III Diffusion de Brox : lien avec la marche de Sinai

Le but est de voir le lien formel entre la marche aléa de Sinai et la diffusion de Brox

1. Rappels sur la m. de Sinai et d. de Brox
2. Un premier résultat : le thm Seignourel (positif mais moins pratique)
3. Un autre point de vue de l'approximation de la d. de Brox par de m a. (diffusion dans des potentiels)
4. Etre plus précis : vitesse de conv. ?

Aparté P. Mathieu '95 introduit un modèle en dim > 1

$(B(x) : x \in \mathbb{R}^d)$ un champ aléatoire

$V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

(β_t) m. b. d-dim $\perp\!\!\!\perp$ $W = B + V$

$$\begin{cases} dX_t = d\beta_t - \frac{1}{2} \nabla W(X_t)\,dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

V et B continues

· $V(0) = 0$, $B(0) = 0$,

· prop de scaling du champ aléa

$$\left(\frac{1}{c} B(c^\beta x)\right)_{x \in \mathbb{R}^d} \overset{loi}{=} \left(B(x)\right)_{x \in \mathbb{R}^d}$$

· $\{x : B(x) < 1\}$ a des composantes connexes bornées

X^W la sol de l'eds avec $W \in C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$

P_f^W loi de X^W avec c.i. de densité f : X_0.

$$\mathbb{P}_f(\cdot) = E^Q\left(P_f^W(\cdot)\right)$$

$\left(\frac{X_t^W}{(\log t)^\beta} : t \geq 0\right)$ est tendue sous $\mathbb{P}_f$ et

+ hypo technique

$$\frac{X_t}{(\log t)^\beta} \xrightarrow[t \to \infty]{loi} \mu$$

(basé sur les formes de Dirichlet '94 – '97)

1. $\omega = (\omega_x : x \in \mathbb{Z})$ famille de va

i.i.d à val ds $(0,1)$ tq la loi commune

η satisfait $\eta(\omega_x \in [K, 1-K]) = 1$

où $K \in (0, \frac{1}{2})$

+ l'hypo de recurrence $\int \ln\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) \eta(d\omega) = 0$

autrement dit $\xi_x = \ln\left(\frac{1-\omega_x}{\omega_x}\right)$ est

centrée

$$\omega_x = \frac{1}{1+e^{\xi_x}}$$

Donné l'environ. ω on construit la marche de

Sinai $\mathbb{P}^\omega(S_{n+1} = x+1 \mid S_n = x)$

$$= 1 - \mathbb{P}^\omega(S_{n+1} = x-1 \mid S_n = x)$$

quenched

$$= \omega_x = \frac{1}{1+e^{\xi_x}}$$

Sous $\mathbb{P}^\omega$ le proc (S_n) est une ch. de Markov

sur $\mathbb{Z}$ avec matr de transition

$$T^d f(x) = \omega_x f(x+1) + (1-\omega_x) f(x-1)$$

le generateur associé $T^d - I$ (habituellement

on prend $I - T^d$)

$$\sigma^2 = \int \left(\ln\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)\right)^2 \eta(d\omega) < \infty$$

" variance de ξ_x

L'analogie entre la m. de Sinai et la d. de Brox n'est pas simple. Heuristique : en chaque point de $x \in \mathbb{Z}$ le milieu discret est randomisé d'une façon indép et avec la même loi. Dans le cas continu le choix de

$$W(x) = \begin{cases} \sigma W_1(x) : & x \geq 0 \\ \sigma W_2(-x), & x < 0 \end{cases}$$

imite la même propriété (car W' est bruit blanc)

L'analogie est surtout basée sur les résultats asymptotiques : pour $\sigma > 0$

$$\frac{\sigma^2 S_n}{(\ln n)^2} \xrightarrow{loi} b_\infty$$

$$(\sigma = 1) \qquad \frac{X_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow{loi} b_\infty$$

Peut-on être plus précis du point de vue relation ?

2. Travail de Seignourel '99

Est-ce que on a un principe de "type Donsker" : $\left(\frac{S_{[nt]}}{(\ln n)^2} : t \geq 0 \right)$ converge au sens de proc vers le modèle de Brox ?

