_T|\,\mathbf{1}_{\{T>n\}}\big] = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[|X_{T\wedge n} - X_T|\big] = 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Exercice 13 (Ruine du joueur) Soit a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On suppose dans un premier temps que $p \neq q$ (cas **asymétrique**).

1. Montrer que les suites $W_n := S_n - (2p-1)n$, $n \geq 0$, et $M_n = ({}^{q}\!/_{p})^{S_n}$, $n \geq 0$, issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Soit $T = \inf\big(n \geq 0 \,:\, S_n \notin]-a, b[\big)$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$ et $\mathbb{E}[T]$.

On suppose maintenant que $p = q = {}^{1}\!/_{2}$ (cas **symétrique**) de sorte la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

4. Montrer que le temps T est toujours fini presque sûrement.

5. Établir les identités de Wald : $\mathbb{E}[S_T] = 0$ et $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T]$.
6. En déduire les probabilités de sortie de $[-a, b]$ et la date moyenne de sortie

$$\mathbb{P}(S_T = -a),\ \mathbb{P}(S_T = b),\ \mathbb{E}[T].$$

Exercice 14 (Un nouveau temps d'arrêt construit à partir d'un temps d'arrêt) Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\phi(n) := \inf\Big(k \geq 0 : \{T = n\} \in \mathcal{F}_k\Big).$$

Prouver que $\phi(T)$ est un temps d'arrêt et qu'il est majoré par T.

Exercice 15 (Une martingale qui converge en probabilité mais pas presque sûrement) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = {}^1/_{2n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - {}^1/_n$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On définit une nouvelle suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ en posant $Y_1 := X_1$, et pour $n \geq 2$:

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ n|X_n|\,Y_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement. Quelle hypothèse fait défaut pour l'application du théorème de convergence presque sûre ?

Exercice 16 (Martingale et suite récurrente II) Soit a un réel et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose maintenant que $a \in [0, 1]$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ que l'on précisera.

Exercice 17 (Martingale qui converge presque sûrement vers $+\infty$) Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}\big(X_n = -n^2\big) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $S_n := X_2 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 2}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par $(X_n)_{n\geq 2}$ et qu'elle converge ps vers $+\infty$.

Exercice 18 (Martingale non bornée dans L^1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = {}^1/_2$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$ et $S_0 = 0$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geq 1}$ et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour n assez grand, on ait $\mathbb{E}\big[|S_n|\big] \geq c\sqrt{n}$.

Exercice 19 (Martingale qui converge ps mais qui n'est pas bornée dans L^1)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit T une variable aléatoire indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que $\mathbb{P}(T = n) = C/n^\alpha$ pour $n \geq 1$ avec $\alpha > 1$ et $C = (\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha})^{-1}$. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n\wedge T} X_k, \quad n \geq 1.$$

Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n := \sigma\big(T, X_1, \dots, X_n\big)$, $n \geq 1$, qu'elle converge ps, mais que pour α bien choisi, elle n'est pas bornée dans L^1.

Indication. Pour ce dernier point, on pourra se servir de l'Exercice 18.

Exercice 20 (Loi du 0-1 de Kolmogorov via les martingales) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit :

$$\mathcal{F}_n := \sigma\big(X_1, \dots, X_n\big), \qquad \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\Big),$$
$$\mathcal{F}^n := \sigma\big(X_n, X_{n+1}, \dots\big), \qquad \mathcal{F}^\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n.$$

Soit A un évènement asymptotique (ie. $A \in \mathcal{F}^\infty$). En utilisant la martingale fermée $(M_n)_{n\geq 1}$ définie par $M_n := \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n\big]$, montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Exercice 21 (Théorème de Rademacher sur les fonctions lipschitziennes)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X\rfloor$ et $Y_n := 2^n \left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right)$.

1. Pour $n \geq 1$, montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\mathcal{F}_n := \sigma\big(X_0, X_1, \dots, X_n\big) = \sigma(X_n), \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma\big(X_n, X_{n+1}, \dots\big) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}\big[h(X_{n+1})\,|X_n\big]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite ps et dans L^1 de $(Y_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ borélienne bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}\big[h(X)\,|X_n\big]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que presque sûrement : $Y_n = 2^n \displaystyle\int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\,du$.
5. Conclure que $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x g(u)\,du$, pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 22 (Urne de Pólya II) On considère une urne dans laquelle se trouvent initialement deux boules, une blanche et une noire. On dispose par ailleurs d'un stock infini de boules blanches et noires. Partant de la configuration initiale, à chaque pas de temps, on tire au hasard une boule de l'urne et on la remet dans l'urne avec une boule de même couleur issue du stock. À l'instant n, il y a ainsi $n + 2$ boules dans l'urne. On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant n et $X_n := S_n/(n+2)$ la proportion de boules blanches.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge (dans un sens à préciser) vers une variable aléatoire X_∞ telle que $0 \leq X_\infty \leq 1$.
2. Pour $k \geq 1$, on considère la nouvelle suite $\big(Y_n^{(k)}\big)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires :

$$Y_n^{(k)} := \frac{S_n(1+S_n)\dots(k-1+S_n)}{(2+n)\dots(k+1+n)}.$$

Montrer que $\big(Y_n^{(k)}\big)_{n\geq 0}$ est également une martingale bornée qui converge (dans un sens à préciser) vers $Y_\infty^{(k)} = X_\infty^k$ (la puissance k-ième de X_∞) et que $\mathbb{E}\big[Y_\infty^{(k)}\big] = 1/(k+1)$.
3. En déduire que X_∞ est de loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 23 (Sur les arbres de Galton-Watson) Soit $\mu = \sum_{n\geq 0} p_n \delta_n$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ et $\big(X_{n,k}\big)_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ représente le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ. On adopte ici la convention $\sum_\varnothing = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par $T := \inf\big(n \geq 0 : Z_n = 0\big) \in \overline{\mathbb{N}}$ le temps d'extinction de l'arbre.

