14 avril 21

II Diffusion de Brox : outils et résultats

$$\begin{cases} dX_t = dB_t - \frac{1}{2} W'(X_t)\,dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

où W est un m.b indexé par $\mathbb{R}$

Brox '86 Schumacher '85

P^W, P^Q, Q loi m.b W, $\mathbb{P}(\cdot) = E^Q\left(P^W(\cdot)\right)$

quenched — anealed

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{loi}} b_\infty$$

loi non-gaussienne non-triviale

1) idée de Brox : cas récurrent

2) milieu brownien avec dérive W remplacé par $W_K(x) = W(x) - \frac{K}{2} x$ cas transient

3) Grandes déviations / Déviations modérées

4) D'autres situations : temps local, dim supérieure

5) Situation d'un environnement de Lévy

1) $\mathcal{W}$ l'espace de Wiener $C_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$W \in \mathcal{W}$, $W(0)=0$, Q la mesure de Wiener (loi du m.b) invariante sous

$$W \longmapsto W^\alpha \quad \text{où} \quad \left(W^\alpha(x)\right)_{x\in\mathbb{R}} \overset{loi}{=} \left(\alpha^{-1} W(\alpha^2 x)\right)_{x\in\mathbb{R}}$$

($\frac{1}{2}$-autosimilarité)

Thm (Brox) : $\exists\, m_1 : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ fct mesurable

tq. $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int P\left(\left|\alpha^{-2} X(W, e^\alpha) - m_1(W^\alpha)\right| > \delta\right) Q(dW) = 0$$

P : proba sur l'e.p. où B est défini

Pour W fixé (X_t) sol d'EDS : $X_t = X(W,t)$

1er pas : reformuler le thm à l'aide de l'autosimilarité du milieu et du m.b. β

$$X_t = \left(A_W^{-1} \circ \beta \circ T_W^{-1}\right)(t)$$

$$A_W(x) = \int_0^x e^{W(y)} dy,$$

$\tau(r) = \inf\{t>0 : \beta(t) > r\}$, $r>0$

$$T_W(r) = \int_0^r \exp\left(-2W\left(s_W^{-1}(\beta(s))\right)\right) ds$$

En effet $\beta_t^\alpha \overset{not}{=} \alpha^{-2}\beta_{\alpha^4 t} \overset{loi}{=} \beta_t$

<u>Lemme</u> $\left(X(\alpha W^\alpha, t) : t \geq 0\right) \overset{loi}{=} \left(\alpha^{-2} X(W, \alpha^4 t) : t \geq 0\right)$

Idée : $X^\alpha \overset{not}{=} X(\alpha W^\alpha, \cdot)$ alors

(du lemme)

$$dX^\alpha = d\beta^\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 W'(\alpha^2 X^\alpha)\, dt$$

$$\overset{loi}{=} d\beta - \frac{1}{2}\alpha (W^\alpha)'(X^\alpha) dt$$

car $(W^\alpha)'(x) = \alpha W'(\alpha^2 x)$

On peut reformuler le thm à demontrer à l'aide de

X^α : $X^\alpha(W, t) = \left(s_\alpha^{-1} \circ \beta \circ T_\alpha^{-1}\right)(t)$

où $s_\alpha(x) = s_{\alpha W}(x) = \int_0^x e^{\alpha W(y)} dy$

$$T_\alpha(t) = \int_0^t \exp\left(-2\alpha W\left(s_\alpha^{-1}(\beta(u))\right)\right) du$$

Thm'

Soit $\alpha \longmapsto h(\alpha)$ fct réelle tq $h(\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 1$

alors pour Q- p.t $W \in \mathcal{W}$, $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\alpha\to\infty} P\left(\left| X^{\alpha}(W, e^{\alpha h(\alpha)}) - m_1(W) \right| > \delta \right) = 0$$