Non : car on sait $\frac{\sigma^2 S_{[nt]}}{(\ln n)^2} \xrightarrow{loi} b_\infty$

Il faut approcher la diff de Brox avec une échelle et en modifiant le milieu à chaque itération

<u>Thm (Seignourel)</u> Soient les v.a. $(\omega_x^m : m \geq 1, x \in \mathbb{Z})$

t.q.
- $\forall m \geq 1$ (ω_x^m) i.i.d.
- $\eta\left(K \leq \omega_0^1 \leq 1-K\right) = 1$, $K \in (0, 1/2)$
- ξ_0^1 centrée de variance σ^2

Supp de plus que

$$\forall m \geq 1 \; \forall x \in \mathbb{Z} \quad \omega_x^m \overset{loi}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\omega_0^1}{\omega_0^1} \right)^{1/\sqrt{m}}} = \frac{1}{1 + e^{\xi_0^1/\sqrt{m}}} \quad (\#)$$

On note pour chaque $m \geq 1$, $(S_n^m : n \geq 0)$
la marche alé de Sinai associée au milieu $(\omega_x^m : x \in \mathbb{Z})$
Alors

$$\left(\frac{S^m_{[m^2 t]}}{m} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[\substack{\text{sur} \\ \mathcal{D}([0,\infty))}]{\text{loi}} \left(X_t^{W} : t \geq 0 \right)$$

Rq 1) (#) implique que le milieu converge vers la masse de Dirac en $1/2$ qd $m \to \infty$

2) On peut obtenir une approximation de la diffusion dans un potentiel poissonien

$$dX_t = d\beta_t - \frac{1}{2} V'(X_t)\,dt$$

p. de Poisson (indexé par $\mathbb{R}$)

Soit $(\alpha_x : x \in \mathbb{Z})$ va iid $B(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$

$$\gamma_x = \begin{cases} \alpha_1 + \cdots + \alpha_x, & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{-x+1}), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$ soit $\tau(k) = \inf \{ x \in \mathbb{Z} : \gamma_x = k \}$

Suite de "portes" avec $(\tau(k+1) - \tau(k) : k \in \mathbb{Z})$ iid $\mathcal{G}(\alpha)$

Entre deux "portes" on fait marcher une m a simple (Z_n) telle que en arrivant à une porte elle continue à droite avec proba p (et à gauche proba $1-p$)

$$\mathbb{P}^{\tau}\left(Z_{n+1} = x+1 \,\middle|\, Z_n = x\right) = 1 - \mathbb{P}^{\tau}\left(Z_{n+1} = x-1 \,\middle|\, Z_n = x\right)$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } \alpha_x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, $m \geq 1$, $m \geq \lambda$

$(\gamma_x^m : x \in \mathbb{Z})$ comme ci-dessus mais avec de va de Bernoulli de param λ/m et (Z_n^m) une m a aléa simple comme précédement

Alors $$\left\{ \frac{Z^m_{[m^2 t]}}{m} : t \geq 0 \right\} \xrightarrow[m \to \infty]{\text{loi}} \left\{ X_t^V : t \geq 0 \right\}$$

où X^V est la diffusion sol de l'eds

$$dX_t^V = d\beta_t - \frac{1}{2} V'(X_t)\, dt \quad \text{où}$$

$$V(x) = \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) N_x, \quad (N_x : x \in \mathbb{R} \text{ proc de Poisson de param } \lambda)$$

Idee de preuve du thm de Seignourel : on considère des milieux discrets comme des potentiels pour des diffusions et on remarque que ces processus construits ainsi dans des tps d'arrêt bien précis sont proches des m. a. discrètes

<u>1er pas</u> : resultat de cv des sol d'eds avec potentiel qd il y a cv des potentiel

Propo 1 V_n, $n \geq 1$, V potentiels ds $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$

i) V cont par morceau avec points de discontinuités $(a_x : x \in \mathbb{Z})$ (dénombr)

ii) $X_t^V = (\Delta_V^{-1} \circ \beta \circ T_V^{-1})(t)$ est défini sur $[0, +\infty)$

iii) $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} V$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

(en fait cela signifie $V_n \xrightarrow[{[a_{x_i}, a_{x_{i+1}}]}]{u} V$

Soient d_n, $n \geq 1$, d des reels tq $d_n \to d$

Alors $(X_t^{V_n} : t \geq 0)$ issus de d_n cv. ds $C([0,\infty))$ en loi vers $(X_t^V : t \geq 0)$ issue de d.

