Fiche de TD n° 3 : Chaînes de Markov

Exercice 1 (Sous-suites de chaînes de Markov)

1. Soit U, V, W trois variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable E. On suppose que pour tout $u \in \mathbb{N}$ la fonction $(v, w) \mapsto \mathbb{P}(U = u|V = v, W = w)$ est bien définie et ne dépend pas de w. Montrer que
$$\mathbb{P}(U = u|V = v, W = w) = \mathbb{P}(U = u|V = v).$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de noyau de transition P et de loi initiale ν à valeurs dans un ensemble dénombrable E. Étudier si les suites suivantes sont des chaînes de Markov et préciser le cas échéant leur matrice de transition :
   (a) $Y_m = X_{n_m}$, où $(n_m)_{m\geq 0} \subset \mathbb{N}$ est une sous-suite strictement croissante ;
   (b) $Z_n = X_{k+n}$, où $k \geq 1$ est un entier ;
   (c) $W_n = X_{kn}$ où $k \geq 2$ est un entier.
3. Même question pour la suite $V_n = (X_n, X_{n+1})$.

Exercice 2 (Lois jointes conditionnelles d'une chaîne de Markov) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états dénombrable E et de noyau de transition P. Montrer que pour tout $x, y_1, \ldots, y_m$ dans E et $A_0, \ldots, A_{n-1} \subset E$, on a :
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+m} = y_m \,|X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x)\\ &= \quad P(x, y_1)P(y_1, y_2)\ldots P(y_{m-1}, y_m).\end{aligned}$$

Exercice 3 (Fonction mesurable d'une chaîne de Markov) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de noyau de transition P et de loi initiale ν à valeurs dans E un ensemble au plus dénombrable. On considère $f : E \to F$ une fonction mesurable, où F est un ensemble au plus dénombrable, et on note $Y_n = f(X_n)$.

1. Montrer que si f est une bijection entre E et F alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
2. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ avec loi initiale $\nu = (1/3, 1/3, 1/3)$ et de matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Soit $f : E \to F = \{1, 2\}$ donnée par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = 2$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.
3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ de matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
Soit $f : E \to F = \{1, 2\}$ donnée par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = 2$. Montrer que si $\alpha = \beta$ alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

4. On suppose que f est surjective de E dans F telle que

$$\forall y \in F, \forall x, x' \in E \ f(x) = f(x') \implies \mathbb{P}_x(f(X_1) = y) = \mathbb{P}_{x'}(f(X_1) = y).$$

   Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
5. Si f est une bijection entre E et F, la suite des $Z_n = (X_n, f(X_n))$, $n \geq 0$, est-elle une chaîne de Markov ?

Exercice 4 (Être ou ne pas être markovien) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec probabilités $1/2$. Les suites suivantes sont-elles des chaînes de Markov ?

1. $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ quand $n \geq 1$;
2. $M_n = \max\big(S_k : 0 \leq k \leq n\big)$, $n \geq 0$;
3. $Y_n = M_n - S_n$, $n \geq 0$;
4. $V_n = X_n X_{n+1}$.

Utiliser vos conclusions pour répondre à la question suivante : si $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(X'_n)_{n\geq 0}$ sont deux chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est-ce que la suite somme $(X_n + X'_n)_{n\geq 0}$ est nécessairement une chaîne de Markov ?

Exercice 5 (Ruine du joueur I) Un joueur partant d'un capital initial de j euros fait une série de paris à 1 euro. On suppose que les paris sont indépendants, la probabilité de gagner est $p \in]0,1[$. Si au cours des paris, le capital du joueur atteint 0, il est ruiné et ne peut plus jouer : son capital reste nul après. On désigne par X_n le capital du joueur à l'instant n.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, préciser sa matrice de transition.
2. Supposons maintenant que si son capital atteint un seuil $N \in \mathbb{N}^*$, le joueur s'arrête de jouer. Écrire la nouvelle matrice de transition.