Thm' + lemme + invariance Q $\Longrightarrow$ Thm de Brox

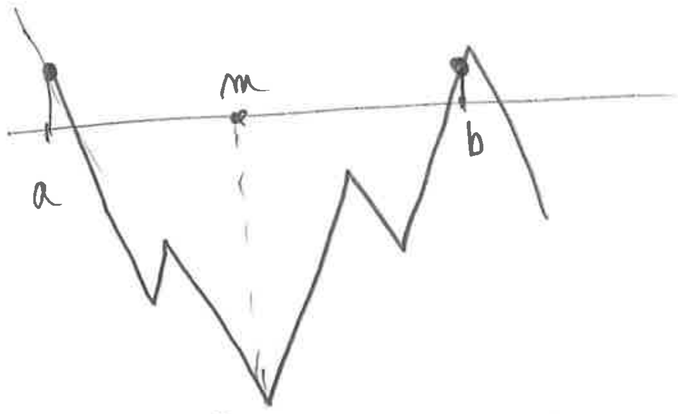
Markov

autosimilarité

2ème pas : deux outils pour démontrer Thm'

dépression (vallée) + localisation

Dépression



Soit $W \in \mathcal{W}$, $x, z \in \mathbb{R}$, $v = z - x$

$$H_{x,z} = \max_{0 \le \lambda \le \xi \le 1} \left[W(x + \xi v) - W(x + \lambda v) \right]$$

la plus grande montée entre x et z au long de W

$\Delta = (a, m, b)$ dépression $a < m < b$ si

$W(a) > W(x) > W(m)$, si $x \in (a, m)$

$W(m) < W(x) < W(b)$, si $x \in (m, b)$

et $H_{a,m} < H_{m,b}$ et $H_{b,m} < H_{m,a}$

$D = H_{m,a} \wedge H_{m,b}$ la profondeur

$A = H_{a,m} \vee H_{b,m}$ ascension interne $< D$

W a un min local strict en m de profondeur au moins D

Localisation

Propo Soit $\Delta = (a, m, b)$ dépression de W avec $a < 0$, $b > 0$, si on fixe

$A < r_1 < r_2 < D$ alors

$$\lim_{\alpha \to \infty} \inf_{r \in [r_1, r_2]} P(|X^\alpha(W, e^{\alpha r}) - m| > \delta) = 0$$

Si on se donne W et $r>0$ on peut trouver une dépression $\Delta_r(W) = (a_r, m_r, b_r)$ avec $a_r < 0$, $b_r > 0$ et tq $Q(A_r < r < D_r) = 1$

Le thm' est conséquence de cette remarque et de la Propo

<u>3ème pas</u> : étude du type de sortie de X^α d'une dépression $\Delta \doteq (a, m, b)$ de profondeur D avec X^α issu de $x \in (a,b)$

<u>Lemme'</u> $\forall I \subset (a,b)$ intervalle fermé, $\forall \delta > 0$

$$\liminf_{\alpha \to \infty} \inf_{x \in I} P\left(|\alpha^{-1} \ln(\tau_{x,\alpha}) - D| > \delta \right) = 0 \quad (\leq \delta) = 1$$

où $\tau_{x,\alpha} = \inf\{ t \geq 0 : X^\alpha_x(W,t) \notin (a,b) \}$

Comment retrouver la propo à partir du lemme' ?

Couplage de X^α et Z^α où Z^α est un p. de Markov sol de $dZ^\alpha_t = d\beta_t - \frac{1}{2} \alpha W'(Z^\alpha_t) dt$ dans (a,b)

Z^α réfléchie en a et en b

donc de mesure invariante $\mu_\alpha(dz) = \dfrac{e^{-\alpha W(z)}dz}{\int_0^b e^{-\alpha W(y)}dy}$

On peut voir que $\mu_\alpha(U) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 1$

$\forall U$ voisinage de m

On a deux proc indep X^α et Z^α jusqu'à la 1ere rencontre $\tau_\alpha = \inf\{t \geq 0 : X_t^\alpha = Z_t^\alpha\}$

et ensuite evoluent ensemble jusqu'à la sortie de (a,b)

$$P\big(X^\alpha_{e^{\alpha r}} \in U\big) \geq P\big(\tau_\alpha \leq e^{\alpha r_1},\ Z^\alpha_{e^{\alpha r}} \in U,\ e^{\alpha r_2} \leq \bar{\tau}_\alpha\big)$$

voisinage de m

$r \in [r_1, r_2]$

$\bar{\tau}_\alpha = \inf\{t > \tau_\alpha : X_t^\alpha \notin (a,b)\}$

$$\geq \underbrace{P\big(\tau_\alpha \leq e^{\alpha r_1},\ e^{\alpha r_2} \leq \bar{\tau}_\alpha\big)}_{\xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 1} + \underbrace{\mu_\alpha(U) - 1}_{\xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0}$$