Rq iii) : V_n unif^t borné sur chaque compact

+ i) : $V_n \xrightarrow{pp} V \underset{\text{cv dominée}}{\Longrightarrow}$ $s_{V_n} \xrightarrow{u} s_V$

$$s_V(x) = \int_0^x e^{V(y)} dy$$

$f_n, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont, strict^t crois $f_n \xrightarrow[\text{compact}]{u} f$

alors $f_n^{-1} \xrightarrow[\substack{\text{compacts} \\ (l,r)}]{u} f^{-1}$ $l = f(-\infty)$, $r = f(+\infty)$

"Preuve de P1" $\tilde{\beta}(t)$. m. b standard.

$$\beta(t) = \tilde{\beta}(t) + s_V(d) \qquad t \geq 0, n \geq 1$$

$$\beta_n(t) = \tilde{\beta}(t) + s_{V_n}(d_n)$$

On note $X_t^{V_n, \beta_n} = s_{V_n}^{-1} \circ \beta_n \circ T_{V_n}^{-1}(t)$

$$X_t^{V, \beta} = s_V^{-1} \circ \beta \circ T_V^{-1}(t)$$

$$T_V(r) = \int_0^r \exp\left(-2V(s_V^{-1} \circ \beta(u))\right) du, \quad 0 \leq r < \infty$$

On montre que : $V_n(s_{V_n}^{-1} \circ \beta_n(s)) \longrightarrow V(s_V^{-1} \circ \beta(s))$

$\forall s \leq t$ tq V est cont$_g$

dans $s_V^{-1} \circ \beta(s)$ (et Leb($s \le t$: V pas cont en $s_V^{-1} \circ \beta(s)$) $= 0$)

On m q. p.s. $\forall t \in (l, r)$

$$T_{V_n} \xrightarrow[{[0,t]}]{u} T_V$$

On sait que $\beta_n \xrightarrow[\substack{\text{comp sur} \\ \text{tt comp de } \mathbb{R}_+}]{u} \beta$ et on combine les 3 cv uniformes

$\square$

<u>2ème pas</u>) Utiliser des potentiels constants par morceaux

<u>Propo 2</u> Soit $r > 0$, $(\alpha_x : x \in \mathbb{Z})$ des réels

$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto V(y) = \alpha_x$ pour $y \in [rx, r(x+1))$

On note $(X_t^V : t \ge 0)$ diff ds le potentiel V issue de 0 et on pose $Y_t = X^V_{\tau_t}$

où $\tau_t = \sup\{ s \le t : X_s^V \in r\mathbb{Z} \}$

Alors $(Y_t : t \ge 0) \overset{\text{loi}}{=} (U_t : t \ge 0)$ où

$U_t = r\Sigma_n \quad , \quad t \in [R_n, R_{n+1})$

avec

$R_n = T_1 + \dots + T_n$, $R_0 = 0$, $T_1, \dots, T_n$

i.i.d. de loi du tps sortie de $[-r, r]$ d'un

m.b standard

et Σ_n m a sur $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}\left(\Sigma_{n+1} = x+1 \mid \Sigma_n = x\right) = 1 - \dots$$

$$= \frac{e^{-\alpha_x}}{e^{-\alpha_{x-1}} + e^{-\alpha_x}}$$

lié : à 2 exercices de Revuz-Yor III 2.24

XII 2.16

(m.b de Walsh)

<u>3ème pas</u> Modèle discret un peu modifié

<u>Propo 3</u> Soient $(\omega_x^m)_{m \geq 1, x \in \mathbb{Z}}$ t.q dans le thm

et on note $(S_n^m : n \geq 0)$ la marche de Sinai

associée à $(\omega_x^m)_{x \in \mathbb{Z}}$

$R_0^m = 0$, $R_n^m = T_1^m + \dots + T_n^m$ où

$(T_n^m : n \geq 1)$ i.i.d loi commune τ_m

tps sortie d'un m.b standard de $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

On pose $U_t^n = \frac{1}{n} S_n^n$ si $t \in [R_n^n, R_{n+1}^n)$

Alors $(U_t^n : t \geq 0) \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)]{\text{loi}} (X_t^{\sigma W} : t \geq 0)$

Idée : $V^n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^{[ny]} \xi_x^1 & , \text{si } [ny] \geq 1 \\ 0 & , 0 \leq [ny] < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=[ny]+1}^{0} \xi_x^1 & , [ny] < 0 \end{cases}$