Exercice 6 (Chaîne à deux états) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,1\}$ et de probabilité de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

1. Montrer que pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$:

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

   Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0$? On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
2. Vérifier (par récurrence) que, pour toute loi initiale ν :

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n\left(\nu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

3. Si $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers $\mathtt{m}$, loi à identifier. On supposera pour la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$.

4. (*Mesure invariante*) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\mathtt{m}}(X_n \in A) = \mathtt{m}(A)$.
   Écrire cette propriété à l'aide de la matrice P.
5. Calculer $\mathrm{Cov}_{\mathtt{m}}(X_n, X_{n+1}) := \mathbb{E}_{\mathtt{m}}[X_n X_{n+1}] - \mathbb{E}_{\mathtt{m}}[X_n]\,\mathbb{E}_{\mathtt{m}}[X_{n+1}]$.
   Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ sont-elles indépendantes ?
6. Calculer le potentiel de la chaîne. Classifier les états de la chaîne.
7. On note $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbb{E}_{\mathtt{m}}[S_n] = \dfrac{n\alpha}{\alpha+\beta}$ et que $\mathrm{Var}_{\mathtt{m}}(S_n) \leq C\,n$, où C est une constante.
8. (*Loi faible des grands nombres*) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ en probabilité sous $\mathbb{P}_{\mathtt{m}}$, sous $\mathbb{P}_0$ et sous $\mathbb{P}_1$.

Exercice 7 (Bruit qui court) Un message pouvant prendre deux formes (OUI ou NON) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou le déforme avec probabilité $1-p$. Les intermédiaires agissent indépendamment les uns des autres.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov homogène à deux états.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ème intermédiaire soit conforme à l'information initiale.
3. Montrer que quelle que soit la loi initiale ν, la loi du n-ème message converge vers la loi uniforme sur $\{\mathrm{Oui}, \mathrm{Non}\}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8 (Quand les vaches ne regardent pas les trains) Sur une route, en moyenne, trois camions sur quatre sont suivis par une voiture, tandis que seule une voiture sur cinq est suivie par un camion. Déterminer les proportions de voitures et de camions sur cette route.

Exercice 9 (Chaîne météo) Dans une ville des Alpes, le temps est particulièrement variable et alterne chaque jour entre soleil (état 0), pluie (état 1) et neige (état 2). On note X_n l'état du ciel le jour n et on construit un modèle de changement de météo en supposant que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exprimer et calculer si possible les quantités suivantes :

1. Il pleut aujourd'hui : quelle est la probabilité que dans dix jours il fasse beau ?
2. Combien de jours de pluie (en moyenne) on peut craindre durant le mois qui vient ?
3. Discuter des mesures et probabilités invariante de cette chaîne.

Exercice 10 (Urne d'Ehrenfest) Le modèle de diffusion d'Ehrenfest est le suivant : des boules numérotées de 1 à d sont réparties dans 2 urnes, A et B. À chaque instant n, on tire uniformément au hasard un nombre i entre 1 et d et on change d'urne la boule numéro i. On désigne par X_n le nombre de boules dans l'urne A après n tirages indépendants. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1. Donner l'espace d'états et la matrice de transition et classifier les états de la chaîne.
2. Déterminer les mesures invariantes. Sont-elles réversibles ?

Exercice 11 (Chaînes de Markov et martingales) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E au plus dénombrable de loi initiale ν et de matrice de transition $P = (p(x,y))_{x,y\in E^2}$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* (ou *invariante*) si

$$\sum_{y\in E} p(x,y)|f(y)| < +\infty \text{ et } P(x,f) := \sum_{y\in E} p(x,y)f(y) = f(x), \forall x \in E.$$