2) W remplacé par W_K où $W_K(x) = W(x) - \frac{K}{2}x$

$K \in \mathbb{R}$ (supp $K>0$)

(cas transient)

$K>0$: $X_{W_K}(t) \overset{not}{=} X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

(la localisation n'est plus disponible à cause de la dérive)

Kawazu-Tanaka '97 , Hu, Shi, Yor '99

lemme de Kotani

transformation de Lamperti

X_t a un comportement semblable à

$\sup_{0\le s\le t} X_s \overset{not}{=} \overline{X}_t$, par exemple

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0\left(\frac{\overline{X}_t}{t^K} > r\right) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_0\left(\frac{X_t}{t^K} > r\right)$$

$$= 1 - F_K\left(r^{-1/K}\right) \quad , r>0, \ 0<K<1$$

où F_K f rép d'une loi K-stable

$\overline{X}_t > r$ ssi $H(r) < t$

où $H(r) = \inf\{t \geq 0 : X_t > r\}$

Tout revient à étudier H_r, qd $r \to \infty$!

Thm (Kawazu-Tanaka)

- $0 < K < 1$: $\dfrac{H_r}{r^{1/K}} \xrightarrow[r\to\infty]{loi} c\, S_K$, S_K v.a. stable

  et $\dfrac{X_t}{t^K} \xrightarrow[t\to\infty]{loi} 1/S_K^K$

- $K = 1$: $\dfrac{H_r}{r \log r} \xrightarrow[r\to\infty]{proba} 4$

  $(\log t)\dfrac{X_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{proba}$ cste

$\dfrac{X_t}{t} \xrightarrow{p.s.} 0$.

- $K > 1$: $\dfrac{H_r}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{p.s.} \dfrac{4}{K-1}$

  et $\dfrac{X_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \dfrac{K-1}{4}$

On retrouve des résultats pour MAMA '75 Kesten, Kozlov, Spitzer

Idée : le lemme de Kotani

Lemme

$$\mathbb{E}^W\left(e^{-\lambda H_r}\right) = \exp\left(-\int_0^r U_\lambda(s)\,ds\right)$$

où U_λ est l'unique sol stationnaire, positive de l'eds

$$dU_\lambda(t) = U_\lambda(t)\,dB_t + \left(2\lambda + \frac{1-K}{2}U_\lambda(t) - U_\lambda^2(t)\right)dt$$

Pourquoi utile

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda H_r}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\int_0^r U_\lambda(s)\,ds\right)\right)$$

trsf Laplace de H_r

trsf de Laplace de $\int_0^r U_\lambda(s)\,ds$

peut-être étudiée (calcul) avec des techniques pour des eds liné et basée sur l'étude des équation de Sturm-Liouville

Idée pour Kotani : prop de Markov

Notons $u(r) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_0^W\left(e^{-\lambda H_r}\right)}$, $v(r) = \mathbb{E}_r^W\left(e^{-\lambda H_a}\right)$

où $0<r<a$

Prop de Markov

$$E_0^W\left(e^{-\lambda H_a}\right) = E_0^W\left(e^{-\lambda H_r}\right) E_r^W\left(e^{-\lambda H_a}\right)$$

$$= \frac{v(r)}{u(r)}$$

De plus la fonction $v(r)$ satisfait

$$L_{W_K} v(r) = \lambda v(r), \; 0 < r < a$$

et ensuite on peut déduire que $u(r)$ satisfait

$$L_{W_R} u(r) = \lambda u(r), \quad \forall r > 0$$

On pose

$$U_\lambda(r) = \frac{u'(r)}{u(r)} = \left(\log u(r)\right)'$$

et on applique la f. d'Ito pour voir que $U_\lambda(r)$ satisfait l'eds citée et que c'est une sol stationnaire

$$U_\lambda(r) \stackrel{\text{loi}}{=} U_\lambda(0)$$

3) Grandes deviations : Taleb '01, '07

(quenched et anealed)

Idée : pgd pour U_λ (du lemme de Kotani)