$V^n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \sigma W$ sur $C(\mathbb{R})$ (donc unif^t comp)

(P1) $(X_t^{V_n}) \longrightarrow (X_t^{\sigma W})$

$\left(V^n\left(\frac{x+1}{n}\right) - V^n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\xi_x^1}{\sqrt{n}}\right)_{x \in \mathbb{R}}$ iid mais sur $\mathbb{Z}$

$\downarrow$

$X_t^{V_n}$ sol de l'eds avec V^n

$Y_t^n = X_{\tau_t}^{V_n}$, $\tau_t = \sup\{s \leq t : X_s \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}\}$

P2 : $(Y_t^n)_{t \geq 0}$ et $(U_t^n)_{t \geq 0}$ ont m loi

$\forall n \geq 1$: $|X_t^{V_n} - Y_t^n| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

(S_n^m) , $\hat{S}_t^m = \frac{1}{m}\left(S^m_{[m^2t]} + (t-[m^2t])(S^m_{[m^2t]+1} - S^m_{[m^2t]})\right)$

$t \geq 0$

cv. marginales de rang fini + tension

- R_n^m ? $\quad \tau_1$ le tps de sortie du m.b de $[-1,1]$: $E(e^{-u\tau_1}) = \frac{1}{\cosh\sqrt{2u}}$

$E(\tau_1) = 1$, variance v

$R_n^m = \frac{R_n^1}{m^2} \Rightarrow E(R_n^m) = \frac{n}{m^2}$

$Var(R_n^m) = \frac{nv}{m^4}$

donc la distance entre t et n, $\forall t \in [R_n^m, R_{n+1}^m)$

est de l'ordre m

- thm de comparaison pour les m.a

$p = (p_x)_{x\in\mathbb{Z}}$, $\pi = (\pi_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ tq

$p_x \leq \pi_x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

alors on peut construire 2 m.a associées à p resp π issus de m̂ point $d \in \mathbb{Z}$ tq

$X_n \leq Y_n$, $\forall n$ ps.

3. Un autre point de vue (Tristan Haugomat)

On peut étudier des pb de martingale associés aux potentiels

$$\mathcal{V} = \left\{ V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable }, e^{|V|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \right\}$$

pour une topologie "polonaise" ssi $V_n \to V$

$$\forall M > 0 \quad \int_{-M}^{M} \left| e^{V_n(a)} - e^{V(a)} \right| V \left| e^{-V_n(a)} - e^{-V(a)} \right| da \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

<u>Thm 1</u> (de cv)

- $\forall V \in \mathcal{V}$, L^V est le géné d'une famille (<u>localt</u>) fellerienne $(\mathbb{P}_a)$ sol de pb de mtgle associée à L_V issues de $a \in \mathbb{Z}$
- $V_n \underset{\text{topo } \mathcal{V}}{\longrightarrow} V$ alors $L^{V_n} \underset{(f,g) \in C_0(S) \times C(S)}{\longrightarrow} L^V$ au sens où $\forall f \in L^V$, $\exists$ pour chaque n $f_n \in \mathcal{D}(L^{V_n})$ tq $f_n \xrightarrow{C_0} f$, $L^{V_n} f_n \xrightarrow{C} L^V f$

Thm 2 $g_{n,k} \in \mathbb{R}$, $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$

(P_k^n) la loi d'une m.a sur $\mathbb{Z}$ avec proba $p = \dfrac{1}{e^{g_{n,k}}+1}$ d'aller à droite

$$V_n(a) = \sum_{k=1}^{[a/\varepsilon_n]} g_{n,k} \mathbb{1}_{a\geq\varepsilon_n} - \sum_{k=0}^{-[a/\varepsilon_n]-1} g_{n,-k}\mathbb{1}_{a<0}$$

Supp $V_n \xrightarrow[\text{top } \mathcal{V}]{} V$. Alors sous $\mathbb{P}^n_{a_n}$, $a_n \to a$

$$\varepsilon_n Y_{[t/\varepsilon_n^2]} \xrightarrow{\text{loi}} P_a$$

chaîne canonique sur $\mathbb{Z}$

fam fellerienne associée à L^V

Coro $(g_{n,k})$ v.a., (Z_k^n) v.a., ε_n v.a positives

m.a. sur $\mathbb{Z}$ avec proba d'alle à droite sachant $(\varepsilon_n, g_{n,k})$

$$\frac{1}{e^{g_{n,Z_k^n}}+1}$$

On note $W_n(a)$ le même potentiel (aléatoire)