1. Soit f harmonique et positive telle que $\sum_{y\in E} |f(y)|\nu(y) = \sum_{y\in E} f(y)\nu(y) < +\infty$. Montrer que $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
2. On suppose que E est fini et qu'il y a deux états a et b absorbants : $p(a,a) = p(b,b) = 1$. Soit $\sigma_x := \inf\big(n \geq 0 : X_n = x\big)$ et $T := \sigma_a \wedge \sigma_b$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}\big(\forall n \geq 0, X_n = c \mid X_0 = c\big) = 1$, si $c = a$ ou b.
   (b) On note $P(x,A) = P(x, \mathbf{1}_A)$. On suppose que, pour tout $x \in E\backslash\{a,b\}$, $P(x,\{a,b\}) > 0$ et on note
   $$\xi := \min\big(P(x,\{a,b\}) : x \in E \setminus \{a,b\}\big)$$
   et
   $$A_n := \big\{X_i \neq a, X_i \neq b, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n\big\}.$$
   On suppose que $\xi > 0$. Montrer que :
   $$\mathbb{P}_x(A_n) \leq (1-\xi)^n.$$
   En déduire que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(T < +\infty) = 1$.
3. On ne suppose plus que E est fini mais on suppose que $\mathbb{P}_x(T < +\infty) = 1$ pour tout $x \in E$ et qu'il existe une fonction f harmonique, positive, bornée telle que $f(a) \neq f(b)$. Calculer
   $$\mathbb{P}_x(X_T = a) \text{ et } \mathbb{P}_x(X_T = b).$$
4. *Application* : Étudier le cas où $E = \{0, \dots, N\}$, $N \geq 3$ entier, $p(0,0) = p(N,N) = 1$ et $p(x,x+1) = p(x,x-1) = 1/2$, pour $1 \leq x \leq N-1$.

Exercice 12 (Wright-Fisher et Markov) Soit k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On considère la chaîne de Markov $(X_n^{(N)})_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E := \{0, \dots, N\}$, issue de $X_0^{(N)} := k$ et dont la matrice de transition est donnée par :

$$p(x,y) = \mathbb{P}\big(X_{n+1}^{(N)} = y \big| X_n^{(N)} = x\big) = \binom{N}{y} \left(\frac{x}{N}\right)^y \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-y}.$$

1. Que valent $p(0,k)$ et $p(N,k)$?
2. Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne.
3. Utiliser l'Exercice 11 pour montrer que $(X_n^{(N)})_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge vers une variable $X_\infty^{(N)}$. Que valent les probabilités de fixation en 0 et N ?

4. On modifie le modèle en intégrant des taux de mutation $u, v \in]0,1[$, ie. on considère la chaîne $(\widetilde{X}_n^{(N)})_{n\geq 0}$ dont la matrice de transition est

$$\widetilde{p}(x,y) = \binom{N}{y} \left((1-u)\frac{x}{N} + v\left(1-\frac{x}{N}\right)\right)^y \left((u\frac{x}{N} + (1-v)\left(1-\frac{x}{N}\right)\right)^{N-y}.$$

Déterminer les états récurrents et transitoires pour la chaîne $(\widetilde{X}_n^{(N)})_{n\geq 0}$.

Exercice 13 (Encore un modèle de génétique) Une population cellulaire comprend N cellules qui peuvent être de deux types : A ou a. On passe d'une génération à la suivante en dédoublant chaque cellule mère et en choisissant au hasard N cellules parmi les $2N$ possibles. Les choix successifs à chaque génération sont supposés indépendants des choix des générations précédentes. On note X_n le nombre de cellules de type A à la n-ème génération.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition vaut données par

$$p(x,y) := \frac{\binom{2x}{y}\binom{2(N-x)}{N-y}}{\binom{2N}{N}}, \quad 0 \leq x, y \leq N.$$

2. Montrer que 0 et N sont des états absorbants. Si on note $\sigma_y := \inf(n \geq 0 : X_n = y)$, prouver que :

$$\mathbb{P}_x(\sigma_N < \sigma_0) = x/N \text{ et } \mathbb{P}_x(\sigma_0 < \sigma_N) = 1 - x/N.$$

Exercice 14 (Classification des états) Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transition respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 15 (Classification et probabilités d'absorption I) Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$P := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les états récurrents et les états transitoires.
2. Déterminer la (ou les) probabilité(s) invariante(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 16 (Classification et probabilités d'absorption II) On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les états récurrents et les états transitoires.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.
4. Caculer le temps moyen d'absorption.

