
Fiche de TD n° 1 : Conditionnement

Exercice 1 (Doob-Dynkin) Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Montrer que Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $Y=h(X)$.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance conditionnelle)
Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X,Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}[X^2],\mathbb{E}[Y^2]<+\infty$. Établir l'inégalité

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2\le\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\ \mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]\quad\text{ps.}$$

On pourra remarquer que $\mathbb{E}[(X+\theta Y)^2|\mathcal{G}]\ge 0$ ps pour tout $\theta\in\mathbb{Q}$.

Exercice 3 (Produit) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[X\ \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big]=\mathbb{E}\big[Y\ \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big].$$

Exercice 4 (Variables positives et conditionnement) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux négligeables près) qui contient $\{X>0\}$.

Exercice 5 (Variance conditionnelle) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On définit $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}):=\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}))]^2|\mathcal{G}\big]$ la variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\big[\,\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\big]+\mathrm{Var}\,\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big).$$

Exercice 6 (Conditionnement et égalité ps) Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et X, Y deux variables aléatoires réelles intégrables. On suppose que $\mathbb{E}[Y|X]=X$ et $\mathbb{E}[X|Y]=Y$ ps. Montrer que $X=Y$ ps.
Indication. On pourra remarquer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ fixé on a

$$\mathbb{E}\big[(X-Y)\mathbf{1}_{\{Y\le x<X\}}\big]=\mathbb{E}\big[(Y-X)\mathbf{1}_{\{x<X,x<Y\}}\big]\ge 0.$$

Exercice 7 (Inégalité de Hölder version conditionnelle) Soit $p,q>1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire $1/p+1/q=1$. On rappelle l'inégalité de Young, pour tous $x,y\ge 0$, $xy\le x^p/p+y^q/q$. Soit $X\in L^p$ et $Y\in L^q$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On note $G:=\{\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]>0\}\cap\{\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}]>0\}$.

1. En appliquant l'inégalité de Young, montrer que, sur G,

$$\frac{|XY|}{\big(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}]\big)^{1/q}}\le\frac{|X|^p}{p\,\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]}+\frac{|Y|^q}{q\,\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}]}.$$

2. Soit $G_X:=\{\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]=0\}$. Montrer que, sur G_X, X est nulle p.s.

3. En déduire l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}\big[|XY| \mid \mathcal{G}\big] \leq \big(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}]\big)^{1/q} \quad \text{ps.}$$

Exercice 8 (Espérance conditionnelle par rapport à la somme) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées intégrables. On définit $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \mathbb{E}[X_i|S_n]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.

Exercice 9 (Singletons, tribu et conditionnement) On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \big(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda\big)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soit X la variable aléatoire définie par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble formé des parties $A \subseteq]0,1[$, telles que A ou A^c est dénombrable.

1. Vérifier que $\mathcal{G}$ est une tribu. Quel est le lien entre $\mathcal{G}$ et les singletons de $]0,1[$?
2. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement.

Exercice 10 (Conditionnement poissonnien) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes, où X_j suit une loi de Poisson de paramètre λ_j.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \dots + X_n$.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}\big(X_j = \ell \mid X_1 + \dots + X_n = k\big)$.

Exercice 11 ((Non-)Extension d'une propriété de l'espérance conditionnelle)
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \big(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda\big)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et les variables aléatoires $X = \mathbf{1}_{[0,3/4[}$, $Y = \mathbf{1}_{[0,1/2[}$ et $Z = \mathbf{1}_{[1/4,3/4[}$.

1. Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes d'où $\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[Y]$ ps.
2. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$, $\mathbb{E}[Y|X,Z]$ et vérifier que $\mathbb{E}[Y|X,Z] \neq \mathbb{E}[Y|X]$ même si Y et Z sont indépendantes.

Exercice 12 (Projection gaussienne)

1. Soit (X,Y) un couple gaussien centré défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En utilisant la propriété de projection de l'espérance conditionnelle montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = cX$ ps où $c = \mathbb{E}[XY]/\mathbb{E}[X^2]$.
2. Soit $(X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur gaussien centré et $(a_1, \dots, a_d)^t$, $(b_1, \dots, b_d)^t \in \mathbb{R}^d$. On définit $Y = a_1X_1 + \dots + a_dX_d$ et $Z = b_1X_1 + \dots + b_dX_d$. Exprimer $\mathbb{E}[Z|Y]$.

Exercice 13 (Somme aléatoire de variables aléatoires) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables de même loi avec pour espérance commune $m = \mathbb{E}[X_1]$ et N une variable aléatoire discrète indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, de moyenne finie. On pose $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$.

1. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\big[S_N \,|N\big]$.
2. En déduire $\mathbb{E}\big[S_N\big]$.

Exercice 14 (Amincissement de variables aléatoires) Soit (X,Y) une couple de variables aléatoires, et $n \in \mathbb{N}$, $p, \pi \in [0,1]$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que si $Y \sim \mathcal{B}(n, \pi)$ (loi binomiale) et $\mathcal{L}(X|Y=k) = \mathcal{B}(k,p)$ pour tout $0 \leq k \leq n$, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p\pi)$.

2. Montrer que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson) et $\mathcal{L}(X|Y = n) = \mathcal{B}(n, p)$ pour tout $n \geq 0$, alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
3. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *iid* $\mathcal{E}(\lambda)$ (loi exponentielle) et $Y \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique). Montrer que $X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda p)$.

Exercice 15 (Somme de variables exponentielles et conditionnement)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $T := X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_1|T)$. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Exercice 16 (Exemple de conditionnement discret) Soit $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{i,j} = \begin{cases} n!\, \frac{p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{i!j!(n-i-j)!}, & \text{si } i + j \leq n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X, Y) tel que $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{i,j}$.
2. Trouver les lois de X et de Y ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X.
3. Calculer $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 17 (Encore des exemples de conditionnements discrets)

1. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Déterminer $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.
2. Soit $X_1, \ldots, X_p$ des variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + X_2 + \ldots + X_p = n$.

Exercice 18 (Conditionnement et indépendance) Soit ε une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prenant seulement les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que ε est indépendante de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathbb{E}\big[\varepsilon\,|\mathcal{G}\big] = 0$.

Exercice 19 (Intégrabilité et espérance conditionnelle)

1. Soit X une variable aléatoire ayant la densité $f_X(x) := x^{-2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$ et soit $Y = X$. Montrer que $\mathbb{E}[X] = +\infty$, mais que $\mathbb{E}[X|Y] < +\infty$ ps.
2. Même question pour le couple aléatoire (X, Y) ayant la loi jointe donnée par $p_{i,j} := \big(i(i+1)\big)^{-1}\delta_{i,j}$, pour $i, j = 1, 2, \ldots$.

Exercice 20 (Calcul d'espérance conditionnelle) Trouver la loi conditionnelle et l'espérance conditionnelle de X sachant Y, lorsque la densité du couple (X, Y) est donnée par :

1. $f(x, y) = y\, e^{-y(x+1)}\mathbf{1}_{\{x,y\geq 0\}}$.
2. $f(x, y) = 4y(x - y) \exp(-(x + y))\mathbf{1}_{\{0\leq y\leq x\}}$.

Exercice 21 (Conditionnement par le maximum) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables ayant la même densité de probabilité $f(x)$ et $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ sa version réordonnée, ie. $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ presque sûrement.

1. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{(1)}$ sachant $X_{(n)} = x_n$ et $\mathbb{E}[X_{(1)}|X_{(n)}]$.
2. Particulariser au cas où les variables aléatoires X_i sont uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 22 (Loi conditionnelle et loi du couple) Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi de Poisson de paramètre y.

1. Calculer les lois du couple (X, Y), de X, ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Montrer que $\mathbb{E}\big[(X - Y)^2\big] = 1$, en conditionnant d'abord par rapport à Y et ensuite par rapport à X.

Exercice 23 (Suite construite par conditionnement) Une variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

— Si $X_1 = x_1$, alors X_2 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_1, x_1 + 1]$.
— Si $X_2 = x_2$, alors X_3 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_2, x_2 + 1]$.
— Les variables aléatoires $X_4, \dots, X_n$ sont définies de la même manière pour tous $n \geq 4$.

Calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

Exercice 24 (Exemples de conditionnements gaussiens) On considère un vecteur gaussien $(X, Y)^t$ de moyenne $m = (1, -1)^t$ et de matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la densité du vecteur $(X, Y)^t$. Quelle est la loi de X ? de Y ? de $X + Y$?
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\big[X|Y\big]$. Quelle est sa loi ?
3. Si (U, V) est un vecteur gaussien centré réduit, que vaut $\mathbb{E}\big[U\,|U + V\big]$? Retrouver le résultat géométriquement. Et si $\mathrm{Cov}(U, V) \neq 0$?

Exercice 25 (Conditionnement gaussien par un couple) Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le vecteur aléatoire X admet-il une densité ?
2. Déterminer $\mathbb{E}\big[X_1|X_2\big]$ et $\mathbb{E}\big[X_1|X_2, X_3\big]$.
3. Mêmes questions que ci-dessus lorsque

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$