$\Rightarrow$ (contraction) pgd pour H_r

$\Rightarrow$ pgd pour X_t

<u>quenched</u> $\frac{X_t}{t}$ sous P_0^W satisfait un pgd avec fonctionnelle de taux

$$J_K(v) = \begin{cases} v\, I_K(1/v), & v>0 \\ |v|\, I_K(1/|v|) + K\frac{|v|}{2}, & v<0 \end{cases}$$

$J_K(0)=0$

où $I_K(u) = \sup_{\lambda \geq 0} \left(\Gamma_K(\lambda) - \lambda u \right)$

avec $\Gamma_K(\lambda) = -E^Q\left(\log E_0^W(e^{-\lambda H_1})\right)$

fct de taux pour pgd pour $\frac{H_r}{r}$

<u>annealed</u> $\frac{X_t}{t}$ sous $\mathbb{P}_0$ satisfait un pgd avec f. de taux

$$\tilde{J}_K(v) = \begin{cases} v\, \tilde{I}_K(1/v), & \text{si } v>0 \\ |v|\, \tilde{I}_{-K}(1/|v|), & v<0 \end{cases}$$

avec $\tilde{I}_K$ écrite avec $\mathbb{E}$

De plus $\forall\, \mathcal{O}$ ouvert dans $(0, v_K)$, où

$$v_K = \lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} \quad \left(\begin{array}{l} = 0 \text{ si } 0 < K \leq 1 \\ = \text{cste si } K > 1 \end{array} \right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t} \log \mathbb{P}_0\left(\frac{X_t}{t} \in \mathcal{O} \right) = 1 - K$$

(déviation de $\frac{X_t}{t}$ de sa limite type)

Déviation modéré (Hu-Shi '04)

On sait que $\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow{\text{loi}} b_\infty$ et on veut $P_0^W(X_t > v)$

$\mathbb{P}_0(X_t > v)$

quant $t, v \to \infty$ mais

$v \gg (\log t)^2$ i.e. $\frac{v}{(\log t)^2} \to \infty$

$(\log t)^2 \ll v \ll t$ $\left(\frac{X_t}{t} \text{ gd}\right)$

$v = o(t)$

quenched

$$\frac{2\log(t/v)}{v}\log P_0^W\left(X_t>v\right)\xrightarrow[v,t\to\infty]{}-1$$

....

anealed

$$\frac{(\log t)^2}{v}\log \mathbb{P}_0\left(X_t>v\right)\xrightarrow[v,t\to\infty]{}-\frac{\pi^2}{8}$$

qd $v\gg(\log t)^2$, $\log v=o(\log t)$

& Kotani, trsf Lamperti, étude des dépressions

4) Cas d'un potentiel proc de Lévy

Carmona '97

$$\begin{cases} dX_t = dB_t - \frac{1}{2}V'(X_t)dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

où $(V(x): x\in\mathbb{R})$ proc de Lévy indexé par $\mathbb{R}$

c'est-à-dire

p. Markov

- $V(0)=0$
- $\forall\, x_0, x_1, \dots, x_n$ réels $\left(V(x_{i+1})-V(x_i) : 0\leq i\leq n-1\right)$ v.a indep
- $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ Loi $\left(V(x+y)-V(x)\right)$ ne dépend que de y

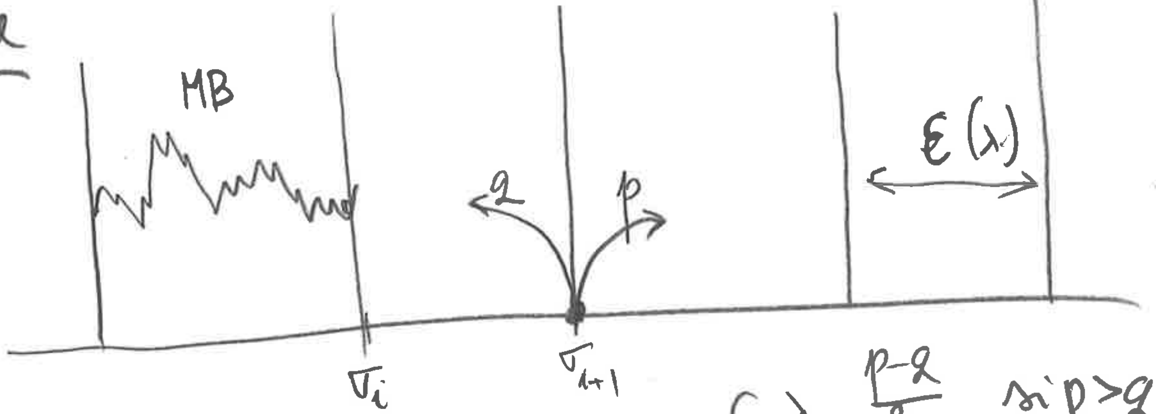
V fixé P_x^V loi de la diffusion avec generateur