Exercice 17 (Ruine du petit joueur) Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'une partie de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leur fortune, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition est donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance n-ème de la matrice P converge vers la matrice P^∞ également donnée ci-dessous.

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^\infty := \lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Classifier les états de la chaîne.
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
3. Si $X_0 \sim \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
4. Montrer que toute probabilité invariante $\mathtt{m}$ pour la chaîne est nécessairement de la forme $\mathtt{m} = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0, 1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 18 (Modèle de Laplace-Bernoulli) N boules noires et N boules blanches sont placées dans deux urnes de sorte que chacune contienne N boules. À chaque unité de temps on choisit au hasard une boule de chaque urne et on les échange. On note alors X_n le nombre de boules noires dans la première urne à la date n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible.
2. Déterminer ses mesures invariantes.

Exercice 19 (Correcteurs distraits) L'épreuve d'un livre est lue par une suite (infinie !) d'éditeurs qui cherchent les fautes. Chaque faute est détectée avec la probabilité $p \in]0,1[$ à chaque lecture. Entre deux lectures, l'imprimeur corrige les fautes détectées, mais (malheureusement) introduit un nombre aléatoire de nouvelles erreurs distribué suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (des erreurs peuvent être introduites même s'il n'y a pas de faute détectée, pff). On suppose que ces phénomenes aléatoires sont indépendants et que les nombres de nouvelles erreurs après chaque lecture sont identiquement distribués. On note X_n le nombre d'erreurs après le n-ème cycle éditeur-imprimeur.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition :
$$p(x,y) := \sum_{k=(x-y)^+}^{x} \binom{x}{k} p^k (1-p)^{x-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y-x+k}}{(y-x+k)!} \quad x, y \geq 0.$$
2. Calculer $\mathbb{E}_x\left[e^{itX_1}\right]$.
3. En déduire la fonction caractéristique de X_1, lorsque X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ. Montrer alors que la loi de Poisson de paramètre λ/p est une mesure invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$.
4. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne irréductible, récurrente et positive.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$.

Exercice 20 (Score du basketteur) Un basketteur teste son habilité au lancer franc. Chaque panier augmente son score (de 1) mais un lancer raté le fait perdre tous les points. On note X_n son score à la date n. On voit $(X_n)_{n\geq 0}$ comme une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de probabilité de transition $P = (p(x,y))_{x,y\geq 0}$ donnée par $p(x,x+1) := \theta_x$, $p(x,0) := 1-\theta_x$, où $\theta_x \in]0,1[$ est la probabilité de marquer le panier lorsqu'il a x point(s).

1. Soit $\tau_0 := \inf\big(n \geq 1 : X_n = 0\big)$. Calculer $u^{(n)}(0,0) = \mathbb{P}_0(\tau_0 = n)$ et déduire la loi de τ_0 sous $\mathbb{P}_0$. En déduire que 0 est un état transitoire si et seulement si $\prod_{x=0}^{\infty} \theta_x > 0$.
2. Étudier la récurrence et la transience des autres états.
3. Calculer $\mathtt{m}(x) = \mathbb{E}_0\Big[\sum_{n=0}^{\tau_0-1} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\Big]$. Vérifier que $(m(x))_{x\geq 0}$ est une mesure invariante lorsque la chaîne est récurrente.