1. Établir les points suivants :
   (a) Si $p_k = 1$ pour un $k \in \mathbb{N}$, ie. $\mu = \delta_k$, alors $Z_{n+1} = kZ_n = \dots = k^{n+1}Z_0$.
   (b) Si $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$ alors $\mathbb{P}\big(Z_n \nearrow +\infty\big) = 1$. Autrement dit, la taille de l'arbre tend vers l'infini avec n (comparer au jeu de pile ou face).
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$ alors $\mathbb{P}\big(Z_n \searrow 0\big) = 1$. Autrement dit, l'arbre s'éteint presque sûrement et la loi du temps d'extinction T est géométrique.

Dans toute la suite, nous supposerons que :

$$Z_0 = 1, \quad 0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1, \quad p_k < 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note $m := \mathbb{E}[Z_1]$ lorsque cette moyenne existe, et $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que si $m < +\infty$, alors $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sigma^2 < +\infty$ alors

$$\mathrm{Var}(Z_n) = m^n \sigma^2 \frac{m^n - 1}{m^2 - m}, \quad \text{prolongé en } n\sigma^2 \text{ si } m = 1.$$

Le cas $m = 1$ est dit critique, les cas $m < 1$ et $m > 1$ sont dits respectivement sous-critique et sur-critique.

3. Montrer que la probabilité d'extinction vérifie $\mathbb{P}(T < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$.
4. Soit g la fonction génératrice de $X_{1,1} = Z_1$, ie. $g(s) := \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, et soit g_n la fonction génératrice de Z_n, ie. $g_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que l'on a la relation

$$g_n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}} = g^{\circ n}.$$

5. Remarquer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$ et en déduire d'une part que, si $m \leq 1$ alors l'extinction est presque sûre ie. $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, et d'autre part que si $m > 1$ alors $\mathbb{P}(T < +\infty)$ est l'unique racine dans $]0, 1[$ de l'équation de point fixe $g(s) = s$. Expliciter cette probabilité lorsque la loi de reproduction est une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ modifiée sur $\mathbb{N}$ (ie. $\mu(k) = (1-p)^k p$).
6. Montrer que la suite $Y_n := {}^{Z_n}/_{m^n}$, $n \geq 1$, est une martingale. En déduire le comportement asymptotique de Z_n lorsque n tend vers l'infini.
7. On cherche maintenant à préciser ce comportement asymptotique dans les cas critique et sur-critique. On suppose tout d'abord que $m = 1$ et $\sigma < +\infty$. En faisant un développement de Taylor de la fonction g à l'ordre deux en 1, montrer que
   (a) $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = {}^2/_{\sigma^2}$;
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[{}^{Z_n}/_n \,|\, Z_n > 0\big] = \sigma^2/2$;
   (c) $\mathcal{L}\big({}^{Z_n}/_n \,|\, Z_n > 0\big)$ tend lorsque n tend vers l'infini vers la loi exponentielle $\mathcal{E}\big({}^2/_{\sigma^2}\big)$.
8. On suppose maintenant que $m > 1$ et $\sigma < +\infty$. Montrer que la martingale $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire positive Y_∞ qui vérifie :
   (a) $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$ et $\mathrm{Var}(Y_\infty) = {}^{\sigma^2}/_{(m^2-m)}$;
   (b) $\phi'_\infty(0) = -1$, et $\phi_\infty(mt) = g(\phi_\infty(t))$, où l'on a posé $\phi_\infty(t) := \mathbb{E}\big[e^{-tY_\infty}\big]$.

Exercice 24 (Modèle de Wright-Fisher) Soit k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On définit par récurrence une suite de variables aléatoires $\big(X_n^N\big)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $X_0^N := k$ et pour pour tout $n \geq 0$ et $i \in \{0, \ldots, N\}$, la loi de X_{n+1}^N sachant que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0^N, \ldots, X_n^N)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\big(N, {}^{X_n^N}/_N\big)$.

1. Montrer que la suite $\big(X_n^N\big)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $\big(X_n^N\big)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^p pour tout $p \geq 1$.
3. Décrire la loi de la variable aléatoire limite X_∞^N.

Exercice 25 (Concentration sur 0 et 1) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. On suppose que $X_0 = a$ presque sûrement avec $a \in [0, 1]$ et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big) = X_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:
$$\mathbb{P}\Big(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ ou } X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2}\Big) = 1.$$
   En déduire que presque sûrement $X_n \in [0, 1]$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans L^p pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire que l'on note X_∞.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:
$$\mathbb{E}\big[(X_{n+1} - X_n)^2\big] = \frac{1}{4}\mathbb{E}\big[X_n(1 - X_n)\big].$$

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\big[X_\infty(1-X_\infty)\big]$, puis la loi de X_∞.

Exercice 26 (Ruine et grande fortune) Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$, où les variables aléatoires X_n, $n \geq 1$, sont indépendantes et de même loi $0 < \mathbb{P}(X_1 = 1) = p < 1$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p$.

1. Pour $n \geq 0$, on pose $Y_n := \big({}^q\!/_p\big)^{S_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive.
2. Montrer que pour $k > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\Big) \leq \Big(\frac{p}{q}\Big)^k,$$
et que lorsque $q > p$:
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{n\geq 0} S_n\Big] \leq \frac{p}{q-p}.$$