Soit Z et W t.q. $\mathcal{L}(Z|W)$ est la sol du pb mngle associé à L^W

$\varepsilon_n \xrightarrow{\text{loi}} 0$, $\varepsilon_n Z_n \xrightarrow{\text{loi}} Z$, $W_n \xrightarrow[\text{topo } \sigma]{\text{loi}} W$

Alors $\varepsilon_n Z^n_{[t/\varepsilon_n^2]} \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)]{\text{loi}} Z$

· $q_{n,k} = \sqrt{\varepsilon_n}\, q_k \overset{\text{Donsker}}{\Longrightarrow} W_n \longrightarrow \sigma W$

(q_k) iid centrées de variance σ^2

et donc le Thm Seignourel (pas besoin de supp compact)

· $(q_{n,k})$ va iid $\begin{cases} = q \text{ avec proba } \lambda\varepsilon_n \\ = 0 \text{ avec proba } 1-\lambda\varepsilon_n \end{cases}$

$W_n \xrightarrow{\text{loi}} W$, $W(a) = q N_{\lambda a}$, N proc de Poisson

on trouve le thm de Seignourel standard avec la diffusion de Carmona

· (q_{nk}) v.a iid tq $W_n \xrightarrow{\text{loi}} W$ avec W proc de Lévy (sur $\mathbb{R}$) alors on retrouve un thm de cv vers diff avec pot de Lévy

4. Convergence : vitesse ?

$$\mathcal{L}^d f(x) = \frac{1}{2} \Delta^d f(x) + 2\, \dot{U}(x)\, \hat{\nabla} f(x)$$

d : m.a de Sinai

où $\Delta^d f(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$

$\hat{\nabla} f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right).$

$\dot{U}(x) = \omega_x - \frac{1}{2}$

Modulo une : accélération en tps et un !
chgt d'échelle dans l'espace avec $\varepsilon_n \to 0$
$(1/\sqrt{n} \to 0)$

$$\xi_x^n = \sqrt{\varepsilon_n}\, \xi_x \quad , \quad \omega_x^n = \frac{1}{1 + e^{\xi_x^n}}$$

grille $\varepsilon_n \mathbb{Z}$, $T^n f(x) = \omega_x^n f(\varepsilon_n(x+1)) + (1-\omega_x^n) f(\varepsilon_n(x-1))$

et l'opé $\mathcal{L}^n$

$S_t^n = \hat{S}^n_{[t/\varepsilon_n^2]}$ où $\hat{S}^n$ m.a avec transition T^n sur $\varepsilon_n \mathbb{Z}$

Vitesse de cv

- m.a $\rightsquigarrow$ potentiel brownien
- m.a $\rightsquigarrow$ le bruit brownien

Komlos - Major - Tusnady : soit F une f rep d'une loi centrée, réduite.

Alors $\exists (X_n), (Y_n)$ tq

- (X_n) iid f rep F, $S_n = X_1 + \dots + X_n$
- (Y_n) iid $N(0,1)$, $T_m = Y_1 + \dots + Y_m$

et $\exists \lambda > 0$

$\forall x \geq 0$ $\quad \mathbb{P}\left(\max\limits_{1 \leq m \leq n} |S_m - T_m| > c \log n + x \right) \leq K e^{-\lambda x}$

$\forall n \geq 1$

X. Geng (Melbourne), S. Tindel (Purdue)

F f rep, $\exists$ m b B_t, et de v.a. $(X_{n,m})$ iid f rep F tq $X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left((m - nt) S^{(n)}_{m-1} + (nt - m + 1) S^{(n)}_m \right)$

$S^{(n)}_m = X_{n,1}, \dots, X_{n,m}$ $\qquad t \in \left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right]$

Alors $\left\| \| X^{(n)} - B \|_\alpha \right\|_{L^q} \leq C_{\alpha,\eta,q} \frac{\log n}{n^\eta}$

$\forall q > \frac{1}{1-\alpha-\eta}$ où $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\eta \in \left(0, \frac{1}{2} - \alpha\right)$

$$\| X^{(n)} - B \|_\alpha = O(n^{-\delta})$$

En préparation...