Exercice 21 (Pannes de la photocopieuse) On considère une photocopieuse qui tombe en panne en une suite de dates aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots$ et on suppose que $\xi_1, \xi_2 - \xi_1, \ldots$ sont indépendantes, de même loi. On note $p_0 = 0$ et $p_x := \mathbb{P}(\xi_1 = x)$, $x \geq 1$ entier. On suppose que si la photocopieuse tombe en panne elle est réparée instantanément. Soit X_n la durée entre la date n et la prochaîne panne.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $p(0,x) = p_{x+1}$, $p(x+1,x) = 1$, pour $x \geq 0$.
2. On suppose maintenant $p_x > 0$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que la chaîne est récurrente et irréductible.
3. Calculer la loi de X_1 en fonction de celle de X_0. En déduire que si $\sum_{x\geq 1} x\, p_x < +\infty$, il existe une seule probabilité invariante.

4. Soit $\tau_0 = \inf\big(n \geq 1 : X_n = 0\big)$. Calculer $\mathtt{m}(x) = \mathbb{E}_0\Big[\sum_{n=0}^{\tau_0-1} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\Big]$. Que peut-on remarquer ?

Exercice 22 (Chaîne de naissance et de mort) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition $P = (p(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}^2}$:

$$p(0,0) = r_0,\ p(0,1) = p_0,\ p(x,y) := \begin{cases} p_x & \text{si } y = x+1 \\ r_x & \text{si } y = x \\ q_x & \text{si } y = x-1 \end{cases} \quad \text{pour } x \geq 1,$$

où $0 < p_x, q_x \leq 1$, $p_0 + r_0 = 1$ et pour $x \geq 1$ $r_x \geq 0$, $p_x + q_x + r_x = 1$. On note

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_x := \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} \quad \text{et} \quad \zeta_0 = 1,\ \zeta_x = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}.$$

1. Étudier les fonctions f vérifiant $Pf(y) = f(y)$, $y \in \{a+1, \ldots, b-1\}$, pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ et les exprimer à l'aide des γ_x.
2. Soit $\sigma_y := \inf\big(n \geq 0 : X_n = y\big)$ et $T := \sigma_a \wedge \sigma_b$. Pour $a \leq x \leq b$, montrer que $\mathbb{P}_x(T < +\infty) = 1$ et exprimer $g(x) := \mathbb{P}_x(X_T = b)$ en fonction des γ_x.
3. Exprimer $\{\sigma_0 = +\infty\}$ en fonction des évènements $\{\sigma_z < \sigma_0\}$ et calculer $\mathbb{P}_1(\sigma_z \leq \sigma_0)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_1(\sigma_0 = +\infty)$ et une condition de récurrence de la chaîne en fonction des γ_x.
4. Montrer que toute mesure $\mathtt{m}$ satisfaisant
$$\mathtt{m}(x)p(x,y) = \mathtt{m}(y)p(y,x),\ x, y \in \mathbb{N}$$
est de la forme $\mathtt{m}(x) := \alpha\zeta_x$, $\in \mathbb{N}$. Montrer qu'une telle mesure est invariante.
5. Sous quelles conditions existe-t-il une probabilité invariante ? L'exprimer alors en fonction des ζ_x.
6. On suppose $p_x = p$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $q_x = q$, pour tout $x \geq 1$. Étudier la récurrence de la chaîne selon les valeurs de p, q. Sous quelles hypothèses sur p et q existe-t-il une probabilité invariante ? Caractériser selon p et q la transience, récurrence nulle et récurrence positive de la chaîne.

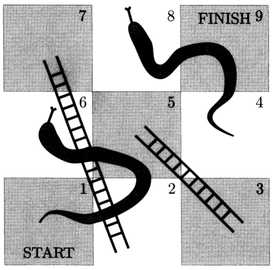
Exercice 23 (Entomologie) Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect.

1. Quelles sont les probabilités invariantes (resp. réversibles) des deux dynamiques ?
2. Dans les deux cas, estimer lorsque n est grand la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 24 (La souris et le conditionnement) Une souris se promène sur un domaine carré à 4×4 cases (les déplacements diagonaux sont interdits). À chaque étape, elle passe de la case qu'elle occupe à l'une des r cases voisines adjacentes avec la probabilité $1/r$ (si une case est centrale : $r = 4$; si une case est au bord, mais pas dans un coin : $r = 3$; si une case est dans un coin : $r = 2$). On note X_n la position de la souris à l'étape n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente.
2. Calculer la probabilité invariante de la chaîne.