$$L_V f(x) = \frac{d}{dm_V}\left(\frac{df}{ds_V}(x)\right)$$

où $s_V(x)=\int_0^x e^{V(y)}dy$, $m_V(dx)=2e^{-V(x)}dx$

N proc de Poisson indexé par $\mathbb{R}$

Exemple



et on peut mq dans ce cas $\displaystyle \frac{X_t}{t}\xrightarrow[t\to\infty]{}\begin{cases}\lambda\,\frac{p-q}{2p} & \text{si } p>q\\ \lambda\,\frac{p-q}{2p} & \text{si } p<q\end{cases}$

Thm (Carmona)

$\phi(\cdot)$ l'exposant du processus V

$$E\left(e^{mV(t)}\right) = e^{-t\phi(m)}, \quad m \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$H_r = \inf\{t > 0 : X_t = r\}$$

i) supp $\phi(1) > 0$ alors $\lim_{r\to\infty} \frac{H_r}{r} = \frac{2}{\phi(1)}$ $\mathbb{P}_0$-ps.

et $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{\phi(1)}{2}$

ii) supp $\phi(-1) > 0$. $\lim_{r\to\infty} \frac{H_{-r}}{r} = \frac{2}{\phi(-1)}$ $\mathbb{P}_0$-ps

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = -\frac{\phi(-1)}{2}$$

iii) si $\phi(1)$ et $\phi(-1)$ sont ds $[-\infty, 0]$ alors

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0 \quad \mathbb{P}_0\text{-ps}$$

$\phi(m)$ lorsque $V(x) = W(x) - \frac{K}{2}x$

$$E(e^{mV(x)}) = e^{-x\phi(m)} = E(e^{mW(x)})e^{-m\frac{K}{2}x}$$

Kawazu – Tanaka

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \begin{cases} \frac{\phi(1)}{2} & \text{si } \phi(1) > 0 \\ -\frac{\phi(-1)}{2} & \text{si } \phi(-1) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Idées de preuve du thm de Carmona

1er pas $\quad (\tau_n = H_n - H_{n-1})$ une ch. de Markov ergodique sous $\mathbb{P}^0$

et alors le thm ergo

$$\frac{H_n}{n} = \frac{1}{n}(\tau_1 + \dots + \tau_n) \longrightarrow E_0^V(\tau_1)$$

$$s_V(0) = 0, \ s_V(-\infty) = -\infty$$

$$E_0^V(\tau_1) = \int_0^1 ds_V(x) \int_{-\infty}^x m_V(dy)$$

loi de V

$$\Rightarrow E_0(\tau_1) = 2\int_0^1 dx \int_{-\infty}^x dy \ E^Q\left(e^{V(x)-V(y)}\right)$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_{-\infty}^x dy \ e^{-(x-y)\phi(1)} = \frac{2}{\phi(1)}$$

2ème pas $\lim \frac{H_r}{r}$ et $\frac{X_t}{t}$

Pour n grand $\frac{H_n}{n}$ proche de $\frac{2}{\phi(1)}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \bar{X}_t = +\infty \qquad \left(\bar{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s \right)$$

$$\frac{H_{\bar{X}_t}}{\bar{X}_t} \le \frac{t}{\bar{X}_t} \le \frac{H_{\bar{X}_t+\varepsilon}}{\bar{X}_t} \quad , \forall \varepsilon > 0$$

3ème Il faut vérifier que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{s\ge t} X_s \ge \frac{\phi(1)}{2}$$

et alors on trouve i) du thm

Tanaka '87 milieu auto-similaire

Kusouka, Takahashi, Tamura '17 (dim supé)