Exercice 25 (Serpents et échelles)



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?

Exercice 26 (Niveaux et excursions de la marche aléatoire simple) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_a := \inf(n \geq 0,\, S_n = a)$ le temps d'atteinte de a par la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, σ_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Montrer que $(\sigma_{a+1} - \sigma_a)_{a\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires *iid*.

On pose $\tau_0^{(0)} := 0$ et par récurrence, on définit $\tau_0^{(n+1)} := \inf\big(n > \tau_0^{(n)} \,:\, S_n = 0\big)$ le $(n+1)$-ème temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

3. Montrer que la loi de $\Delta_0^{(n)} := \tau_0^{(n+1)} - \tau_0^{(n)}$ ne dépend pas de $n \geq 0$.
4. Montrer que les excursions de la marche entre deux retours consécutifs en 0
$$\Big(S_{\tau_0^{(k)}}, S_{\tau_0^{(k)}+1}, \dots, S_{\tau_0^{(k+1)}-1}, S_{\tau_0^{(k+1)}}\Big), \quad k \geq 0,$$
sont indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 27 (Ruine du joueur II) Un joueur dispose d'un capital de x euro. À chaque date n, il mise 1 euro sur le résultat d'un lancer de pièce, les lancers successifs sont modélisés par une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Il arrête de jouer lorsqu'il est ruiné. On note X_n le capital du joueur après le n-ème lancer. On cherche la probabilité que le joueur soit ruiné en un temps fini, ie. $H_x := \mathbb{P}_x\big(\exists n \geq 0 \,:\, X_n = 0\big)$.

1. Montrer que $(X_n)_{\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Préciser sa matrice de transition.
2. Indiquer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(H_x)_{x\in\mathbb{N}}$ et conclure.

Exercice 28 (Réversibilité sur le cercle discret) On fixe $r \geq 2$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, dont la matrice de transition est donnée par $P(x, x+1) = p$, $P(x, x-1) = 1 - p$ où $0 < p < 1$. Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $p = 1/2$.

Exercice 29 (Chaîne serpent) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E de transition P. Pour $\ell \geq 1$, on définit une nouvelle suite à valeurs dans $F = E^{\ell+1}$ en posant $Y_n := (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\ell})$.

1. Montrer que c'est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si on restreint l'espace d'états à

$$\widetilde{F} = \big\{(x_0, \ldots, x_\ell) \in E^{\ell+1} \,:\, P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)\ldots P(x_{\ell-1}, x_\ell) > 0\big\}.$$

3. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ a une probabilité invariante $\mathtt{m}$, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ a aussi une probabilité invariante.

Exercice 30 (Estimation des probabilités de transition) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, irréductible apériodique récurrente positive, de probabilité invariante $\mathtt{m}$.

1. Quelle est la probabilité invariante de la chaîne $\big((X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+\ell})\big)_{n\geq 0}$?
2. En déduire que si $g : E^{\ell+1} \to \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathbb{E}_{\mathtt{m}}[g(X_0, \ldots, X_\ell)] < +\infty$, alors pour toute loi initiale ν, $\mathbb{P}_\nu$-presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}) \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathtt{m}}[g(X_0, \ldots, X_\ell)].$$

On suppose que $P = (P(x,y))_{x,y\in E}$ et $\mathtt{m}$ sont inconnues. On souhaite estimer les probabilités de transition $P(x,y)$ à l'aide de la seule observation d'une trajectoire $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$.

3. Soit $(x,y) \in E^2$, déterminer les limites presque sûres lorsque n tend vers l'infini de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k = x, X_{k+1} = y\}}.$$

4. En déduire un estimateur consistant (ie. convergent) de la probabilité de transition $P(x,y)$.